

TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Øving 1.

Eksamen vil bestå av 50 flervalgsoppgaver. Derfor vil de fleste øvingsoppgavene bli presentert i et tilsvarende format. Din eksamensbesvarelse vil bestå av 50 kryss i en tabell, forhåpentlig de fleste av dem på riktig plass. Jobb med regneøvingene på den måten som passer deg best. De fleste oppgavene løses best på tradisjonelt vis, dvs som om de var gitt som ordinære fysikkproblemer uten oppgitt løsning. En del oppgaver kan løses med lite eller ingen regning, ved å vurdere de ulike svaralternativene.

I øvingene henger en oppgave ofte sammen med den foregående, noe som kan føre til følgefeil. Til eksamen vil dette problemet minimeres så langt det lar seg gjøre.

Løsningsforslag legges typisk ut samtidig med selve øvingen, eller kort tid etter. Det er ingen innlevering. Studassene vil være til stede på oppsatt tid for veiledning. (Og eventuelt alternative tidspunkt, hvis det blir aktuelt.)

Oppgave 1.

Bestiller du en pint i en engelsk pub, får du en *imperial pint* (IP) og hele 568.26125 mL med øl (eksakt). Gjør du tilsvarende i en amerikansk pub, blir du avspist med en *US liquid pint* (UP), som ikke er mer enn 473.176473 mL. Hva er en IP i SI-enheter, sånn omtrent?

A $5.68 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$ B $5.68 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ C $5.68 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$ D $5.68 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$ E $5.68 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$

Oppgave 2.

Hva er en UP målt i IP?

A 0.8 B 0.9 C 1.0 D 1.1 E 1.2

Oppgave 3.

Det finnes eksempler på at fallskjermhoppere som har hoppet uten at fallskjermen har åpnet seg, har overlevd fallet ved at de har truffet et tre, ei snøfonn eller en bratt skråning. Det er mulig å overleve et fall når akselerasjonen idet en bremses opp av underlaget er mindre enn ca 500 m/s^2 (i absoluttverdi), noe som tilsvarer ca 50 g, der tyngdens akselerasjon er $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Omtrent hvor stor hastighet kan fallskjermhopperen ha i det hun treffer en 2 m dyp snøfonn dersom hastigheten skal reduseres til null før hun når en ubehagelig mye hardere berggrunn under snøfonna? Anta at akselerasjonen er konstant lik (-500 m/s^2) på vei gjennom snøen.

A 30 m/s B 35 m/s C 40 m/s D 45 m/s E 50 m/s

Oppgave 4.

Hvor lang tid tar det fra fallskjermhopperen treffer snøfonna til hun stopper?

A 0.091 s B 0.22 s C 0.41 s D 0.78 s E 1.2 s

Oppgave 5.

Akselerasjonen til ei klinkekule som beveger seg med relativt stor hastighet v gjennom en væske kan med god tilnærming skrives som

$$a = -kv^2,$$

der k er en (positiv) konstant som avhenger av væskens egenskaper og klinkekulas masse og radius. Vi ser bort fra tyngdens akselerasjon i denne og de tre neste oppgavene.

Hva er enheten til konstanten k i SI-systemet?

A m B s C 1/m D 1/s E 1 (dvs dimensjonsløs)

Oppgave 6.

Dersom klinkekula treffer væsken med hastigheten v_0 , hva blir uttrykket for kulas hastighet $v(t)$ som funksjon av tida?

- A $v(t) = v_0 \exp(-kt)$ B $v(t) = v_0 \exp(-k^2 t)$ C $v(t) = v_0/(1 + kv_0 t)^2$
 D $v(t) = v_0/kt$ E $v(t) = v_0/(1 + kv_0 t)$

Oppgave 7.

Dersom $k = 3.0$ (i SI-enheter) og $v_0 = 1.50$ m/s, hvor lang tid tar det før hastigheten er redusert til det halve?

- A 0.091 s B 0.22 s C 0.41 s D 0.78 s E 1.2 s

Oppgave 8.

Og hvor langt har da kula beveget seg i væsken?

- A 23 cm B 1.6 m C 23 m D 69 m E 160 m

Oppgave 9.

Ei pil skytes fra bakkenivå oppover en bakke med helningsvinkel α . Pila har utgangsfart v_0 og utgangsvinkel θ i forhold til horisontalplanet ($\theta > \alpha$). Se bort fra luftmotstand. Rekkevidden til skuddet (dvs avstanden oppover langs bakken, fra startpunkt til nedslagspunkt) betegner vi med L . Hvor lang tid tar det fra pila skytes ut til den treffer bakken? (Tips: En figur vil nok være nyttig for å løse denne og de to neste oppgavene.)

- A $(2v_0/g) \cdot (\sin \theta - \cos \theta \tan \alpha)$ B $(v_0/2g) \cdot (\sin \theta - \cos \theta \tan \alpha)$
 C $(2v_0/g) \cdot (\cos \theta - \sin \theta \tan \alpha)$ D $(v_0/2g) \cdot (\cos \theta - \sin \theta \tan \alpha)$
 E $(2v_0/g) \cdot (\tan \theta - \sin \theta \cos \alpha)$

Oppgave 10.

Hvor langt kommer pila?

- A $L = \frac{2v_0^2 \tan^2 \theta}{g \tan \alpha} \cdot (\cos \theta - \cos \alpha)$
 B $L = \frac{2v_0^2 \cos^2 \theta}{g \tan \alpha} \cdot (\tan \theta - \cos \alpha)$
 C $L = \frac{2v_0^2 \tan^2 \theta}{g \cos \alpha} \cdot (\cos \theta - \tan \alpha)$
 D $L = \frac{2v_0^2 \cos^2 \theta}{g \cos \alpha} \cdot (\tan \theta - \tan \alpha)$
 E $L = \frac{2v_0^2 \tan^2 \theta}{g \cos \alpha} \cdot (\tan \theta - \cos \alpha)$

Oppgave 11.

Hvilken vinkel, $\theta_{\max}$, gir maksimal rekkevidde? (Tips: Sjekk svaret for $\alpha = 0$.)

- A $\theta_{\max} = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ B $\theta_{\max} = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$
 C $\theta_{\max} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}$ D $\theta_{\max} = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4}$
 E $\theta_{\max} = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$

Oppgitt: $1/\tan \alpha = -\tan(\alpha + \pi/2)$. Formler for $\sin 2\theta$ og $\cos 2\theta$ kan også være nyttige. (Se Rottmann.)

Oppgave 12.

En ordinær oppgave til slutt. (Punkt d er forholdsvis utfordrende.)

En mann skal krysse ei elv med bredde b , og vil på kortest mulig tid komme seg over elva til punktet tvers over, i forhold til startpunktet. Vi antar at vannets hastighet $\mathbf{V}$ er konstant, uavhengig av avstanden fra elvebreddene. Mannen har tilgjengelig en robåt, og kan ro med en fart $\mathbf{v}'$ relativt vannet, og med en hvilken som helst vinkel θ i forhold til $\mathbf{V}$. Når båten har kommet til motsatt side, går mannen til det ønskede punktet på elvebredden med marsjfarten v_g langs bredden.

a. Tegn figur, og finn uttrykk for båtens hastighetskomponenter v'_x og v'_y relativt vannet i elva, samt hastighetskomponentene v_x og v_y relativt et landfast koordinatsystem.

b. Finn et uttrykk for tiden det totalt tar (roing pluss gange) for å komme til det ønskede punktet, som funksjon av vinkelen θ .

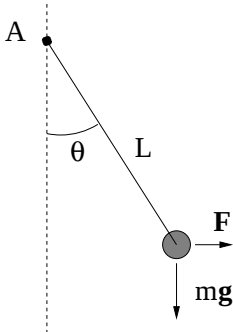
c. Finn et uttrykk for den vinkelen, $\theta_{\min}$, som minimaliserer tiden. Bestem $\theta_{\min}$ for det tilfellet at $b = 150$ m, $|\mathbf{v}'| = 3.0$ km/h, $|\mathbf{V}| = 2.0$ km/h, og $v_g = 5.0$ km/h.

d. Men: Kan uttrykket du fant under pkt. c ha generell gyldighet? Sjekk svaret uttrykket gir for $\theta_{\min}$ når du setter $V = 0$. Kan dette være riktig? Den fullstendige løsning av dette minimeringsproblemet er en utfordring til de ambisiøse!

Et av svarene: 12c) 115°

TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Øving 2.

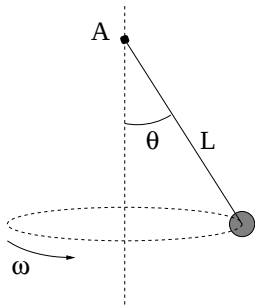
Oppgave 1.



Ei kule (punktmasse) med masse m er festet til ei vektløs stang med lengde L . Stanga er festet i et punkt A som den kan bevege seg fritt om.

a) Kula trekkes ut til siden (i papirplanet) med en horisontal kraft $\mathbf{F}$. Hvor stor må F være for å holde kula i ro ved vinkelen θ ?

- A) $F = mg \sin \theta$ B) $F = mg \cos \theta$ C) $F = mg \tan \theta$
 D) $F = mg$ E) $F = mg/3$



b) I stedet for å trekke med en kraft $\mathbf{F}$ lar vi systemet rotere om en vertikal akse gjennom opphengningspunktet A, med vinkelhastighet ω . Stanga danner da en vinkel θ med vertikalaksen, bestemt ved

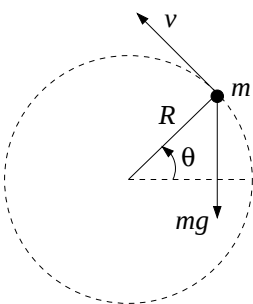
- A) $\tan \theta = g/\omega^2 L$ B) $\cos \theta = g/\omega^2 L$ C) $\tan \theta = \omega^2 L/g$
 D) $\cos \theta = \omega^2 L/g$ E) $\sin \theta = \omega L/g$

(Denne løsningen gjelder ikke for alle verdier av ω . Hva må ω (minst) være for at denne løsningen skal gjelde?)

c) Til slutt tenker vi oss at pendelen henger (uten å rotere) i et fly som akselererer bortover rullebanen. Hva er flyets akselerasjon dersom $\theta = 30^\circ$? (Utfør eksperimentet neste gang du er ute og flyr!)

- A) $a = g$ B) $a = g/2$ C) $a = \sqrt{3}g$ D) $a = \sqrt{2}g$ E) $a = g/\sqrt{3}$

Oppgave 2.



En stein med masse m er festet til enden av ei (masseløs) snor med lengde R , og slynges rundt i en vertikal sirkelbane, som vist i figuren til venstre.

a) Vis at Newtons 2. lov for den tangentielle bevegelsen langs sirkelbanen kan skrives som

$$R \frac{d\omega}{dt} = -g \cos \theta,$$

og bruk kjerneregelen, $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$, til å finne en differensialligning for $\omega(\theta)$.

b) Løs ligningen og vis at

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{2g}{R} \cdot \sin \theta,$$

der ω_0 er vinkelhastigheten ved $\sin \theta = 0$.

c) Sett opp en ligning for sentripetalakselerasjonen $a_\perp$ og finn snordraget S som funksjon av θ . I hvilken posisjon av banen er det størst fare for at snora ryker? (Bruk uttrykket du har funnet for $S(\theta)$ og sjekk det mot din sunne fornuft.) Hva må ω_0 minst være for at snora hele tida skal være stram? (Sunn fornuft gir en god sjekk også her.)

Oppgave 3.

En kloss med masse m ligger i ro på et skråplan med helningsvinkel θ . Statisk og kinetisk friksjonskoeffisient for kontaktflaten mellom kloss og skråplan er hhv μ_s og $\mu_k < \mu_s$.

a) Hvor stor er normalkraften N fra skråplanet på klossen? ($\cot x = \cos x / \sin x = 1 / \tan x$)

- A) $N = mg$ B) $N = mg \sin \theta$ C) $N = mg \cot \theta$ D) $N = mg \tan \theta$ E) $N = mg \cos \theta$

b) Hvor stor er friksjonskraften f fra skråplanet på klossen?

- A) $f = mg$ B) $f = mg \sin \theta$ C) $f = mg \cot \theta$ D) $f = mg \tan \theta$ E) $f = mg \cos \theta$

c) Hvor stor må μ_s minst være for at klossen skal ligge i ro?

- A) $\mu_s^{\min} = \sin \theta$ B) $\mu_s^{\min} = \cos \theta$ C) $\mu_s^{\min} = \tan \theta$ D) $\mu_s^{\min} = \cot \theta$ E) $\mu_s^{\min} = 1$

d) Hva blir klossens akselerasjon $a_{\parallel}$ nedover skråplanet dersom μ_s ikke er stor nok til at klossen blir liggende i ro?

- A) $a_{\parallel} = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$ B) $a_{\parallel} = g(\cos \theta - \mu_k \sin \theta)$ C) $a_{\parallel} = g(\sin \theta - \mu_s \cos \theta)$
D) $a_{\parallel} = g(\cos \theta - \mu_s \sin \theta)$ E) $a_{\parallel} = g(\cos \theta + \mu_k \sin \theta)$

e) Anta at μ_s er for liten til å holde klossen i ro, slik at den akselererer nedover skråplanet. Til hvilken helningsvinkel α må du justere skråplanet for at klossen skal gli med konstant hastighet?

- A) $\alpha = \mu_k$ B) $\alpha = \mu_s$ C) $\alpha = \arcsin \mu_k$ D) $\alpha = \arccos \mu_k$ E) $\alpha = \arctan \mu_k$

Oppgave 4.

To klosser med masse hhv m_1 og m_2 og kinetisk friksjonskoeffisient hhv μ_1 og μ_2 glir nedover et skråplan med helningsvinkel β . De to klossene er forbundet med ei tilnærmet masseløs snor. Klossen med masse m_1 ligger øverst på skråplanet. Snordraget betegner vi med S ; $S = 0$ hvis snora er slakk og $S > 0$ hvis snora er stram.

a) Hvor stor er friksjonskraften f_i fra skråplanet på kloss nr i ($i = 1, 2$)?

- A) $f_i = \mu_i m_i g \sin \beta$ B) $f_i = \mu_i m_i g \cos \beta$ C) $f_i = \mu_i m_i g \tan \beta$ D) $f_i = \mu_i m_i g \cot \beta$ E) $f_i = \mu_i m_i g$

b) Hva er akselerasjonen a_1 til kloss nr 1?

- A) $a_1 = g(\sin \beta + \mu_1 \cos \beta) + S/m_1$ B) $a_1 = g(\sin \beta - \mu_1 \cos \beta) + S/m_1$
C) $a_1 = g(\sin \beta + \mu_1 \cos \beta) - S/m_1$ D) $a_1 = g(\sin \beta - \mu_1 \cos \beta) - S/m_1$
E) $a_1 = g(\cos \beta - \mu_1 \sin \beta) + S/m_1$

c) Hva er akselerasjonen a_2 til kloss nr 2?

- A) $a_2 = g(\sin \beta + \mu_2 \cos \beta) + S/m_2$ B) $a_2 = g(\sin \beta - \mu_2 \cos \beta) + S/m_2$
C) $a_2 = g(\sin \beta + \mu_2 \cos \beta) - S/m_2$ D) $a_2 = g(\cos \beta - \mu_2 \sin \beta) + S/m_2$
E) $a_2 = g(\sin \beta - \mu_2 \cos \beta) - S/m_2$

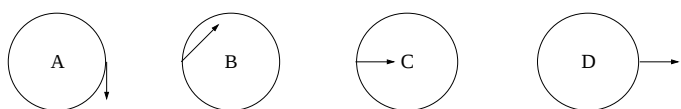
d) Hva er betingelsen for at snora skal holde seg stram? (Dvs, med et snordrag $S > 0$.)

- A) $m_1 > m_2$ B) $\mu_1 > \mu_2$ C) $\mu_1 m_1 = \mu_2 m_2$ D) $\mu_1 m_1 > \mu_2 m_2$ E) $m_1/\mu_1 > m_2/\mu_2$

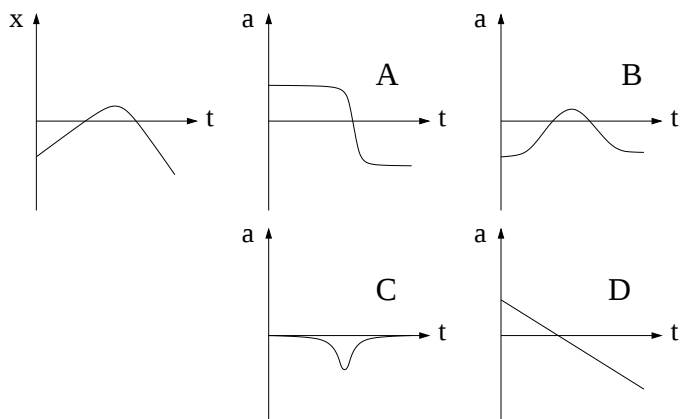
e) Hva må vinkelen β være for at de to klossene skal gli nedover skråplanet med samme konstante hastighet?

- A) $\beta = \arcsin[(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)/(m_1 + m_2)]$ B) $\beta = \arctan[(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)/(m_1 + m_2)]$
C) $\beta = \arcsin[(m_1 + m_2)/(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)]$ D) $\beta = \arccos[(m_1 + m_2)/(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)]$
E) $\beta = \arctan[(m_1 + m_2)/(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)]$

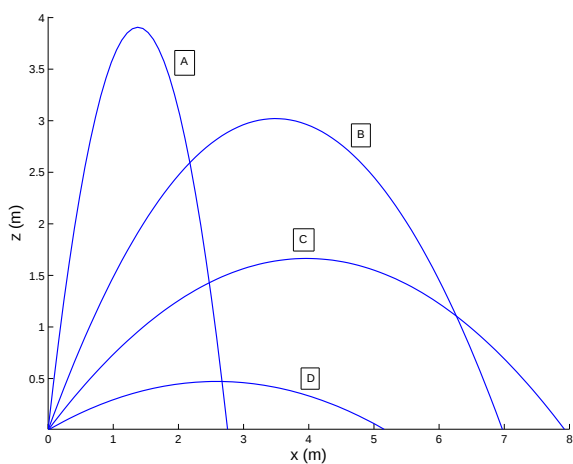
Oppgave 5.



a) En partikkel beveger seg i en sirkulær bane, med jevnt økende hastighet. Hvilken figur viser korrekt akselerasjon?



b) Et legeme beveger seg langs en rett linje (x) som vist i figuren til venstre. Hvilken figur viser best legemets akselerasjon a ?



c) Figuren viser banen for fire prosjektiler som skytes ut under ulike vinkler, men med samme absoluttverdi av hastigheten. Hvilket prosjektil var lengst i lufta?

TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Øving 3.

Oppgave 1.

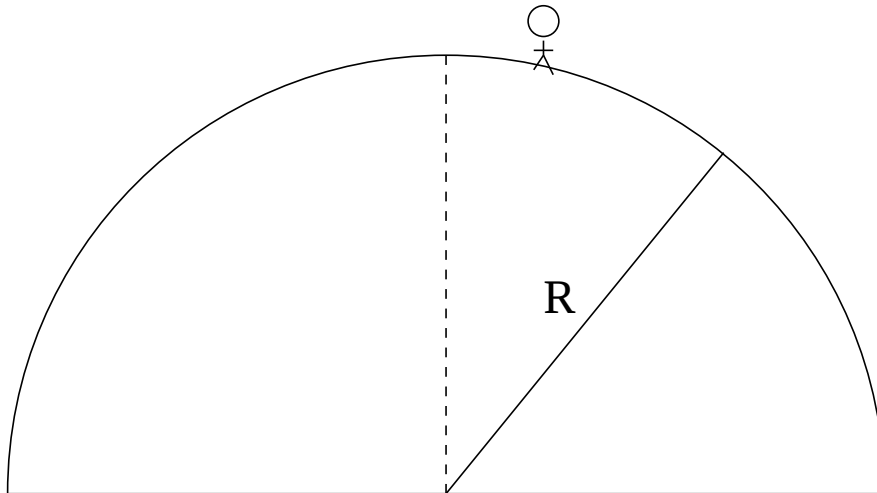
La oss for enkelhets skyld sette $g = 10 \text{ m/s}^2$ i denne oppgaven.

a) Hvis du trekker en kasse med masse 50 kg en lengde 3 m bortover gulvet, og kinetisk friksjonskoeffisient for "kasse mot gulv" er 0.2, hvor mye mekanisk energi har da gått tapt i form av friksjonsarbeid?

- A) 30 Nm B) 70 Nm C) 150 Nm D) 300 Nm E) 700 Nm

b) Anta at statisk friksjonskoeffisient for "piano mot gulv" er 0.4, og at pianoet har masse 120 kg. Du forsøker – forgjeves – å skyve pianoet bortover gulvet med en horisontal kraft på 350 N, men pianoet rikker seg ikke. Hva er friksjonskraften fra gulvet på pianoet?

- A) 285 N B) 350 N C) 415 N D) 438 N E) 471 N



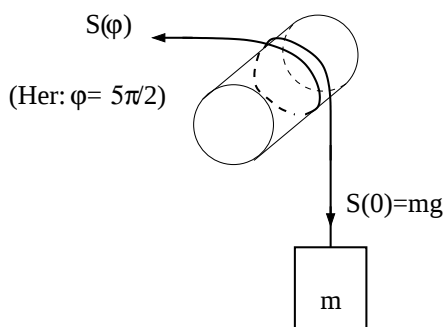
c) Statisk friksjonskoeffisient mellom skosålene dine og et halvkuleformet tak med radius $R = 40 \text{ m}$ er 0.5. Hvor langt bort fra toppen kan du da bevege deg uten å begynne å gli? (Vi måler lengden langs takets overflate.)

- A) 8.2 m B) 12.3 m C) 18.5 m D) 33.6 m E) 58.7 m

d) Anta så at du setter deg på et essensielt friksjonsfritt brett og seiler utfor fra toppen av taket med praktisk talt null starthastighet. Hvor langt nedover taket kommer du før du "tar av"?

- A) 8.2 m B) 12.3 m C) 18.5 m D) 33.6 m E) 58.7 m

Oppgave 2.



ϕ	$S_{\max}/g$ (g)
0	185
$\pi/2$	240
π	300
$3\pi/2$	440
2π	600
$5\pi/2$	800
3π	1000
$7\pi/2$	1100
4π	1400

Tabell: Maksimal snorkraft $S_{\max}$ med lodd i likevekt, med snor surret en vinkel ϕ rundt plastrøret.

Innledning: I forelesningene viste vi, både eksperimentelt og ved hjelp av regning, hvordan surring av ei snor rundt en sylinder resulterer i en friksjonskraft som kan hjelpe oss å holde tunge gjenstander oppe. I figuren til venstre er $S(\phi)$ enten minste påkrevde snordrag for å holde massen m i ro når snora har kontakt med sylindren over en vinkel ϕ ,

$$S_{\min}(\phi) = S(0) \exp(-\mu\phi),$$

eller, som her, det maksimale snordraget som kan brukes uten at massen trekkes oppover,

$$S_{\max}(\phi) = S(0) \exp(\mu\phi).$$

Målinger av $S_{\max}(\phi)$, utført på faglærers kontor fredag 14.09.2012 med enkle fjærvekter og lodd (metallring) med masse $m = 185$ g, gav resultatene i tabellen til venstre. Du skal bruke disse måleresultatene til å bestemme den statiske friksjonskoeffisienten μ mellom snora og plastrøret. Vi antar at feilen i m , dvs $S_{\max}(0)$, er neglisjerbar, og at feil i $S_{\max}$ og ϕ , og dermed μ , er tilfeldige. Nedenfor følger selve oppgaven.

Oppgaven: Basert på de $n = 8$ målepunktene i tabellen, bestem middelveiden av friksjonskoeffisienten,

$$\bar{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i,$$

et estimat for usikkerheten i en enkeltmåling av μ (det såkalte standardavviket),

$$\Delta\mu = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mu_i - \bar{\mu})^2},$$

og et estimat for usikkerheten i middelveiden (den såkalte standardfeilen),

$$\Delta\bar{\mu} = \frac{\Delta\mu}{\sqrt{n}}.$$

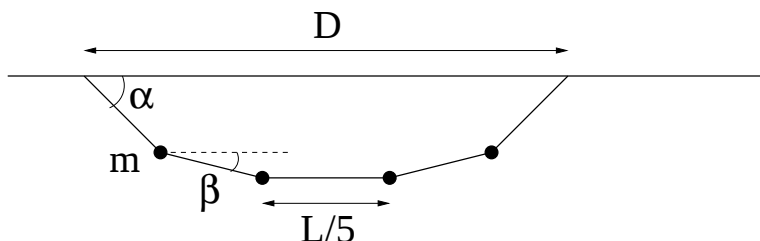
Angi deretter μ med middelveide og usikkerhet (standardfeil), dvs på formen

$$\mu = \bar{\mu} \pm \Delta\bar{\mu}.$$

Til slutt plotter du de eksperimentelle målepunktene for størrelsen $\ln[S_{\max}(\phi)/S_{\max}(0)]$ sammen med de tre rette linjene $\mu\phi$, for $\mu = \bar{\mu}$ samt $\mu = \bar{\mu} \pm \Delta\mu$. Er andelen målepunkter som ligger innenfor $[\bar{\mu} - \Delta\mu, \bar{\mu} + \Delta\mu]$ omtrent som forventet (dvs ca 68%)? Bruk helst digitale hjelpemidler (gjerne Matlab) til å løse denne oppgaven.

Oppgave 3.

På ei tilnærmet masseløs klessnor henger fire like tunge plagg i hver sin kleshenger, med lik avstand $L/5$ mellom to nabokleshengere, og mellom festepunkt og nærmeste kleshenger. Klessnora har med andre ord lengde L , og endene er festet i samme høyde, med innbyrdes avstand D :



Oppgaven går ut på å bestemme klessnoras form, dvs vinklene α og β i figuren. Vis at vinkelen α kan bestemmes ved å løse ligningen

$$\frac{L}{5} \left(1 + \frac{4x}{\sqrt{1+3x^2}} + 2x \right) = D,$$

der $x = \cos \alpha$. Tips: Problemet inneholder 5 ukjente størrelser: Vinklene α og β , samt 3 ulike snorkrefter S_1 (ytterst), S_2 (nest ytterst) og S_3 (på midten). Newtons 1. lov for to av massene (en ytterst og en nest ytterst), horisontalt og vertikalt, gir 4 ligninger. Den femte ligningen har kun å gjøre med geometrien, dvs en sammenheng mellom D , L , α og β , og denne finner du direkte ut fra figuren.

Dette er i realiteten en 4.gradsligning i x , som strengt tatt lar seg løse analytisk, men de analytiske uttrykkene ser ikke pene ut og gir ikke særlig mye innsikt.

I praksis er det mye mer fornuftig å bestemme x , og dermed α , med en numerisk metode. Den enkleste oppskriften er sannsynligvis denne:

- Skriv ligningen på formen $x = f(x)$.
- Velg en passende startverdi $x = x_0$ og regn ut $f(x_0)$.
- Sett $x_1 = f(x_0)$ og regn ut $f(x_1)$.
- Sett $x_2 = f(x_1)$ og regn ut $f(x_2)$, osv.
- Gjenta ("Iterer") dette skjemaet inntil $x_j \simeq x_{j-1}$ med tilstrekkelig god tilnærmelse.

I Matlab-programmet klessnor.m er denne algoritmen implementert. Det eneste som mangler er at du skriver inn en passende høyreside (dvs $f(x)$) i linje nr 33:

```
x1 = .....;
```

Dvs, de fem punktumene må erstattes av en passende $f(x)$, med x satt lik x_0 . (Her finnes det flere muligheter, se eventuelt tips3.pdf.)

Ekstraoppgave: Kompletter programmet, dvs finn β og snorkreftene (i enheter av mg) uttrykt ved α , og legg til programlinjer som regner ut og skriver ut disse størrelsene.

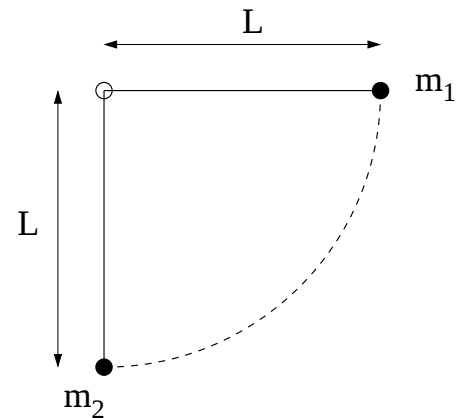
Et fasitsvar:

Oppgave 2: 0.172 ± 0.005 .

TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Øving 4.

Oppgave 1: Kulekollisjoner

To kuler med masse m_1 og m_2 er hengt opp i samme punkt med tynne, vektløse snorer med lengde L . Kula med masse m_1 trekkes ut til snora er horisontal og slippes. Den svinger nedover og treffer kula med masse m_2 i et sentralt støt. Betrakt kulene som punktmasser slik at snorene er vertikale når kollisjonen skjer.



a) Hva er hastigheten v_1 til massen m_1 like før støtet?

- A) $\sqrt{gL/2}$ B) $\sqrt{gL}$ C) $\sqrt{2gL}$ D) $\sqrt{3gL}$ E) $\sqrt{4gL}$

b) Hva er strekket S_1 i snora som m_1 henger i like før støtet?

- A) m_1g B) $2m_1g$ C) $3m_1g$ D) $4m_1g$ E) $5m_1g$

c) Anta at kulene er klebrige og henger sammen etter kollisjonen, dvs kollisjonen er fullstendig uelastisk. Hvor høyt kommer kulene da etter kollisjonen?

- A) L B) $L \cdot (m_1/m_2)$ C) $L \cdot (m_1/(m_1 + m_2))$ D) $L \cdot (m_2/(m_1 + m_2))$ E) $L \cdot (m_1/(m_1 + m_2))^2$

d) Hva er forholdet mellom mekanisk energi etter og før denne fullstendige uelastiske kollisjonen?

- A) $m_1/(m_1 + m_2)$ B) $m_2/(m_1 + m_2)$ C) $(m_2/(m_1 + m_2))^2$ D) m_1/m_2 E) m_2/m_1

Anta heretter at kollisjonen er elastisk.

e) Hva er hastigheten til kule 2 like etter kollisjonen.

- A) v_1 B) $v_1 \cdot 2m_1/(m_1 + m_2)$ C) $v_1 \cdot m_1/(m_1 + m_2)$ D) $v_1 \cdot 2m_2/(m_1 + m_2)$ E) $v_1 \cdot m_1/m_2$

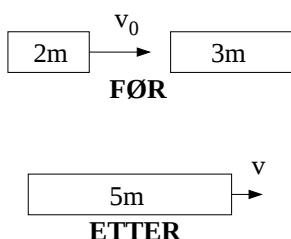
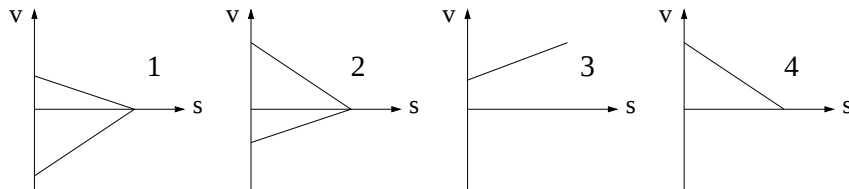
f) Hva må masseforholdet m_1/m_2 minst være for at kule 2 etter støtet skal svinge helt rundt, dvs nå toppunktet med stram snor?

- A) 6 B) 5/3 C) $\sqrt{5}/\sqrt{8}$ D) $\sqrt{8}/(\sqrt{8} - \sqrt{5})$ E) $\sqrt{5}/(\sqrt{8} - \sqrt{5})$

Oppgave 2: Litt ymse

a) En kloss sendes oppover et skråplan. Det er friksjon mellom klossen og underlaget. Hvilken eller hvilke av figurene viser mulig graf for klossens hastighet v ? (s angir klossens posisjon på skråplanet, og v og s er begge positive i retning oppover skråplanet.)

- A) Kun graf 1.
- B) Kun graf 2.
- C) Graf 2 og 4.
- D) Graf 1 og 3.



b) En kloss med masse $2m$ kolliderer fullstendig uelastisk med en kloss med masse $3m$. Før kollisjonen har klossen med masse $2m$ hastighet v_0 mens klossen med masse $3m$ ligger i ro. Etter kollisjonen har klossene felles hastighet v . Hvor mye mekanisk energi har gått tapt i kollisjonen?

- A) $mv_0^2/3$
- B) $2mv_0^2/5$
- C) $3mv_0^2/5$
- D) mv_0^2

Oppgave 3: Saturn V, trinn 1

Rakett-typen som blant annet sørget for å bringe Apollo 11 fra jorda til månen i juli 1969 kalles Saturn V. I det første av i alt tre rakett-trinn ble 13.2 tonn drivstoff forbrent pr sekund (dvs $dm/dt = -13.2 \cdot 10^3$ kg/s) og blåst ut bakover med en hastighet $|u| = 2.58$ km/s relativt raketten. Etter 2.5 minutter var alt drivstoff i trinn 1 brukt opp. Oppskytingen startet med raketten i ro på bakken, der tyngdens akselerasjon er $g = 9.81$ m/s². Total masse før avreise var $3.04 \cdot 10^6$ kg.

a) Bruk "rakettligningen" (som vi utledet i forelesningene)

$$ma = F_{\text{ytte}} + F_{\text{skyv}}$$

til å vise at rakettsens hastighet etter en tid t blir

$$v(t) = -u \ln \frac{m_0}{m} - gt.$$

Her er m_0 startmassen, mens $m = m(t)$ er gjenværende masse ved tidspunktet t . Vi har valgt positiv retning oppover, slik at ytre kraft på raketten er $-mg$. Skyvkraften er $u \cdot \beta$, der u er eksosens hastighet relativt raketten og $\beta = dm/dt$ angir forbrent drivstoffmasse pr tidsenhet. Her er både u og β negative størrelser, og vi antar at de begge er konstante, som antydnet innledningsvis. Vi antar også at tyngdens akselerasjon g kan regnes som konstant. (Denne antagelsen kan du se nærmere på i et frivillig ekstrapunkt *e*) nedenfor.)

b) Hvor stor må skyvkraften minst være for at raketten i det hele tatt skal ta av fra bakken? Sjekk at dette var tilfelle for Saturn V. Regn ut drivstoffmassen m_d ved avreise, $t = 0$, og rakettsens sluttmasse m_f ved tidspunktet t_f , dvs idet alt drivstoff er brukt opp.

c) Vis at rakettsens akselerasjon kan skrives som

$$a(t) = \frac{u\beta}{m_0 + \beta t} - g.$$

Bestem akselerasjonen ved $t = 0$. Bestem også akselerasjon og hastighet ved slutten av trinn 1, dvs ved $t = t_f$.

d) Det oppgis at dersom $|x| \ll 1$, er det en god tilnærmelse å erstatte brøken $1/(1+x)$ med polynomet $1-x$. (Prøv for eksempel med $x = -0.01$.) Bruk Rottmann til å verifisere at $1/(1+x) \simeq 1-x$ når $|x| \ll 1$. Bruk deretter denne opplysningen til å vise at

$$a_{\text{lin}}(t) = a(0) - \frac{u\beta^2}{m_0^2} t$$

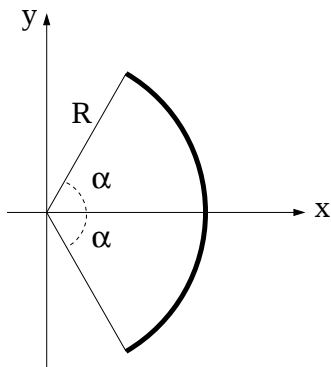
er en god tilnærmelse for $a(t)$ så lenge $t \ll m_0/(-\beta)$. Ta utgangspunkt i MATLAB-programmet rakett.m og modifier linjene 25 og 48 slik at du får plottet $a(t)$ og $a_{\text{lin}}(t)$ i samme figur, for $0 < t < t_f$. Anslå på øyemål ved hvilket tidspunkt $a_{\text{lin}}(t)$ begynner å bli en "mindre god" tilnærmelse for $a(t)$. Modifier videre linje 27 slik at du får plottet $v(t)$ i en annen figur.

e) Ekstra: Hvor høyt, h_f , kommer raketten i løpet av dette første oppskytingstrinnet? Raketten trekkes mot jorda med gravitasjonskraften

$$F_G = \frac{GMm}{r^2},$$

der G er gravitasjonskonstanten, M er jordmassen, m er rakettmassen og r er avstanden mellom raketten og jordas sentrum. Anta at jorda er kuleformet med radius $R = 6.37 \cdot 10^3$ km. Hvis du har regnet riktig, har du kommet fram til at h_f er i underkant av 60 km. Bruk disse verdiene til å anslå hvor stor feil du har gjort underveis i dine regninger ved å bruke den konstante verdien 9.81 m/s^2 for tyngdens akselerasjon.

Oppgave 4: Tyngdepunkt



a) En tynn, jevntykk bøyle er en del av en sirkel og har sektorvinkel 2α , som vist i figuren. Sirkelradien er R . Vis at tyngdepunktet er

$$X = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Hva blir resultatet for $\alpha = \pi$ og $\alpha \rightarrow 0$? Er svarene rimelige?

b) Bøylen erstattes av en sirkelsektor (dvs ei tynn, jevntykk skive) med samme åpningsvinkel 2α og radius R . Vis at tyngdepunktet er

$$X = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Hva blir resultatet for $\alpha = \pi$ og $\alpha \rightarrow 0$? Er svarene rimelige?

TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Øving 5.

Oppgave 1: Parry People Movers

Energien i en tung roterende skive ("flywheel"; svinghjul) kan utnyttes til å drive en trikk eller buss framover og oppover, som et alternativ til eksterne strømførende ledninger, bensin eller gass. I en *Parry People Movers* trikk benyttes kompakte stålskiver på 500 kg, diameter 1 m, og rotasjonshastighet opp mot 2500 rpm ("revolutions per minute"). I spørsmålene nedenfor antar vi maksimal rotasjonshastighet, der det er relevant.



<http://www.parrypeoplemovers.com/products.htm>

a) Hva er svinghjulets treghetsmoment I_0 mhp hjulets sylinderakse (dvs en akse sammenfallende med akslingen)?

- A) 62.5 kg m^2 B) $62.5 \cdot 10^3 \text{ kg m}^2$ C) $62.5 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ D) $62.5 \cdot 10^5 \text{ kg m}^2$

b) Hva er svinghjulets omløpstid (periode) ?

- A) 2.4 s B) 0.24 s C) 24 ms D) 24 μs

c) Hva er svinghjulets vinkelhastighet?

- A) 0.417 s^{-1} B) 2.62 s^{-1} C) 41.7 s^{-1} D) 262 s^{-1}

d) Hva er svinghjulets kinetiske energi?

- A) 0.59 Wh B) 0.59 kWh C) 59 Wh D) 59 kWh

e) Hva er svinghjulets dreieimpuls?

- A) 4.61 Js B) 16.4 Js C) 4.61 kJs D) 16.4 kJs

Oppgave 2: Idrett og treghetsmoment

(Bruk resultatene i ekstraoppgaven side 4. Slå opp tallverdier eller gjør rimelige estimater.)

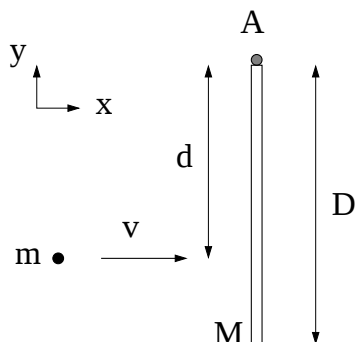
a) Hva er treghetsmomentet til en bordtennisball mhp en akse gjennom CM?

- A) $7.2 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$ B) $7.2 \cdot 10^{-7} \text{ kg m}^2$ C) $7.2 \cdot 10^{-9} \text{ kg m}^2$ D) $7.2 \cdot 10^{-11} \text{ kg m}^2$

b) Hva er treghetsmomentet til ei friidrettskule (for menn) mhp en akse gjennom CM?

- A) 10 kg m^2 B) 1.0 kg m^2 C) 0.10 kg m^2 D) 0.010 kg m^2

Oppgave 3: Kollisjon mellom tynn stav og lita kule



En tynn stav med lengde D og masse M kan rotere friksjonsfritt om sin ene ende (A). Ei kule med masse m og hastighet $\mathbf{v}$ kolliderer fullstendig uelastisk med staven i avstand d fra A. Kula kan her regnes som en punktmasse.

a) Hva er treghetsmomentet I til systemet stav + kule etter sammenstøtet, mhp aksen gjennom A (normalt planet)?

- A) $md^2 + MD^2/3$ B) $(m + M)D^2/3$
C) $md^2 + MD^2/12$ D) $(m + M)D^2/12$

b) Hva er systemets impuls $\mathbf{p}_i$ før sammenstøtet?

- A) 0 B) $mv\hat{x}$ C) $(m + M)v\hat{x}$ D) $(m + M)v(d/D)\hat{x}$

c) Hva er systemets dreieimpuls $\mathbf{L}_i$ mhp A før sammenstøtet?

- A) 0 B) $mvd\hat{z}$ C) $(m + M)v d\hat{z}$ D) $(m + M)v(d + D)\hat{z}$

d) Hva er systemets dreieimpuls $\mathbf{L}_f$ mhp A umiddelbart etter sammenstøtet?

- A) 0 B) $mvd\hat{z}$ C) $(m + M)v d\hat{z}$ D) $(m + M)v(d + D)\hat{z}$

e) Hva er systemets vinkelhastighet $\boldsymbol{\omega}$ umiddelbart etter sammenstøtet?

- A) $\hat{x} mvd/(md^2 + MD^2/12)$ B) $\hat{x} mvd/(md^2 + MD^2/3)$
C) $\hat{z} mvd/(md^2 + MD^2/12)$ D) $\hat{z} mvd/(md^2 + MD^2/3)$

f) Hva er systemets impuls $\mathbf{p}_f$ umiddelbart etter sammenstøtet?

- A) $\mathbf{p}_i \cdot (1 + MD/2md)/(1 + MD^2/3md^2)$ B) $\mathbf{p}_i \cdot (1 - MD/2md)/(1 - MD^2/3md^2)$
 C) $\mathbf{p}_i \cdot (1 + MD/md)/(1 + MD^2/7md^2)$ D) $\mathbf{p}_i$

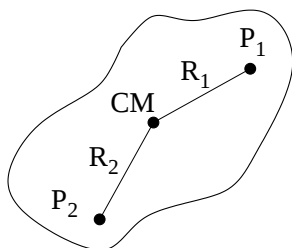
g) For hvilken verdi av d er $p_f = p_i$?

- A) Alltid B) $D/3$ C) $2D/3$ D) D

h) Hva er $|\Delta K/K_i| = |(K_f - K_i)/K_i|$, dvs relativ endring i systemets kinetiske energi i sammenstøtet?

- A) $1/(1 + 3md^2/MD^2)$ B) $1/(1 - 3md^2/MD^2)$ C) $1 + 3md^2/MD^2$ D) $1 - 3md^2/MD^2$

Oppgave 4: Mer om I og L



a) For legemet i figuren er $R_1 = R_2$, og CM angir tyngdepunktet. Tregghetsmomentene om parallelle akser gjennom CM, P_1 og P_2 er hhv I_0 , I_1 og I_2 . (Punktene CM, P_1 og P_2 ligger alle i papirplanet, og de tre aksene står normalt på papirplanet.) Da er

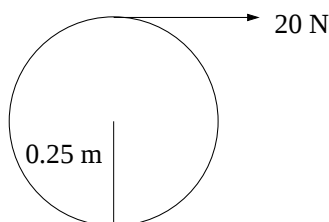
- A) $I_0 = I_1 = I_2$.
 B) $I_0 > I_1 = I_2$.
 C) $I_0 < I_1 = I_2$.
 D) $I_0 < I_1 < I_2$.



b) Du kjører en liten personbil rett østover fra Trondheim og holder omtrent fartsgrensen på 90 km/h. Hva er da bilens dreieimpuls relativt Oslo sentrum, sånn omtrent, angitt i SI-enheter?

- A) Eksakt null.
 B) 10^5 .
 C) 10^{10} .
 D) 10^{20} .

<http://www.kaosdesign.no/photogallery.htm>



c) Ei tynn, masseløs snor er trukket rundt en slipestein med radius 0.25 m. Steinen kan rotere friksjonsfritt om symmetriaksen. En konstant kraft på 20 N i snora får steinen til å øke vinkelhastigheten fra null til 60 rad/s på 12 sekunder. Da er slipesteinens tregghetsmomentet, i enheten kg m^2 ,

- A) 1.00.
 B) 3.00.
 C) 5.00.
 D) 7.00.

Ekstraoppgave: I_0 for kuleskall og kompakt kule

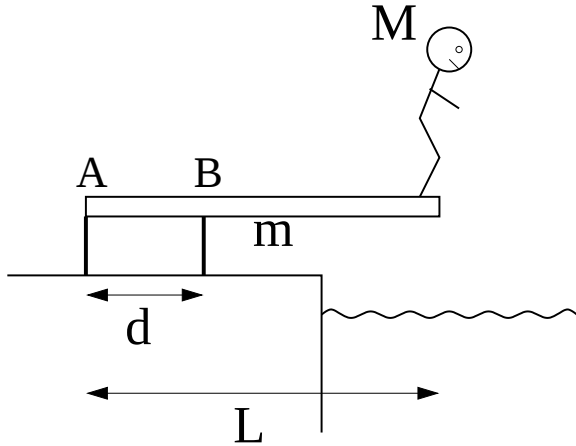
Vis at $I_0 = 2MR^2/3$ for et tynt kuleskall og at $I_0 = 2MR^2/5$ for ei kompakt kule.

Tips, kuleskall: Del opp kuleskallet i tynne ringer med omkrets $2\pi R \sin \theta$ og "bredde" $R d\theta$, dvs masse $dm = M dA/A = M \cdot 2\pi R \sin \theta \cdot R d\theta / 4\pi R^2$, og "legg sammen" (dvs integrer). Tegn figur! Du kan få bruk for $\sin^3 x = (3/4) \sin x - (1/4) \sin 3x$.

Tips, kompakt kule: Del opp kula i tynne kuleskall med radius r , tykkelse dr , og dermed masse $dm = M dV/V = M \cdot 4\pi r^2 dr / (4\pi R^3/3)$, og "legg sammen" (dvs integrer). Tegn figur!

TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Øving 6.

Oppgave 1: Stupebrett



En stuper med masse M står på kanten av et stupebrett med lengde L og masse m . Stupebrettet er festet til to støtter som vist i figuren. Støttene står en avstand d fra hverandre. Bruk A som referansepunkt.

a) Hvor stor kraft F_B virker på stupebrettet i festet til støtten i B?

- A) $gd(M - m/2)/L$ B) $gd(M + m/2)/L$
 C) $gL(M + m/2)/d$ D) $gd(M + m/2)/d$

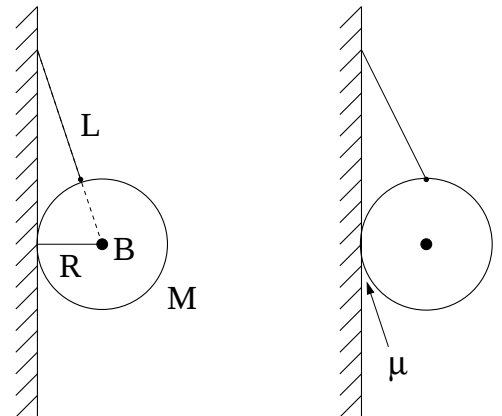
b) Hvor stor kraft F_A virker på stupebrettet i festet til støtten i A?

- A) $F_B + (M - m)g$ B) $F_B + (M + m)g$ C) $F_B - (M - m)g$ D) $F_B - (M + m)g$

Oppgave 2: Ball på vegg

a) En ball med masse M og radius R henger mot en vertikal vegg. Ei snor med lengde L er festet til vegg og ballen som vist i figuren til venstre. Anta i første omgang at det ikke er friksjon mellom vegg og ballen. Hva er da snordraget S og normalkraften N fra vegg?

- | | |
|---|--------------------------------------|
| A) $S = Mg \frac{L + R}{\sqrt{L(L + 2R)}}$ | $N = Mg \frac{R}{\sqrt{L(L + 2R)}}$ |
| B) $S = Mg \frac{L + R}{\sqrt{R(L + 2R)}}$ | $N = Mg \frac{R}{\sqrt{R(L + 2R)}}$ |
| C) $S = Mg \frac{2L + R}{\sqrt{L(L + 2R)}}$ | $N = Mg \frac{2R}{\sqrt{L(L + 2R)}}$ |
| D) $S = Mg \frac{2L + R}{\sqrt{R(L + 2R)}}$ | $N = Mg \frac{2R}{\sqrt{R(L + 2R)}}$ |



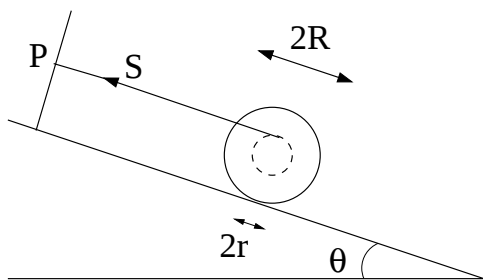
(Tips 1: Forlengelsen av snora må passere gjennom ballens tyngdepunkt B. Hvorfor?)

Tips 2: Vurder om uttrykkene for S og N er rimelige hvis snora er veldig lang, $L \gg R$.)

b) Hvor stor må den statiske friksjonskoeffisienten μ (minst) være for at ballen skal kunne henge med snor-festet på toppen, som vist i figuren til høyre?

- A) $\mu \geq \tan \alpha$ B) $\mu \geq 1$ C) $\mu \geq R/L$ D) $\mu \geq 0.5$

Oppgave 3: Sluresnelle



Ei snelle – to hjul med radius R forbundet med en aksling med radius r – ligger på et skråplan med helningsvinkel θ . Ei snor er vikla om akslingen, og strukket parallellt med skråplanet til et feste-punkt P på oversiden av det lille hjulet. Snellas treghetsmoment om akslingen er I , massen er M , statisk friksjonskoeffisient mot skråplanet er μ_s , og kinetisk friksjonskoeffisient er μ_k , der $\mu_k < \mu_s$.

a) Hva er maksimal helningsvinkel θ_0 uten at snella glir (slurer) nedover skråplanet?

A) $\theta_0 = \arctan [\mu_s (1 + R/r)]$ B) $\theta_0 = \arccos [\mu_s (1 + R/r)]$

C) $\theta_0 = \arctan [\mu_s (1 + r/R)]$ D) $\theta_0 = \arccos [\mu_s (1 + r/R)]$

b) Hva er snordraget S når $\theta = \theta_0$?

A) $S = Mg\mu_s(r/R) \cos \theta_0$ B) $S = Mg\mu_s(r/R) \sin \theta_0$

C) $S = Mg\mu_s(R/r) \cos \theta_0$ D) $S = Mg\mu_s(R/r) \sin \theta_0$

c) Anta nå at helningsvinkelen holdes fast på en vinkel θ som er noe større enn θ_0 . Hva blir snellas aksele-rasjon a nedover skråplanet?

A) $a = g \frac{\sin \theta - \mu_k \cos \theta (1 + R/r)}{1 + I/Mr^2}$

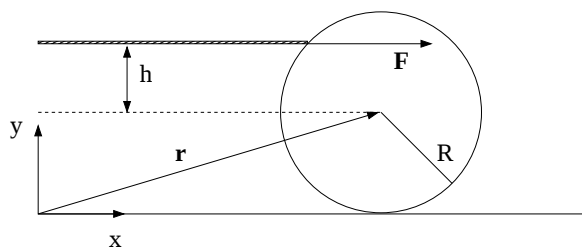
B) $a = g \frac{\cos \theta - \mu_k \sin \theta (1 - r/R)}{1 + I/Mr^2}$

C) $a = g \frac{\sin \theta - \mu_k \cos \theta (1 - r/R)}{1 + I/Mr^2}$

D) $a = g \frac{\cos \theta - \mu_k \sin \theta (1 + R/r)}{1 + I/Mr^2}$

Oppgave 4: Elementær snooker

Snooker er en krevende sport, og fordrer at spilleren har et godt praktisk grep på kulers tyngdepunksbevegelse og rotasjon, friksjonskreftenes rolle, samt resultatet av elastiske støt mellom kuler. Her skal vi ta for oss en "enkel" problemstilling som likevel er en god illustrasjon av den relativt subtile mekanikk som kommer til anvendelse på snookerbordet. Oppgaven hører ikke til de enkleste, men den er lærerik, for fysikkstudenter såvel som snookerspillere.



Situasjonen vi skal se på er som følger: Snookerkula med masse M og radius R får et kraftig, men kortvarig støt av en horisontal kø. Vi legger et koordinatsystem xyz med origo på bordflata og xy -planet lik vertikalplanet gjennom kulas massesenter.

Køen er rettet i x -retning og treffer kula (som ligger i ro) i xy -planet med en kraft F i x -retning. Treffpunktet er i høyden h over massesenteret (eller under, hvis $h < 0$), se figuren. Kinetisk friksjonskoeffisient mellom snookerkula og bordflata er μ_k .

Støtet er så kraftig og er over på så kort tid at vi under selve støtet kan neglisjere innvirkningen av friksjonskraften fra snookerbordet. Etter støtet derimot, vil friksjonskraften f spille en viktig rolle for kulas fortsatte bevegelse. Vi antar for enkelhets skyld at kraften F er konstant i støtets korte varighet Δt .

a) Det kortvarige støtet gir kula en impuls $\Delta p = F \Delta t$, som resulterer i at massesenteret får starthastigheten V_0 . Det kortvarige støtet gir også kula en dreieimpuls $\Delta L = \tau \Delta t$, som resulterer i at kula starter opp med vinkelhastigheten ω_0 . Hva blir sammenhengen mellom V_0 og ω_0 ?

- A) $V_0 = \frac{2h^2}{5R} \cdot \omega_0$
- B) $V_0 = \frac{5h^2}{2R} \cdot \omega_0$
- C) $V_0 = \frac{5R^2}{2h} \cdot \omega_0$
- D) $V_0 = \frac{2R^2}{5h} \cdot \omega_0$

b) Hva er betingelsen for at vi allerede fra første øyeblikk får ren rulling? Dvs, i hvilken høyde h_0 må køen treffe snookerkula?

- A) $h_0 = R/5$ B) $h_0 = 2R/5$ C) $h_0 = 3R/5$ D) $h_0 = 4R/5$

c) For andre verdier enn h_0 av treffhøyden h (også kalt "støtparameteren") vil snookerkula i begynnelsen gli på bordet samtidig som den roterer. Hvilken absoluttverdi og retning vil friksjonskraften f , fra bordet på kula, ha i denne fasen, dersom $h > h_0$?

- A) $f = \mu_k Mg$ mot venstre. B) $f = \mu_k Mg$ mot høyre.
- C) $f = 2\mu_k Mg/5$ mot venstre. D) $f = 2\mu_k Mg/5$ mot høyre.

Etter at støtet er overstått vil kulas totale dreieimpuls $\mathbf{L} = M(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{V} + I_0 \boldsymbol{\omega}$ være bevart, *dersom* vi velger referansepunktet $\mathbf{r}_0$ i et punkt på skjæringslinja mellom bordets overflate og vertikalplanet gjennom kulas massesenter (dvs langs x -aksen i figuren). Enkleste valg er i origo, dvs $\mathbf{r}_0 = 0$, se figuren. (Hvorfor får vi dreieimpulsbevarelse med dette valget?) Vi antar at bare z -komponenten til $\mathbf{L}$ er aktuell her, dvs ingen rotasjon om andre akser.

d) Pga friksjonen mellom bord og kule vil kulas bevegelse etter en viss tid gå over til ren rulling. Hva blir massesenterhastigheten V_r til kula etter at ren rulling har inntrådt? (Tips: Bruk bevaring av L_z til å finne V_r .)

A) $V_r = \frac{7}{5} \left(1 + \frac{h}{R}\right) V_0$

B) $V_r = \frac{7}{5} \left(1 + \frac{R}{h}\right) V_0$

C) $V_r = \frac{5}{7} \left(1 + \frac{h}{R}\right) V_0$

D) $V_r = \frac{5}{7} \left(1 + \frac{R}{h}\right) V_0$

e) Anta at køen treffer kula i en høyde $h > h_0$. Hvor lang tid t_r tar det da fra støtet til snookerkula ruller uten å gli?

A) $t_r = \frac{2V_0}{7\mu_k g} \left(\frac{5h}{2R} - 1\right)$

B) $t_r = \frac{2V_0}{7\mu_k g} \left(\frac{7h}{2R} - 1\right)$

C) $t_r = \frac{2V_0}{5\mu_k g} \left(\frac{5h}{2R} - 1\right)$

D) $t_r = \frac{2V_0}{5\mu_k g} \left(\frac{7h}{2R} - 1\right)$

(Hvis betingelsen for ren rulling er oppfylt fra første øyeblikk, skrumper denne "en viss tid" inn til null, og $V_r = V_0$. Dette kan du jo ha som en kontroll av svaret.)

Ekstraspørsmål.

4f) Bestem energitapet $\Delta K = K_r - K_0$.

4g) Bestem forskjøvet strekning x_r langs underlaget i tiden t_r , dvs fra støtet til ren rulling oppnås.

TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Øving 7.

Svingninger

En kloss med masse m er festet til ei (masseløs) fjær med fjærkonstant k . Fjæra er festet til en vegg i sin venstre ende. Klossen kan gli uten friksjon på et horisontalt underlag. Bevegelsen blir startet (ved $t = 0$) ved å dra klossen fra likevektsposisjonen $x = 0$ mot høyre til posisjon x_0 og gi den en hastighet v_0 mot høyre. Klossen utfører deretter harmoniske svingninger beskrevet ved $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$ der $\omega_0 = 2\pi/T$ er vinkelfrekvensen, T er perioden og ϕ er en fasekonstant.

a) Hva er perioden T for denne harmoniske svingningen?

- A) $2\pi\sqrt{k/m}$ B) $\sqrt{k/m}$ C) $2\pi\sqrt{m/k}$ D) $\sqrt{m/k}$

b) Hva er amplituden A for denne harmoniske svingningen?

- A) $\sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2}$ B) $x_0 / \cos(\arctan(v_0/x_0\omega_0))$
C) Både A og B er riktige svar D) Verken A eller B er riktige svar

c) Hva er fasekonstanten ϕ for denne harmoniske svingningen?

- A) $-\arctan(v_0/x_0\omega_0)$ B) $\arccos(1/\sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2})$
C) Både A og B er riktige svar D) Verken A eller B er riktige svar

d) Hva er systemets totale mekaniske energi E ?

- A) $kx_0^2/2$ B) $mv_0^2/2$ C) $kx_0^2/2 + mv_0^2/2$ D) 0

e) Vi kunne alternativt ha skrevet løsningen på formen $x(t) = B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t$. Hva blir da de to koeffisientene B og C ?

- A) $B = v_0/\omega_0$ og $C = x_0$ B) $B = x_0$ og $C = v_0/\omega_0$ C) $B = C = x_0$ D) $B = C = v_0/\omega_0$

f) Hva blir svingebevegelsens maksimale utsving og maksimale hastighet dersom $m = 100$ g, $k = 10$ N/m, $x_0 = 1.0$ cm og $v_0 = 10$ cm/s.

- A) 1.4 cm og 14 cm/s B) 1.4 m og 14 m/s
C) 14 m og 1.4 m/s D) 14 cm og 1.4 cm/s

g) Svingesystemet dreies 90 grader slik at massen m henger vertikalt i tyngdefeltet. Med hvilken vinkelfrekvens ω vil massen nå svinge opp og ned?

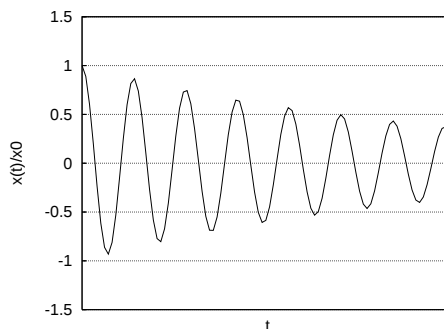
- A) $\omega = \omega_0$ B) $\omega = 2\omega_0$ C) $\omega = 3\omega_0$ D) $\omega = 4\omega_0$

h) Figuren viser utsvinget

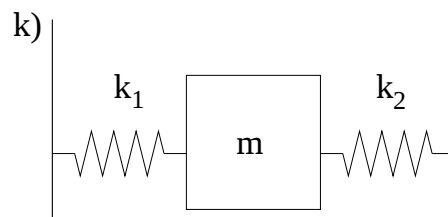
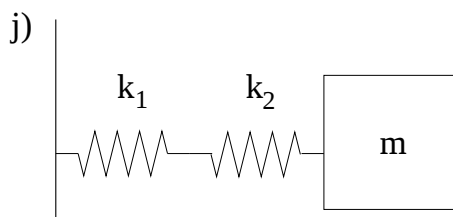
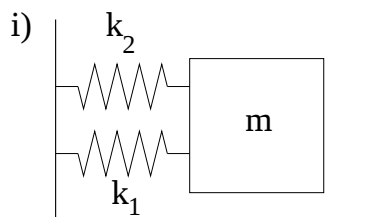
$$x(t) = x_0 e^{-t/\tau} \cos \omega t,$$

eller rettere sagt $x(t)/x_0$, for en dempet harmonisk svingning. Omtrent hvor stort er produktet $\omega\tau$ mellom vinkelfrekvensen og den "karakteristiske tiden" for dempingsforløpet?

- A) 0.022
- B) 1.7
- C) 14
- D) 45



Et enkelt masse-fjær-svingesystem med masse m og fjærstivhet k har som kjent vinkelfrekvens $\omega = \sqrt{k/m}$. Sett opp "N2" for de tre svingesystemene vist i figuren nedenfor og finn vinkelfrekvensen for hvert av systemene uttrykt ved $\omega_1 = \sqrt{k_1/m}$ og $\omega_2 = \sqrt{k_2/m}$. I alle tilfellene er fjærene masseløse, og det er ingen friksjon.



i) $\omega_i = \dots$

- A) $\omega_1 + \omega_2$
- B) $\omega_1 \omega_2 / \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$
- C) $\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$
- D) $\sqrt{\omega_1 \omega_2}$

j) $\omega_j = \dots$

- A) $\omega_1 + \omega_2$
- B) $\omega_1 \omega_2 / \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$
- C) $\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$
- D) $\sqrt{\omega_1 \omega_2}$

k) $\omega_k = \dots$

- A) $\omega_1 + \omega_2$
- B) $\omega_1 \omega_2 / \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$
- C) $\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$
- D) $\sqrt{\omega_1 \omega_2}$

TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Øving 8.

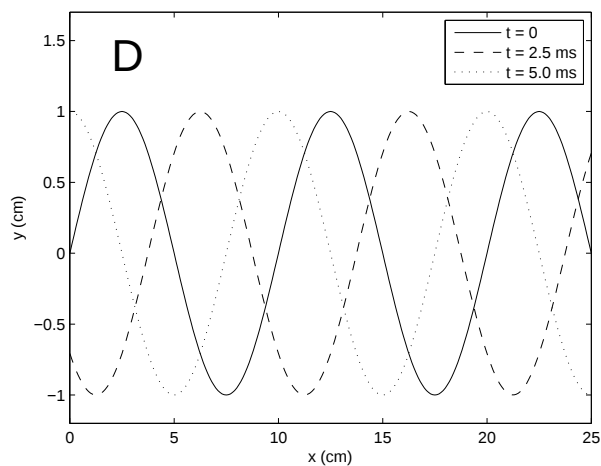
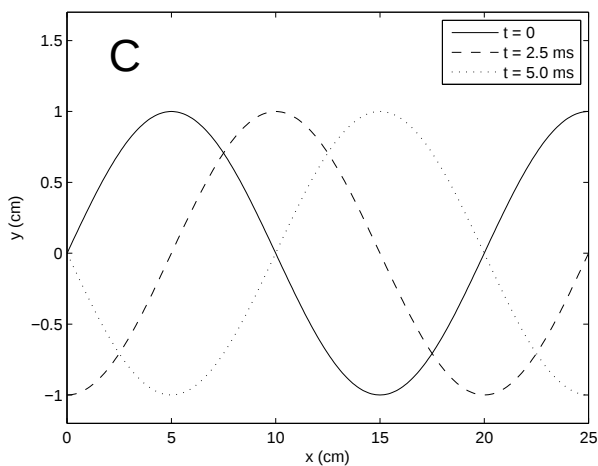
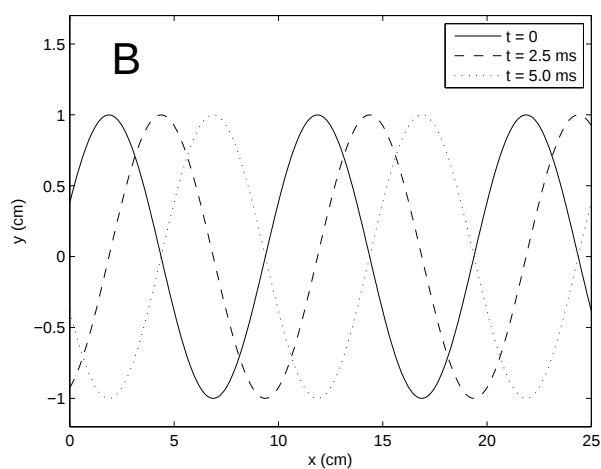
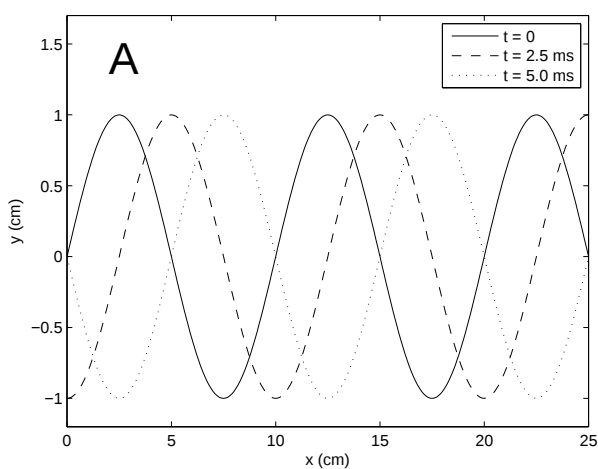
Oppgave 1

En bølge forplanter seg på en streng utstrakt horisontalt (i x -retning). Strengen har kun vertikale utsving (i y -retning). Vi antar at strengen er uendelig lang og at utsvinget til strengen (overalt og til alle tider) er beskrevet ved:

$$y = A \sin(kx - \omega t)$$

der $A = 1.0$ cm, $k = 2\pi/10$ cm⁻¹ og $\omega = 200\pi$ s⁻¹.

a) Hvilken figur viser utsvinget y som funksjon av x for $0 \leq x \leq 25$ cm, for $t = 0$, $t = 2.5$ og $t = 5.0$ ms?



b) I hvilken retning forplanter bølgen seg?

A) I positiv x -retning. B) I negativ x -retning. C) I positiv y -retning. D) I negativ y -retning.

c) For hvilke tider t vil utslaget y (for alle verdier av x) være det samme som for $t = 0$?

A) $t = 2.5n$ ms B) $t = 5.0n$ ms C) $t = 7.5n$ ms D) $t = 10n$ ms ($n = 1, 2, 3, \dots$)

d) Hva er perioden T for denne bølgen?

- A) $T = 2.5$ ms B) $T = 5.0$ ms C) $T = 7.5$ ms D) $T = 10$ ms

e) Hva er bølgelengden λ for denne bølgen?

- A) $\lambda = 1$ cm B) $\lambda = 2$ cm C) $\lambda = 10$ cm D) $\lambda = 25$ cm

f) Hva er bølgehastigheten v ? (Kalles også fasehastigheten.)

- A) $v = 5$ cm/s B) $v = 10$ cm/s C) $v = 5$ m/s D) $v = 10$ m/s

g) Hva er maksimal hastighet $v_p^{\max}$ til et strengement? (Hastigheten v_p kalles ofte partikkelhastighet.)

- A) 2.2 cm/s B) 6.3 cm/s C) 2.2 m/s D) 6.3 m/s

h) Hva er maksimal akselerasjon $a^{\max}$ til et strengement?

- A) 3.9 km/s² B) 3.9 m/s² C) 3.9 cm/s² D) 3.9 mm/s²

i) Dersom $y = A \cos(kx - \omega t + \phi)$ skal beskrive *eksakt* den samme bølgen som $y = A \sin(kx - \omega t)$, hvilken verdi må ϕ ha?

- A) $\phi = \pi$ B) $\phi = -\pi$ C) $\phi = \pi/2$ D) $\phi = -\pi/2$

Oppgave 2

a) Summen $y_3 = y_1 + y_2$ av to harmoniske bølger med samme amplitude, frekvens og bølgelengde beskrevet ved $y_1 = A \cos(kx - \omega t + \phi_1)$ og $y_2 = A \cos(kx - \omega t + \phi_2)$ er også en harmonisk bølge beskrevet ved $y_3 = A_3 \cos(kx - \omega t + \phi_3)$. Hva er A_3 og ϕ_3 uttrykt ved A , ϕ_1 og ϕ_2 ? (Hint: $\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$)

- A) $A_3 = 2A \cos \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$, $\phi_3 = \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}$ B) $A_3 = 2A \cos \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}$, $\phi_3 = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$

- C) $A_3 = A \cos \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$, $\phi_3 = \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}$ D) $A_3 = A \cos \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}$, $\phi_3 = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$

b) Vi lar nå faseforskjellen mellom de to bølgene y_1 og y_2 , dvs $\Delta\phi \equiv \phi_1 - \phi_2$, variere. Hvilke verdier av $\Delta\phi$ gir henholdsvis maksimalverdi og minimalverdi for $|A_3|$?

- A) $|A_3|^{\max}$ for $\Delta\phi = n\pi/2$, $|A_3|^{\min}$ for $\Delta\phi = (2n+1)\pi$
B) $|A_3|^{\max}$ for $\Delta\phi = 2\pi n$, $|A_3|^{\min}$ for $\Delta\phi = (2n+1)\pi$
C) $|A_3|^{\max}$ for $\Delta\phi = n\pi/2$, $|A_3|^{\min}$ for $\Delta\phi = (n/3+1)\pi$
D) $|A_3|^{\max}$ for $\Delta\phi = 2\pi n$, $|A_3|^{\min}$ for $\Delta\phi = (n/3+1)\pi$
($n = 0, 1, 2, \dots$)

c) Hva blir $|A_3|^{\max}$ og $|A_3|^{\min}$?

- A) $|A_3|^{\max} = 2A$, $|A_3|^{\min} = 0$ B) $|A_3|^{\max} = 2A$, $|A_3|^{\min} = A/2$
C) $|A_3|^{\max} = A$, $|A_3|^{\min} = 0$ D) $|A_3|^{\max} = A$, $|A_3|^{\min} = A/4$

Oppgave 3

Den venstre enden av en (lang) streng strukket i x -retning tvinges til å vibrere normalt på strengens utstrekning (dvs såkalt transversalt) med et utsving gitt ved

$$y = A \cos \omega t$$

der $A = 0.10$ m og $\omega = 2\pi f$ med $f = 1.0$ Hz. Strekket i strengen er $S = 8.5$ N, og masse pr lengdeenhet er $\mu = 28$ g/m. Anta at svingningen gitt ovenfor resulterer i at en rent harmonisk transversal bølge forplanter seg i positiv x -retning på strengen. Velg $x = 0$ ved strengens venstre ende, og anta at strengen er så lang at du ikke får noen reflektert bølge mens du gjør eksperimentet.)

a) Hva er bølgehastigheten v på strengen?

- A) 17 m/s B) 49 cm/s C) 6 cm/s D) 5.8 m/s

b) Hva er bølgelengden til bølgen som forplanter seg langs strengen?

- A) 17 m B) 49 cm C) 6 cm D) 5.8 m

c) Hva blir bølgehastigheten dersom strengens venstre ende svinger tre ganger så fort (dvs med $f = 3.0$ Hz)?

- A) 17 m/s B) 49 cm/s C) 6 cm/s D) 5.8 m/s

d) Hva blir bølgelengden dersom strengens venstre ende svinger tre ganger så fort?

- A) 17 m B) 49 cm C) 6 cm D) 5.8 m

e) Med frekvensen 1.0 Hz, hva blir utsvinget y til et punkt på strengen som ligger i posisjonen $x = 1.0$ m? (Målt i meter, som funksjon av tiden t , målt i sekunder.)

- A) $y(1.0, t) = 0.10 \cos(0.37 + 6.28t)$ B) $y(1.0, t) = 0.10 \cos(0.37 - 6.28t)$
C) $y(1.0, t) = 0.10 \cos(0.37 + 1.57t)$ D) $y(1.0, t) = 0.10 \cos(0.37 - 1.57t)$

f) Med frekvensen 1.0 Hz, hva blir utsvinget y til et punkt på strengen som ligger i posisjonen $x = 5.0$ m? (Målt i meter, som funksjon av tiden t , målt i sekunder.)

- A) $y(5.0, t) = 0.10 \cos(1.85 + 6.28t)$ B) $y(5.0, t) = 0.10 \cos(1.85 - 6.28t)$
C) $y(5.0, t) = 0.10 \cos(1.85 + 1.57t)$ D) $y(5.0, t) = 0.10 \cos(1.85 - 1.57t)$

g) Hvor stor er faseforskjellen mellom utsvinget i disse to posisjonene (dvs 1.0 og 5.0 m fra svingekilden)?

- A) 12° B) 49° C) 83° D) 117°

Oppgave 4

En gaussformet bølgepuls

$$\xi(x, t) = \xi_0 \exp \left[-\frac{(x - vt)^2}{a^2} \right]$$

vandrer med hastighet v langs en (uendelig lang) streng med massetetthet μ [kg/m] og strekk-kraft S [N]. Størrelsen $\xi(x, t)$ representerer det transversale utsvinget (i forhold til likevekt) ved tidspunkt t for den biten av strengen som befinner seg i posisjon x . Bølgens maksimale utsving ξ_0 er lite (dvs: i forhold til bølgens utstrekning, som er av størrelsesorden a).

a) Hvorfor kan vi være sikre på at $\xi(x, t)$ virkelig *er* en mulig bølgepuls langs en slik streng?

- A) $\xi(x, t)$ er to ganger deriverbar og har riktig avhengighet av x og t .
- B) $\xi(x, t)$ har endelig utstrekning i rommet.
- C) $\xi(x, t)$ er symmetrisk.
- D) $\xi(x, t)$ avtar tilstrekkelig raskt mot null for store verdier av x og t .

b) I hvilken retning propagerer bølgen?

- A) I positiv x -retning.
- B) I negativ x -retning.
- C) I positiv y -retning.
- D) I negativ y -retning.

c) Hva er bølgepulsens hastighet v ?

- A) $v = a \cdot t$
- B) $v = \sqrt{S/\mu}$
- C) $v = \xi_0/t$
- D) $v = a/t$

d) Hva blir (den totale) energien E assosiert med bølgepulsens?

- A) $E = \pi \mu v^2 \xi_0^2 / \sqrt{2a}$
- B) $E = \mu v^2 a / 2$
- C) $E = \sqrt{\pi} \mu v^2 \xi_0^2 / \sqrt{2a}$
- D) $E = 42$

Tips til d): Ta utgangspunkt i at bølgens energi pr lengdeenhet er

$$\varepsilon(x, t) = \mu v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2$$

som utledet i forelesningene. Dermed er $\varepsilon(x, t) dx$ bølgens energiinnhold mellom x og $x + dx$. Det oppgis her følgende integral:

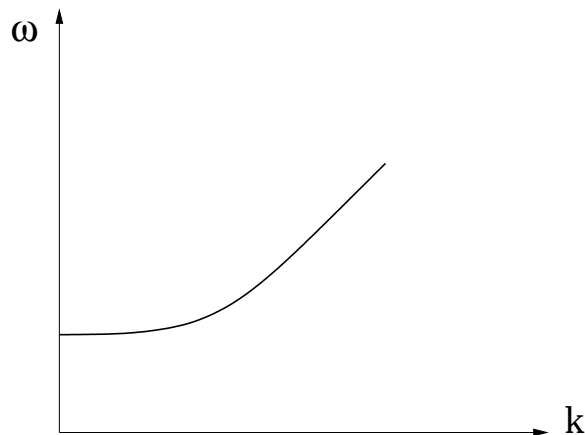
$$\int_{-\infty}^{\infty} \beta^2 e^{-\beta^2} d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Øving 9.

Oppgave 1

a) Figuren viser sammenhengen mellom vinkelfrekvensen ω og bølgetallet k for en bestemt type bølger. Hvilket utsagn er da korrekt?

- A) Fasehastigheten er her den samme uansett bølgelengde.
- B) Fasehastigheten er her størst for korte bølgelengder.
- C) Fasehastigheten er her størst for lange bølgelengder.
- D) Fasehastigheten øker alltid med økende frekvens.



b) Transversale bølger på en streng med strekk-kraft S forplanter seg med bølgehastighet v . En *liten* endring ΔS i strekk-kraften fører da til en endring i bølgehastigheten lik

- A) $\Delta v = -v \Delta S / 2S$
- B) $\Delta v = v \Delta S / 2S$
- C) $\Delta v = v \Delta S / S$
- D) $\Delta v = -v \Delta S / S$

c) Transversale bølger på en streng med massetetthet μ forplanter seg med bølgehastighet v . En *liten* endring $\Delta \mu$ i massetettheten fører da til en endring i bølgehastigheten lik

- A) $\Delta v = -v \Delta \mu / 2\mu$
- B) $\Delta v = v \Delta \mu / 2\mu$
- C) $\Delta v = v \Delta \mu / \mu$
- D) $\Delta v = -v \Delta \mu / \mu$

d) To lydbølger har intensiteter som adskiller seg med 5 dB. Hva er da forholdet mellom intensitetene til de to bølgene?

- A) 5.00
- B) 3.16
- C) 1.78
- D) 1.05

e) To lydbølger har intensiteter som adskiller seg med 5 dB. Hva er da forholdet mellom trykk(-variasjons-)amplitudene til de to bølgene?

- A) 5.00
- B) 3.16
- C) 1.78
- D) 1.05

f) En høyttaler genererer halvkuleformede lydbølger med en (midlere) effekt på 0.2 W uniformt fordelt over alle (halvkulens) retninger. Hva er intensitetsnivået i en avstand 4 m foran høyttaleren?

- A) 62 dB
- B) 73 dB
- C) 82 dB
- D) 93 dB

Oppgave 2

Under en stille samtale på lesesalen, med en meters avstand mellom de to som deltar i samtalen, har lydbølgene en intensitet 10^{-9} W/m^2 . Vi antar for enkelhets skyld at vi kan betrakte lydbølgene som plane harmoniske bølger, slik at forskyvningen til luftmolekylene (midlere longitudinalt utsving fra likevekt) er gitt ved

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t).$$

La oss her kun se på bølger med en bestemt frekvens, f.eks $f = 1.0 \text{ kHz}$. Lufta har massetetthet $\rho = 1.29 \text{ kg/m}^3$ og bulkmodul $B = 1.42 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, og bølgehastigheten er $v = 330 \text{ m/s}$.

a) Hva er lydbølgens bølgelengde?

- A) 11 cm
- B) 22 cm
- C) 33 cm
- D) 44 cm

b) Hvor mange dB (desibel) tilsvarer den oppgitte intensiteten?

- A) -30 dB
- B) 0 dB
- C) 30 dB
- D) 60 dB

c) Omtrent hvor stor effekt mottar ørets trommehinne fra en slik lydbølge? (Tips: Gjør et overslag vedrørende trommehinnens areal.)

- A) ca 0.05 pW
- B) ca 50 pW
- C) ca 5 nW
- D) ca 5 μW

d) Hva er lydbølgens utsvingsamplitude ξ_0 ?

- A) 1.8 mm
- B) 0.22 μm
- C) 5.41 nm
- D) 0.34 nm

e) Hva er amplituden $\mathcal{P}_0$ til den tilhørende trykk(-variasjons-)bølgen $\Delta p(x, t) = \mathcal{P}_0 \cos(kx - \omega t)$?

- A) 4.5 nPa
- B) 0.9 mPa
- C) 4.5 Pa
- D) 90 Pa

f) Hva blir relativ trykkvariasjon $\mathcal{P}_0/p_0$, der p_0 er likevektstrykket (1 atm)?

- A) $9 \cdot 10^{-9}$
- B) $4 \cdot 10^{-6}$
- C) $2 \cdot 10^{-4}$
- D) 0.09

Oppgave 3

a) Harpestreng nr 16 har en lengde 370 mm og masse 0.2 g. Med strengen festet i begge ender er grunn-tonen en A med frekvens 440 Hz. Hva er da strammingen i strengen?

- A) 41.4 N
- B) 57.3 N
- C) 63.9 N
- D) 72.1 N

b) Hva er laveste resonansfrekvens i et (tynt) luftfylt rør som er 50 cm langt og åpent i begge ender? Lydhastigheten er 340 m/s.

- A) 340 Hz
- B) 410 Hz
- C) 540 Hz
- D) 680 Hz

c) Røret i oppgave b har også en resonansfrekvens lik 1360 Hz. Hvor mange knutepunkter har den tilhørende stående longitudinale utsvingsbølgen ξ (inne i røret)?

- A) 2
- B) 3
- C) 4
- D) 5

d) De stående bølgene på en vibrerende gitarstreng genererer lydbølger i lufta omkring. De stående bølgene på gitarstrengen og lydbølgene i lufta har samme

- A) bølgelengde
- B) hastighet
- C) amplitude
- D) frekvens

Oppgave 4

En jevntykk streng med masse M og lengde L er festet i den ene enden og roterer i horisontalplanet med en omløpsperiode T . Se bort fra luftmotstand og påvirkning av tyngdekraften, slik at strengen hele tiden peker rett ut fra festepunktet.

En bølgepuls genereres innerst på strengen og propagerer utover strengen. Forklar hvorfor tiden τ som bølgepuls bruker på å vandre hele strengens lengde L kun vil avhenge av omløpsperioden T . (Vandretiden er med andre ord uavhengig av strengens lengde.) Regn ut τ .

Tips: Finn først snordraget $S(r)$ i avstand r fra festepunktet. Videre vil du trolig få bruk for integralet

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

(som du forøvrig lett regner ut selv ved å substituere $x = a \sin \alpha$).

Fasitsvar på oppgave 4: $T/2\sqrt{2}$

TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Øving 10.

Oppgave 1. Dopplereffekt. Svevning. Interferens.

a) En ambulansesirene genererer en harmonisk lydbølge med frekvens 850 Hz. En sterk vind blåser i retning fra ambulansen og mot deg, med vindhastighet 25 m/s. Både du og ambulansen står stille. Hvilken frekvens hører du? (Lydhastigheten er 340 m/s.)

- A) 783 Hz B) 850 Hz C) 917 Hz D) 985 Hz

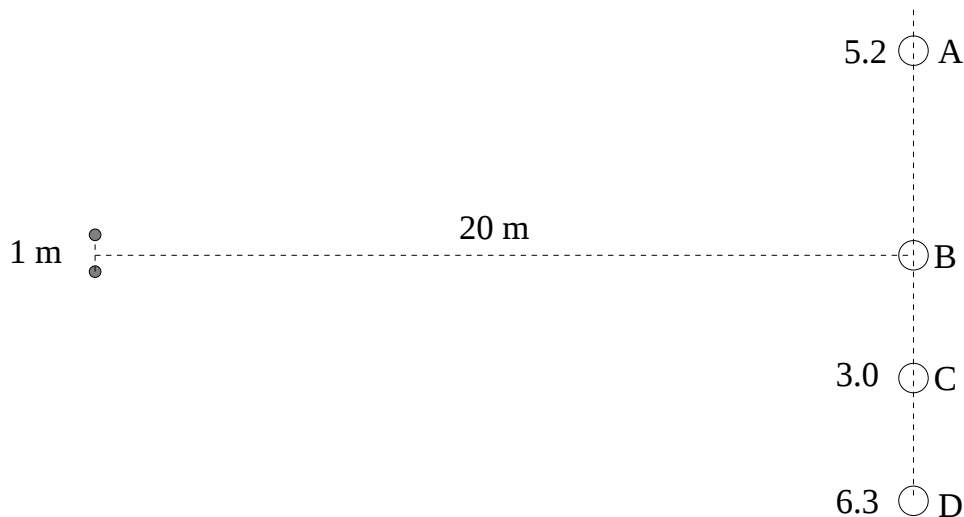
b) En flaggermus flyr med hastighet 10 m/s rett mot en plan vegg og sender ut ultralydssignaler med frekvens 100 kHz. Hvilken frekvens hører flaggermusen på ekkot (dvs den reflekterte lyden) fra veggen? (Veggen mottar og reflekterer med en og samme frekvens. Lydhastigheten er 340 m/s.)

- A) 120 kHz B) 106 kHz C) 93 kHz D) 81 kHz

c) Du har en stemmegaffel som genererer en 440 Hz tone. Når du slår på stemmegaffelen og A-tangenten på pianoet ditt samtidig, hører du lydmaksima med 1 sekunds mellomrom. Du kan da konkludere med at pianoets A-streng genererer en lydbølge med frekvens

- A) 438 Hz B) 441 Hz C) 438 eller 442 Hz D) 439 eller 441 Hz

d) To små kuleformede høyttalere er plassert 1 meter fra hverandre og sender ut kuleformede lydbølger i fase, med lik frekvens 3400 Hz. I avstand 20 m fra høyttalerne sitter Anne (A), Bjarne (B), Camilla (C) og Dag (D) på rekke og rad, som vist i figuren. Tallene angir de ulike personenes avstand fra senterlinjen. (Bjarne sitter på senterlinjen.) Lydhastigheten er 340 m/s. Hvem hører maksimal intensitet og hvem hører minimal intensitet?



- A) Bjarne hører max, resten hører min.
B) Guttene hører max, jentene hører min.
C) Guttene hører min, jentene hører max.
D) Anne og Dag hører max, Bjarne og Camilla hører min.

Oppgave 2. Termisk fysikk: Ideell gass. Volumutvidelse.

a) Hvor stor masse har lufta i soverommet ditt, sånn omtrent?

- A) ca 3 g B) ca 300 g C) ca 30 kg D) ca 3 tonn

b) Omtrent hvor mye etanol må du ha i "kula" nederst på et sprittermometer dersom 1 mm på søylen skal tilsvare 0.1°C ? Anta et sirkulært tverrsnitt på spritsøylen med diameter ca 0.4 mm. Relativ volumøkning for etanol er 0.1% når temperaturen øker med en grad. ($\beta = (\Delta V/V)/\Delta T = 0.001 \text{ K}^{-1}$)

- A) ca 1.3 mL B) ca 1.3 cL C) ca 1.3 dL D) ca 1.3 L

c) Hva er trykket dersom ett mol luft ved 20°C okkuperer et volum 24.0 L? (Anta at lufta kan betraktes som en ideell gass.)

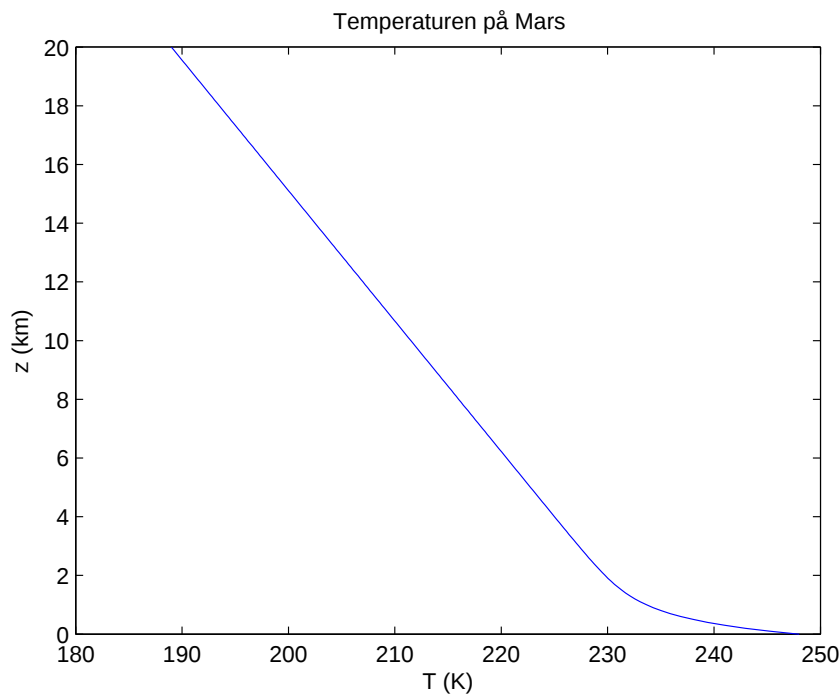
- A) 1 atm B) 3 atm C) 5 atm D) 7 atm

Oppgave 3. Atmosfæren på Mars

Temperaturmålinger i atmosfæren på planeten Mars kan med god tilnærmelse beskrives med funksjonen

$$T(z) = 234.0 - 2.25z + 14e^{-2z}.$$

Her er z høyde over bakkenivå, målt i enheten km, og T er absolutt temperatur. Oppgaven består i å beregne trykkprofilen $p(z)$ med utgangspunkt i temperaturprofilen $T(z)$.



a) Vis at tyngden av en luftsøyle mellom z og $z + dz$ medfører at trykket $p(z)$ varierer med høyden i henhold til ligningen

$$\frac{dp}{dz} = -\mu g.$$

Her er μ (den lokale) massetettheten, og g er tyngdens akselerasjon.

b) Anta at atmosfæren på Mars kan betraktes som en ideell gass og vis at massetettheten da kan skrives på formen

$$\mu(z) = \frac{p(z)m}{RT(z)}.$$

Her er m atmosfærens midlere molare masse, en størrelse som vi her skal anta er uavhengig av hvor i atmosfæren vi befinner oss.

c) Anta nå at trykket på bakkenivå, $p_0 = p(0)$, er kjent, og vis at trykket i høyde z over bakkenivå har avtatt til verdien

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\int_0^z dz'/H(z')\right),$$

med den såkalte skalahøyden

$$H(z) = RT(z)/mg(z).$$

Tyngdens akselerasjon g vil som kjent variere med avstanden fra planetens sentrum (og dermed med høyden z), men atmosfæren på Mars er i all hovedsak lokalisert innenfor høydeverdier (15 – 20 km) som gjør det til en utmerket tilnærming å regne med konstant verdi $g = 3.71 \text{ m/s}^2$.

d) Dersom temperaturen T kunne regnes som konstant og lik 234 K, hva ville da (den konstante) skalahøyden $H = RT/mg$ være på Mars, der midlere molare masse er $m = 43.34 \text{ g}$? Med hvilken tallfaktor ville i så fall trykket være redusert i høyden $z = H$, relativt trykket på bakkenivå?

e) Med høydeavhengig temperatur $T(z)$ (som nevnt innledningsvis) er det (med all sannsynlighet) ikke mulig å løse integralet i punkt c) analytisk, men som godt oppdratt NTNU-student lar du deg ikke stoppe av denslags: Løs integralet numerisk (med Matlab), og beregn på den måten trykkprofilen $p(z)$ fra bakkenivå og opp til en høyde 16 km. Bruk en metode for numerisk integrasjon som du har lært tidligere (f.eks. midtpunktmetoden, trapesmetoden eller Simpsons metode; se evt wikipedia, andre nettsider, en bok, eller be om hjelp på øvingstimen). Hovedresultatet skal være en figur der p er plottet som funksjon av z , med angivelse av både fysisk størrelse og enhet langs begge akser. Verdien av trykket på bakkenivå kan du sette lik 600 Pa.

f) Utvid programmet ditt til også å beregne $p(z)$ med antagelsen at temperaturen er konstant og lik 234 K. Plott den resulterende trykkprofilen i samme figur som trykkprofilen beregnet med varierende temperatur.

TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.

Øving 11.

1) Damptrykket for vann ved 0°C er 4.58 mm Hg (4.58/760 atm). Anta at vanndampen er ideell gass med volum som er mye større enn volumet til samme mengde vann. Anta videre at fordampningsvarmen (ved 100°C), $l = 40.7 \text{ kJ/mol}$, kan benyttes for alle temperaturer. Med disse antagelsene, hva gir Clapeyrons ligning, og dermed damptrykk-kurven, for kokepunktet til vann ved 1 atm (760 mm Hg)?

- A) 91°C B) 100°C C) 109°C D) 118°C

2) Ved temperaturene $T_1 = 0^\circ\text{C}$ og $T_2 = 20^\circ\text{C}$ er damptrykket for CCl_4 (karbontetraklorid) henholdsvis 4402 Pa og 12139 Pa. Anta at dampen er ideell gass, at væskevolumet kan neglisjeres, og at fordampningsvarmen er uavhengig av T . Hva er da molar fordampningsvarme l for CCl_4 ?

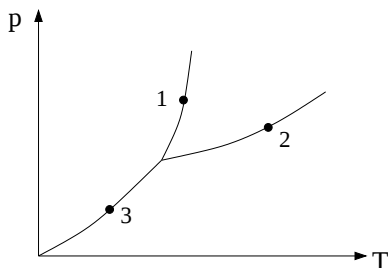
- A) 22.6 kJ B) 33.7 kJ C) 44.8 kJ D) 55.9 kJ

3) Hva blir damptrykket for CCl_4 ved $T = 30^\circ\text{C}$?

- A) 13.8 kPa B) 15.6 kPa C) 17.4 kPa D) 19.2 kPa

4) En svart overflate som holdes på konstant (høy) temperatur T_H er parallell med en annen svart overflate med konstant temperatur $T_L < T_H$. Det er vakuum mellom platene. For å redusere varmestrømmen på grunn av stråling, som i utgangspunktet er j_0 , innføres et varmeskjold som består av N parallelle svarte plan som plasseres mellom den kalde og varme overflata. Etter en stund oppnås stasjonære forhold. Hva blir varmestrømmen $j(N)$ når N slike svarte plan settes inn mellom de to svarte overflatene?

- A) $j(N) = j_0/\sqrt{N}$ B) $j(N) = j_0/\sqrt{N+1}$ C) $j(N) = j_0/(N+1)$ D) $j(N) = j_0/N^2$



5) Figuren viser koeksistenskurver i et pT -diagram. Hvilke prosesser foregår i tilstandene 1, 2 og 3?

- A) 1 = fordampning, 2 = smelting, 3 = sublimasjon
 B) 1 = sublimasjon, 2 = fordampning, 3 = smelting
 C) 1 = smelting, 2 = sublimasjon, 3 = fordampning
 D) 1 = smelting, 2 = fordampning, 3 = sublimasjon

6) Hvis temperaturen i en ideell gass halveres, hvordan endres molekylenes rms-hastighet? ($v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$)

- A) v_{rms} halveres.
 B) v_{rms} blir uendret.
 C) v_{rms} reduseres med ca 30 prosent.
 D) v_{rms} blir ca dobbelt så stor.

7) Hvis trykket i en ideell gass fordobles samtidig som gassen komprimeres til halvparten så stort volum, hvordan endres v_{rms} ?

- A) v_{rms} halveres.
- B) v_{rms} blir uendret.
- C) v_{rms} reduseres med ca 30 prosent.
- D) v_{rms} blir ca dobbelt så stor.

8) En ideell gass utvider seg reversibelt og isotermt fra en tilstand (T_1, p_1) slik at volumet blir dobbelt så stort, $V_1 \rightarrow 2V_1$. Arbeidet på omgivelsene er da W_0 . Dersom den samme gassen i stedet hadde utvidet seg reversibelt ved konstant trykk, fremdeles fra V_1 til $2V_1$, hva kan du da si om arbeidet gjort på omgivelsene, W_1 , i forhold til det isoterme arbeidet W_0 ?

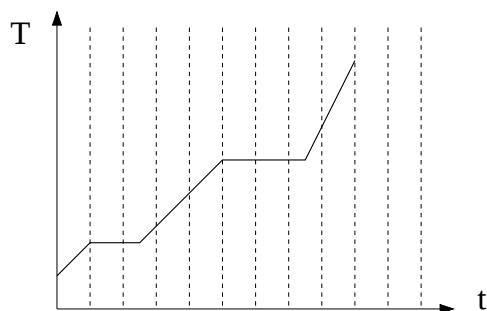
- A) $W_1 > W_0$
- B) $W_1 < W_0$
- C) $W_1 = W_0$
- D) Umulig å si noe sikkert om W_1 relativt W_0 .

9) Varmemengden $Q_p > 0$ tilføres en ideell gass ved konstant trykk. Gassens indre energi øker da med

- A) energimengden Q_p .
- B) en energimengde mindre enn Q_p .
- C) en energimengde større enn Q_p .
- D) en energimengde som avhenger av om gassen er en- eller toatomig.

10) Luft er med god tilnærmelse en ideell blanding av O_2 - og N_2 -molekyler. (Dvs, begge stoffer oppfører seg som ideelle gasser som ikke påvirker hverandre.) Hva kan du si om v_{rms} og midlere kinetisk translasjonsenergi $\langle K \rangle$ for de ulike molekylene?

- A) $v_{\text{rms}}(\text{O}_2) = v_{\text{rms}}(\text{N}_2)$, $\langle K \rangle_{\text{O}_2} = \langle K \rangle_{\text{N}_2}$
- B) $v_{\text{rms}}(\text{O}_2) < v_{\text{rms}}(\text{N}_2)$, $\langle K \rangle_{\text{O}_2} < \langle K \rangle_{\text{N}_2}$
- C) $v_{\text{rms}}(\text{O}_2) = v_{\text{rms}}(\text{N}_2)$, $\langle K \rangle_{\text{O}_2} > \langle K \rangle_{\text{N}_2}$
- D) $v_{\text{rms}}(\text{O}_2) < v_{\text{rms}}(\text{N}_2)$, $\langle K \rangle_{\text{O}_2} = \langle K \rangle_{\text{N}_2}$



11) Varme tilføres et rent stoff i en lukket beholder. Tilført varme pr tidsenhet er konstant. Figuren viser hvordan stoffets temperatur T endrer seg med tiden. Hva er forholdet mellom stoffets smeltevarme L_s og stoffets fordampningsvarme L_f ?

- A) $L_s/L_f = 0.33$
- B) $L_s/L_f = 0.60$
- C) $L_s/L_f = 1.00$
- D) $L_s/L_f = 1.67$

12) Vedrørende ligningen $\Delta Q = \Delta U + \Delta W$, hvilken påstand er feil?

- A) Ligningen uttrykker energibevarelse.
- B) ΔW er arbeidet gjort av systemet på omgivelsene.
- C) Størrelsen ΔQ kan være både positiv og negativ.
- D) Mens Q er en prosessvariabel, er både U og W tilstandsvariable.

13 – 16: Dårlig isolert hyttegulv

En hytteeier har ubehagelige erfaringer med en bekk i nærheten, som i vårløsningen kan finne på å gå sine egne veier og i verste fall krype helt oppunder hyttegulvet, med ødelagt glava-isolasjon som resultat. Isoporplater tåler bedre et kortvarig opphold i vann. Hytteeieren legger derfor nytt gulv i hytta, ganske enkelt med en 24 mm sponplate øverst og en 50 mm isoporplate festet på undersiden. Sponplate og isoporplate har varmeledningsevne hhv 0.12 W/mK og 0.035 W/mK. Varmeovergangstall innvendig og utvendig er hhv 7.5 W/m²K og 25 W/m²K.

13) Hva blir den totale varmemotstanden R til 1 m² hyttegulv? (Varmemotstanden R_T til en del av en bygningskonstruksjon er gitt ved forholdet mellom temperaturforskjellen ΔT og overført varmeenergi pr tidsenhet P . Hyttegulvet kan betraktes som en seriekobling av 4 varmemotstander: Inverse varmeovergangstall inne og ute, og varmemotstanden til sponplate og isoporplate. På den aktuelle hytta er det et lag med gulvbelegg oppå sponplaten, men dette ser vi bort fra her.)

- A) $R = 1.8 \text{ K/W}$ B) $R = 11.8 \text{ K/W}$ C) $R = 21.8 \text{ K/W}$ D) $R = 31.8 \text{ K/W}$

14) Med 20°C inne i hytta og -20°C ute (under hytta), hva blir varmetapet P pr kvadratmeter hyttegulv?

- A) $P = 1.3 \text{ W}$ B) $P = 1.8 \text{ W}$ C) $P = 3.4 \text{ W}$ D) $P = 22.2 \text{ W}$

15) Byggebransjen opererer med den såkalte U -verdien til en gitt bygningskonstruksjon. U -verdien angir hvor mye varmeenergi (J) som strømmer pr tidsenhet (s) gjennom 1 m² av konstruksjonen når det er en temperaturforskjell på 1 K mellom den varme og den kalde siden av konstruksjonen. Enheten til U -verdien er følgelig W/m²K. (Eller rett og slett W/K, siden $A = 1 \text{ m}^2$ er gitt!) For (endimensjonal) varmeledning gjennom en homogen del av en konstruksjon med varmeledningsevne κ og tykkelse a er $j = (\kappa/a)\Delta T = (1/R_T)\Delta T$. Av definisjonen av U -verdien se vi at vi også kan skrive $j = U \Delta T$, som gir $U = 1/R_T = \kappa/a$. Når den totale varmemotstanden R til en konstruksjon er bestemt, har vi $j = \Delta T/R = U \Delta T$, og dermed $U = 1/R$. Etter denne lange innledningen: Hva er U -verdien til hyttegulvet beskrevet i oppgave 13?

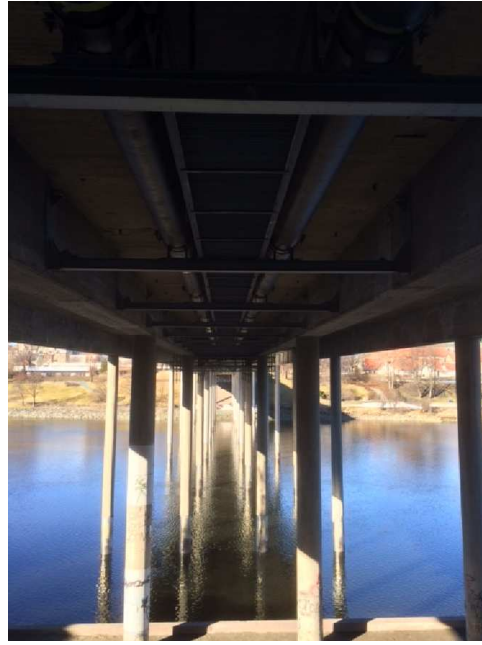
- A) $U = 0.22$ B) $U = 0.55$ C) $U = 0.88$ D) $U = 1.21$

16) Hva blir temperaturen i grenseflaten mellom sponplaten og isoporplaten? (Med betingelser som i oppgave 14.)

- A) 12.6°C B) 2.6°C C) - 2.6°C D) - 12.6°C

17 – 19: Fjernvarmeanlegg

På Tiller produseres varme ved forbrenning av avfall. Årlig energiproduksjon er 600 GWh. Varmen distribueres til kunder i Trondheim og Klæbu ved hjelp av varmt vann som strømmer gjennom isoporisolerte rør. Rørene ligger stort sett under bakken men går åpent under Elgesæter bro:



17) Hvor stor (gjennomsnittlig) effekt leverer fjernvarmeanlegget?

- A) 68.5 W B) 68.5 kW C) 68.5 MW D) 68.5 GW

18) Dersom den produserte varmen benyttes til å heve temperaturen i vann fra 15 til 95°C, hvor mye vann kan da passere gjennom anlegget på Tiller pr tidsenhet? (Varmekapasiteten til vann er $c = 1 \text{ cal/g K}$, dvs 4184 J/kg K.)

- A) 2.5 L/s B) 25 L/s C) 205 L/s D) 2050 L/s

19) Anta at dette vannet sirkulerer i to hovedsløyfer, en til Trondheim og en til Klæbu, begge med sirkulære rør med (indre) diameter $d_2 = 25 \text{ cm}$. Hva blir da maksimal strømningshastighet?

- A) 0.2 m/s B) 2 m/s C) 20 m/s D) 200 m/s

TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Øving 12.

1) Vi har vist at lydhastigheten i luft (og andre stoffer) er fastlagt ved bulkmodulen B og massetettheten ρ : $v = \sqrt{B/\rho}$. Siden kompressibiliteten $\kappa = 1/B$ er definert som forholdet mellom (minus) resulterende relativ volumendring, dV/V , og ”påtrykt” trykkendring dp , er det klart at lydhastigheten må kunne uttrykkes ved en eller flere termodynamiske størrelser, som trykk, temperatur osv. Kjennskap til luftas tilstandsligning, samt hvilken eller hvilke termodynamiske størrelser som (eventuelt) ikke endrer seg mens lydbølgen passerer et gitt sted bør være tilstrekkelig. Anta i første omgang (feilaktig, og som selveste Newton!) at det er *isoterm* forhold når lydbølger forplanter seg gjennom lufta. Med $B = -V(\partial p/\partial V)_T$ og $\rho = mN/V$ (der m er midlere masse pr molekyl i lufta; midlere masse pr mol er 29 gram), hva blir da uttrykket for v ? ($\gamma = C_p/C_V$ er adiabatkonstanten.)

A) $v = \sqrt{3k_B T/2m}$ B) $v = \sqrt{k_B T/m}$ C) $v = \sqrt{8k_B T/\pi m}$ D) $v = 3\sqrt{k_B T/m}$

2) Ved nærmere ettertanke innser du at lufttrykket varierer så *raskt* omkring likevektstrykket når en lydbølge passerer en gitt posisjon at det ganske enkelt ikke er *tid* til å overføre varme hit og dit, noe som ville være nødvendig for å holde temperaturen konstant mens trykket varierer. Du har lært litt av hvert om *adiabatiske* prosesser og prøver (som selveste Laplace!) en adiabatisk tilstandsligning (til å beskrive *variasjonene* i termodynamiske størrelser), i kombinasjon med tilstandsligningen for ideell gass (til å beskrive *likevektsverdiene* til termodynamiske størrelser). Hva slags uttrykk får du nå for lydhastigheten v ?

A) $v = \sqrt{\gamma k_B T/m}$ B) $v = \sqrt{k_B T/m}$ C) $v = \sqrt{k_B T/m\gamma}$ D) $v = \gamma\sqrt{k_B T/m}$

Bernard Finn (google newton sound speed finn) skriver i en interessant historisk artikkel *Laplace and the Speed of Sound* (ISIS, 1964, VOL. 55, No. 179): ”Newton did not realize that heat was developed in compression and that the sound vibrations took place so fast that this could not escape but instead raised the local temperature and thus also the pressure.”

3) På en brukbar sommerdag, med temperatur 20°C, hva blir Newtons verdi for v ?

A) 290 m/s B) 298 m/s C) 319 m/s D) 343 m/s

4) Hva blir din, og Laplace’s, korrekte verdi for v ?

A) 290 m/s B) 298 m/s C) 319 m/s D) 343 m/s

5) En kretsprosess består av to isobarer og to isokorer, der trykket varierer mellom p_0 og $5p_0$ og volumet varierer mellom V_0 og $4V_0$. Arbeidssubstansen er en 2-atomig ideell gass med N molekyler. Hva er C_p og C_V for en slik gass? (For temperaturer omkring romtemperatur.)

A) $C_p = 3Nk_B/2$, $C_V = 7Nk_B/2$ B) $C_p = 7Nk_B/2$, $C_V = 3Nk_B/2$

C) $C_p = 7Nk_B/2$, $C_V = 5Nk_B/2$ D) $C_p = 3Nk_B/2$, $C_V = 5Nk_B/2$

6) Denne kretsprosessen benyttes i en varmekraftmaskin. Hvor stort arbeid W utfører gassen på omgivelsene pr syklus av kretsprosessen?

A) $W = 4p_0V_0$ B) $W = 5p_0V_0$ C) $W = 12p_0V_0$ D) $W = 20p_0V_0$

7) Hva er temperaturene i de fire ”hjørnene” av kretsprosessen? (I stigende rekkefølge, og i enheter av p_0V_0/Nk_B .)

- A) 1, 5, 6, 9 B) 4, 5, 6, 20 C) 1, 5, 10, 20 D) 1, 4, 5, 20

8) Hva er kretsprosessens virkningsgrad $\eta = W/Q_{\text{inn}}$, der Q_{inn} er varmen som *tilføres* gassen pr syklus? (Du kan anta at C_p og C_V er konstante for hele kretsprosessen.)

- A) $\eta = 0.19$ B) $\eta = 0.45$ C) $\eta = 0.95$ D) $\eta = 1.02$

9) En ideell gass benyttes som arbeidssubstans i en varmekraftmaskin og gjennomgår følgende kretsprosess (der a , b , c og d angir fire ulike likevektstilstander for gassen):

ab : isobar utvidelse.

bc : isoterm utvidelse.

cd : isokor trykkreduksjon.

da : adiabatisk kompresjon.

Hva kan du da si om temperaturene i de ulike likevektstilstandene?

- A) $T_a < T_b = T_c < T_d$ B) $T_d < T_a < T_b = T_c$

- C) $T_c = T_d < T_a < T_b$ D) $T_b = T_c < T_d < T_a$

10) En ideell gass benyttes som arbeidssubstans i en varmepumpe og gjennomgår følgende kretsprosess (der a , b , c og d angir fire ulike likevektstilstander for gassen):

ab : isobar kompresjon.

bc : isoterm utvidelse.

cd : isokor trykkøkning.

da : adiabatisk kompresjon.

Hva kan du da si om temperaturene i de ulike likevektstilstandene?

- A) $T_a < T_b = T_c < T_d$ B) $T_d < T_a < T_b = T_c$

- C) $T_c = T_d < T_a < T_b$ D) $T_b = T_c < T_d < T_a$

11) Din venn har installert en ny varmepumpe som forbruker 1 kW elektrisk effekt når den står på. Han er spesielt fornøyd med hvor godt varmepumpa virker på ekstra kalde vinterdager, og han hevder at den leverer 10 kW selv med 20 kuldegrader ute. Hva er din kommentar til dette?

A) Du skryter av at *din* varmepumpe er enda mer effektiv.

B) Du gratulerer din venn med en god investering.

C) Du gratulerer din venn med en god investering, men legger til at han neppe får riktig så mye varme i stua på så kalde dager.

D) Du spør din venn om han har hørt om termodynamikkens andre hovedsetning og sier belærende at han aldri kan få mer enn 1 kW effekt ut av en slik varmepumpe.

12) En fryseboks er så smart konstruert at den fungerer praktisk talt like godt som en Carnot-kjølemaskin. Den er også godt isolert, og varmetapet gjennom fryseboksens vegger er ikke mer enn 500 W. Hvor mye elektrisk effekt vil denne fryseboksen forbruke dersom den skal holde 18 kuldegrader innvendig i et rom der temperaturen er 15 varmegrader?

- A) 15 W B) 65 W C) 500 W D) 850 W

TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Øving 13.

En bensinmotor tilføres 8 kJ varme pr syklus. Netto arbeid utført av motoren pr syklus er 2 kJ. Varmen kommer fra forbrenning av bensin med brennverdi 46 kJ/g.

1) Hva er virkningsgraden η til denne bensinmotoren?

A) $\eta = 0.17$ B) $\eta = 0.25$ C) $\eta = 0.56$ D) $\eta = 5.75$

2) Hvor mye "spillvarme" avgir motoren pr syklus?

A) 2 kJ B) 4 kJ C) 6 kJ D) 8 kJ

3) Hvor mye bensin forbrennes pr syklus?

A) 0.17 g B) 0.25 g C) 0.56 g D) 5.75 g

4) Hvilken effekt yter motoren når den gjennomgår 120 sykler pr sekund?

A) 960 kW B) 720 kW C) 240 kW D) 120 kW

5) En Otto-motor bruker en toatomig ideell gass som arbeidssubstans (med $\gamma = C_p/C_V = 1.4$). Kompresjonsforholdet V_1/V_2 er 8, og før den adiabatisk kompresjonen starter er temperaturen $T_1 = 22^\circ\text{C}$. Hva er da temperaturen T_2 etter kompresjonen (men før antenning)?

A) $T_2 = 51^\circ\text{C}$ B) $T_2 = 128^\circ\text{C}$ C) $T_2 = 405^\circ\text{C}$ D) $T_2 = 678^\circ\text{C}$

6) Starttrykket er $p_1 = 85$ kPa (litt mindre enn 1 atm). Hva er trykket p_2 etter kompresjonen (men før antenning)?

A) 37 kPa B) 195 kPa C) 1.56 MPa D) 12.5 MPa

7) Hva er virkningsgraden til denne reversible Otto-motoren?

A) $\eta = 0.17$ B) $\eta = 0.25$ C) $\eta = 0.56$ D) $\eta = 5.75$

8) Hva slags figur danner Carnot-prosessen i et ST -diagram?

A) Rombe B) Rektangel C) Parallelogram D) Trapez

9) En ideell gass som starter i tilstand A kan (1) utvide seg ved konstant trykk og deretter avkjøles ved konstant volum til en slutt-tilstand B. Alternativt kan gassen (2) ekspandere adiabatisk og reversibelt fra A til B. Hva er entropiendringen i gassen i det ene og det andre tilfellet?

A) Null i begge prosesser. B) Positiv i begge prosesser.

C) Størst i prosess (1). D) Størst i prosess (2).

10) Smeltevarmen til is er 335 J/g (ved 0°C). Fordampningsvarmen til vann er 2272 J/g (ved 100°C). Hva er entropiendringen (i isen/vannet) når 1 kg is smelter?

A) 1.23 kJ/K B) -1.23 kJ/K C) 1.23 J/K D) -1.23 J/K

11) Og hva er entropiendringen (i vannet, evt vanndampen) når 1 kg vanndamp kondenserer?

A) 6.09 kJ/K B) -6.09 kJ/K C) 6.09 J/K D) -6.09 J/K

12) Jorda mottar varme via stråling fra sola, der energien er fordelt over et spektrum som tilsvarer solas overflatetemperatur, ca 5800 K. Jorda avgir varme via stråling, der energien er fordelt over et spektrum som tilsvarer jordas midlere overflatetemperatur, ca 290 K. Dersom vi antar at jorda er omtrent i termisk likevekt, hvordan påvirkes jordas samlede entropi som følge av varmestrålingen inn og ut?

A) Den endres ikke. B) Den øker.

C) Den reduseres. D) Det er det ikke mulig å svare på.

13) To like store klosser av samme type metall har starttemperaturer T_1 og $T_2 > T_1$. Varmekapasiteten til hver av de to klossene er C . ($C_V \simeq C_p$ for faste stoffer.) Klossene er fullstendig varmeisolert fra omgivelsene, men bringes i termisk kontakt med hverandre. Hva blir klossenes felles slutt-temperatur T_s når de har oppnådd termisk likevekt med hverandre?

A) $T_s = T_1 T_2 / (T_1 + T_2)$ B) $T_s = (T_1 + T_2) / 2$ C) $T_s = (T_1 + T_2)$ D) $T_s = (T_1 + T_2) / 4$

14) Hva blir total entropiendring ΔS for de to metallklossene i oppgave 13? Klossenes volum endres så lite at vi ser bort fra volumendringene.

A) $\Delta S = C \ln(1 - (T_1 - T_2)^2 / 4T_1 T_2)$ B) $\Delta S = C \ln(1 + (T_1 + T_2)^2 / 4T_1 T_2)$

C) $\Delta S = C \ln(1 - (T_1 + T_2)^2 / 4T_1 T_2)$ D) $\Delta S = C \ln(1 + (T_1 - T_2)^2 / 4T_1 T_2)$

15) En toatomig ideell gass utvider seg reversibelt og ved konstant trykk til et dobbelt så stort volum. Hva blir entropiendringen pr molekyl?

A) $0.69k_B$ B) $1.04k_B$ C) $1.73k_B$ D) $2.43k_B$