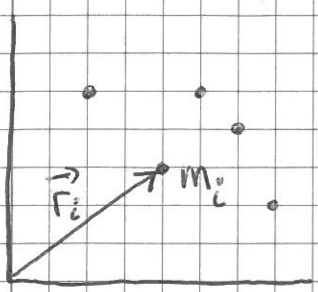
Massesenter [YF 8.5, oppg 8.115 + 116; LL 5.6, 5.8, 6.1]

(= tyngdepunkt hvis g = konstant i hele systemet)



Massesenter (CM) for N punktmasser $m_1\ m_2 \cdots m_N$ i pos. $\vec{r}_1\ \vec{r}_2 \cdots \vec{r}_N$:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

Total masse : $M = \sum_i m_i$

Kontinuerlig massefordeling : $m_i \to \Delta m_i \xrightarrow{\Delta m_i \to 0} dm$ (masseelement)

$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r}\, dm \quad ; \quad M = \int dm$$

↳ integral over der vi har masse

Må typisk uttrykke dm ved koordinater :

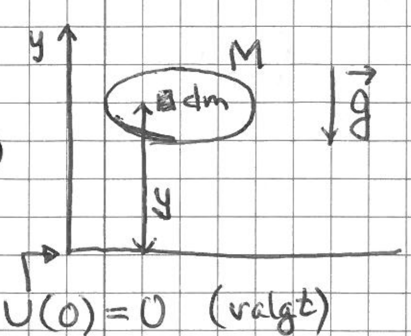
$dm = \rho\, dV$ (3D), $dm = \sigma\, dA$ (2D), $dm = \lambda\, d\ell$ (1D)

ρ, σ, λ = masse pr hhv volum-, flate-, lengdeenhet

$dV, dA, d\ell$ = hhv volum-, flate-, lengdeelement

Hvis massen er uniformt fordelt, er $\frac{dm}{M} = \frac{dV}{V}$ etc.

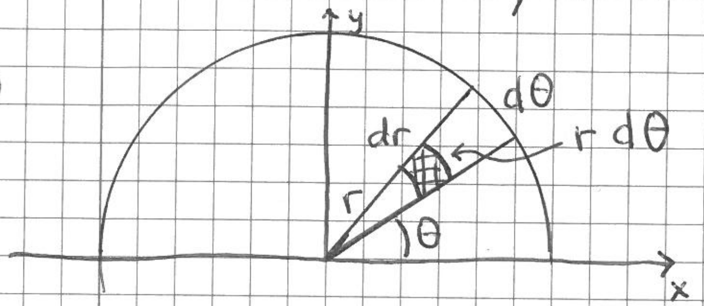
Eks: Pot. energi i tyngdefeltet (antar g = konstant)



$$U = \int dU = \int g y\, dm = g \int y\, dm = g M Y_{CM}$$

Dvs: Total U som om hele massen $M = \int dm$ er samlet i høyden $Y_{CM} = \frac{1}{M} \int y\, dm$, f.eks. i $\vec{R}_{CM}$

Eks: Halvsirkulær tynn skive, radius R



$$\frac{dm}{M} = \frac{dA}{A}$$

$$A = \pi R^2/2, \quad dA = dr \cdot r\,d\theta$$

$$y = r \sin\theta$$

$X_{CM} = 0$ pga symmetri $\Rightarrow \vec{R}_{CM} = Y_{CM}\,\hat{y}$

$$Y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm = \frac{1}{A}\int y\,dA$$

$$= \frac{2}{\pi R^2}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi} r\sin\theta\; r\,d\theta\,dr$$

$$= \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R r^2\,dr \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta = \frac{2}{\pi R^2}\cdot\frac{1}{3}R^3\cdot\underbrace{\Big|_0^\pi(-\cos\theta)}_{=2}$$

$$= \frac{4}{3\pi}R \approx 0.42\,R$$

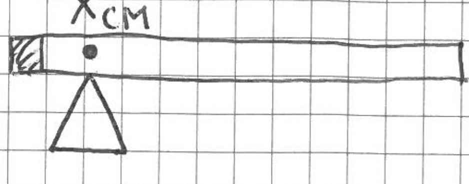
[Vis at $Y_{CM} = 2R/\pi$ for bøyle (1D) og $Y_{CM} = 3R/8$ for halvkule (3D)]

Eks: Rør med lite lodd i enden

$m = 165\,g \qquad M = 305\,g$

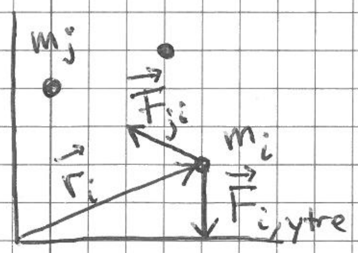
$$X_{CM} = \frac{1}{m+M}\left\{M\cdot 0 + \int_0^L x\,dm\right\} = \frac{1}{m+M}\int_0^L x\, m\,\frac{dx}{L} = \frac{m}{2(m+M)}L$$

$$= \frac{165}{940}L \approx 0.18\,L$$



Tyngdepunktbevegelsen [YF 8.5 ; LL 5.8]

Exp. (kast) viser at CM beveger seg som punktmasse i CM ! (Parabel, se s. 4)



N punktmasser, $\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$, $M = \sum_i m_i$

N2 for m_i :

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i,ytre} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{\text{total indre kraft på } m_i}$$

total ytre kraft på m_i

Legger sammen N2 for alle $i = 1, 2, \ldots, N$:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \underbrace{\sum_i \vec{F}_{i,ytre}}_{\text{total ytre kraft } \vec{F}_{ytre} \text{ på systemet}} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}$$

$$= \underbrace{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}}_{=0} + \ldots + \underbrace{\vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N}}_{=0}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right) = \frac{d^2}{dt^2}\left(M\vec{R}_{CM}\right) = M\ddot{\vec{R}}_{CM}$$

Konklusjon: $\boxed{M\ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{ytre}}$

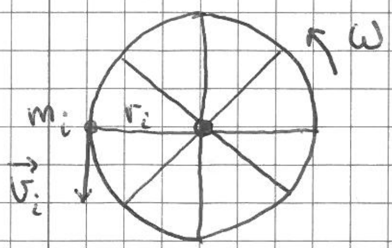
CM beveger seg som om hele M er samlet i CM og utsettes for summen av alle ytre krefter på systemet, $\vec{F}_{ytre}$

I tillegg kommer <u>rotasjon</u> om CM og <u>vibrasjon</u> om CM.

ROTASJON [YF 9,10 ; LL 6 (5)]

Innledende observasjoner:

- Ren rotasjon (hjul)



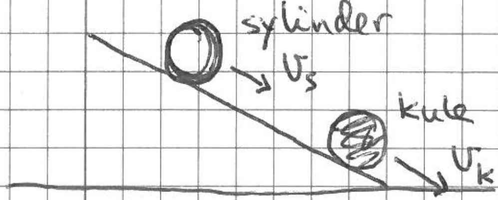
CM i ro $\Rightarrow K_{trans} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_{CM}^{2} = 0$

men $K_{rot} \neq 0$

Total impuls $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = 0$

men <u>dreieimpulsen</u> $\neq 0$

- Rulling



Hvorfor oppstår rotasjon?

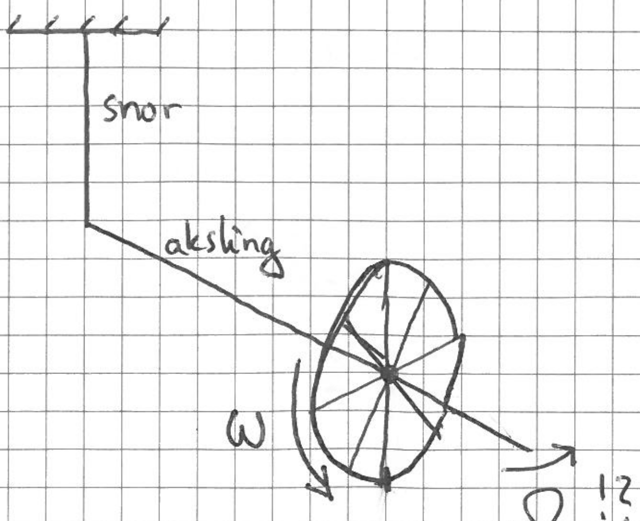
Hvor <u>angriper</u> kreftene?

Må ha <u>dreiemoment</u>!

Hvorfor blir $v_k > v_s$?

Har vi <u>friksjon</u> her?

- Kompleks dynamikk



Gyroskop.

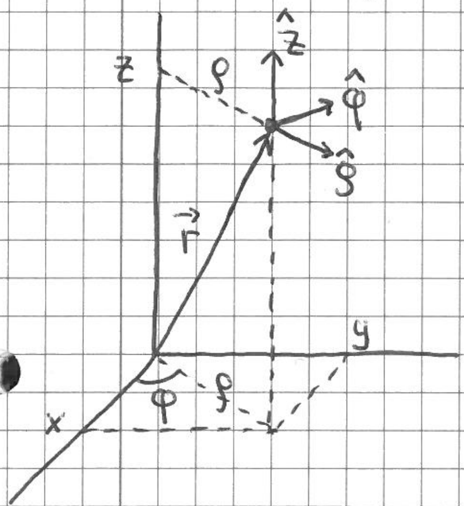
<u>Presesjon</u>

Sirkelbevegelse [YF 9.1–9.3; LL 1.8]

Generalisering av s. 5–6.

Anta rotasjon om z-aksen

$\Rightarrow$ Bruker sylinderkoord. (= polarkoord. + z)



$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z$$

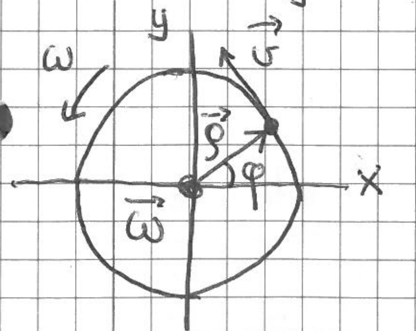
$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \tan\varphi = y/x$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\rho^2+z^2}$$

Bruker vinkelhastigheten som vektor til å "markere" rot.aksen:

$$\omega \rightarrow \vec{\omega} = \omega\hat{z} = \omega\hat{\omega}$$

Sett ned langs z-aksen:



$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{\rho\, d\varphi}{dt}\hat{\varphi} = \rho\omega\hat{\varphi}$$

$$\vec{\omega} = \omega\hat{z}, \quad \vec{\rho} = \rho\hat{\rho}$$

(ut av planet)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}}$$

Retning: $\hat{\varphi} = \hat{z} \times \hat{\rho}$ OK

Abs.verdi: $v = \omega\rho$ OK