

TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til øving 1.

Oppgave 1.

Det er 1000 L i 1 m³, dvs 10⁶ mL i 1 m³. Dermed: 568 mL = 568 · 10⁻⁶ m³ = 5.68 · 10⁻⁴ m³. Riktig svar: C.

Oppgave 2.

1 UP = 473 mL / (568 mL/IP) $\simeq$ 0.8 IP. Riktig svar: A.

Oppgave 3.

La oss betegne bevegelsesretningen som x -retningen, med $x = 0$ som stedet der fallskjermhopperen treffer snøfonna. Med konstant akselerasjon $a = -50g$ i x -retningen har en for $t > 0$ konstant-akselerasjonslikningene

$$v(t) = v_0 + at; \quad x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

Eliminer t mellom disse to likningene for å finne $v(x)$ eller $x(v)$:

$$x = v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a \frac{(v - v_0)^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad 2ax = v^2 - v_0^2.$$

(Eller du kunne skrevet opp denne "tidløse" likningen direkte.) Vi skal her bestemme den v_0 som gir $v = 0$ ved $x = 2$ (meter):

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 500 \cdot 2} = \sqrt{2000} \simeq 45 \text{ m/s}.$$

Riktig svar: D.

Oppgave 4.

Fallet bremses ned til $v = 0$ i løpet av tida

$$t_i = -\frac{v_0 - 0}{a} = \frac{44.7}{50 \cdot 9.8} \text{ s} = \underline{0.091 \text{ s}}.$$

Riktig svar: A.

Oppgave 5.

Størrelsen kv^2 må ha enheten m/s². Dermed må konstanten k ha enheten 1/m, siden v^2 har enheten m²/s². Riktig svar: C.

Oppgave 6.

Når akselerasjonen er en gitt funksjon av hastigheten, gir det en differensiallikning for $v(t)$. I vårt tilfelle:

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv^2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{dv}{v^2} = k dt$$

Integrerer fra start $(0, v_0)$ til vilkårlig tidspunkt (t, v) :

$$-\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = k \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = k(t - 0) \quad \Rightarrow \quad \underline{v(t) = \frac{v_0}{1 + kv_0 t}}.$$

Riktig svar: E.

Oppgave 7.

Hastighetens halveringstid T er derved gitt som

$$v(T) = \frac{v_0}{1 + kv_0 T} = \frac{1}{2}v_0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{kv_0} = \frac{1}{3.0 \cdot 1.50} \text{ s} = 0.22 \text{ s}.$$

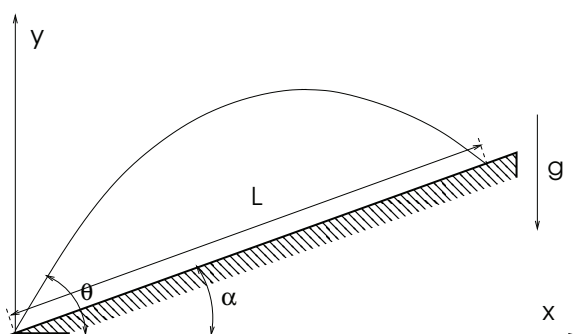
Riktig svar: B.

Oppgave 8. Ved start er $x = 0$, og i løpet av halveringstida har kula beveget seg strekningen $x(T)$. Denne bestemmes fra $v = dx/dt$, eller $dx = v dt$, som gir

$$x(T) = \int_0^T v(t) dt = \int_0^T \frac{v_0}{1 + kv_0 t'} dt' = \frac{1}{k} \ln(1 + kv_0 T) = \frac{1}{3.0 \text{ m}^{-1}} \cdot \ln 2 = \underline{0.23 \text{ m}}.$$

Riktig svar: A.

Oppgave 9.



Situasjonen er skissert i figuren til venstre. Vi velger utskytningsstedet som origo. Derved er begynnelsesbetingelsene

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 & y(0) &= 0, \\ v_x(0) &= v_0 \cos \theta & v_y(0) &= v_0 \sin \theta. \end{aligned}$$

I x -retningen er akselerasjonen lik null (når luftmotstanden neglisjeres), og derved er $x(t) = v_0 \cos \theta \cdot t$.

I y -retningen er akselerasjonen $-g$, slik at

$$y(t) = v_y(0)t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Når pila treffer bakken ved tida t_b , har den beveget seg $x(t_b)$ i x -retning og $y(t_b)$ i y -retning. Da må ifølge figuren $y(t_b)/x(t_b) = \tan \alpha$. Derved kan t_b bestemmes:

$$\frac{v_0 \sin \theta \cdot t_b - \frac{1}{2}gt_b^2}{v_0 \cos \theta \cdot t_b} = \tan \alpha \quad \Rightarrow \quad t_b = \frac{2v_0}{g} \cdot (\sin \theta - \cos \theta \tan \alpha).$$

Riktig svar: A.

Oppgave 10.

Rekkevidden blir da (se figuren)

$$L = \frac{x(t_b)}{\cos \alpha} = \frac{v_0 \cos \theta \cdot t_b}{\cos \alpha} = \frac{2v_0^2 \cdot (\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta \tan \alpha)}{g \cos \alpha} = \frac{2v_0^2 \cdot \cos^2 \theta}{g \cdot \cos \alpha} \cdot (\tan \theta - \tan \alpha)$$

Riktig svar: D.

Oppgave 11.

Vinkelen som gir størst rekkevidde $L(\theta)$ finnes ved å derivere mhp θ og sette den deriverte lik null.

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\theta} &= \frac{2v_0^2}{g \cos \alpha} \frac{d}{d\theta} (\cos \theta \sin \theta - \cos^2 \theta \tan \alpha) \\ &= \frac{2v_0^2}{g \cos \alpha} (-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \cos \theta \sin \theta \tan \alpha) \\ &= \frac{2v_0^2}{g \cos \alpha} (\cos 2\theta + \sin 2\theta \tan \alpha). \end{aligned}$$

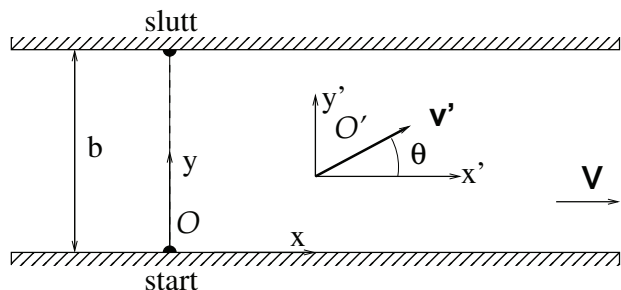
$\frac{dL}{d\theta} = 0$ og løst mhp θ gir resultatet

$$\tan 2\theta_{\text{maks}} = -\cot \alpha = \tan(\alpha + \pi/2) \quad \Rightarrow \quad \theta_{\text{maks}} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}}}.$$

Riktig svar: B.

Dette innebærer at på flat mark ($\alpha = 0$), er $\theta_{\text{maks}} = 45^\circ$, i tråd med erfaringer.

Oppgave 12.



a. Legger inn et koordinatsystem med x langs elvebredden og y på tvers. I figuren til venstre er referansesystemet fast i elvebredden betegnet O , mens referansesystemet som følger elvestrømmen er betegnet O' .

Vannets hastighet $\mathbf{V} = V\hat{x}$ er gitt i system O . Båtens hastighet i system O' er som oppgitt

$$\mathbf{v}' = v'_x\hat{x} + v'_y\hat{y} = v'\cos\theta\hat{x} + v'\sin\theta\hat{y},$$

og båtens hastighet i system O er

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} = (v'_x + V)\hat{x} + v'_y\hat{y} = (v'\cos\theta + V)\hat{x} + v'\sin\theta\hat{y},$$

Hastighetskomponentene er altså

$$\underline{v_x = v'\cos\theta + V}; \quad \underline{v_y = v'\sin\theta}.$$

b. Tida det tar å ro til den andre elvebredden er gitt av y -hastigheten: $t_r = \frac{b}{v_y} = \frac{b}{v'\sin\theta}$. På denne tida vil båtens forskyvning langs elvebredden være gitt av hastigheten v_x :

$$x_1 = v_x t_r = (v'\cos\theta + V) \frac{b}{v'\sin\theta}. \quad (1)$$

Tida det tar å gå tilbake til punktet rett overfor startpunktet er $t_g = x_1/v_g$, vi har da (fornuftig nok) antatt $x_1 \geq 0$, dvs båten har drevet litt med elvestrømmen, evt treffer rett på. (Dersom $x_1 < 0$ vil $t_g = -x_1/v_g$.) Til sammen blir dette

$$t(\theta) = t_r + t_g = \frac{b}{v'\sin\theta} \left[1 + \frac{v'}{v_g} \cos\theta + \frac{V}{v_g} \right]. \quad (2)$$

c. Vi minimerer totaltiden med hensyn på roretningen:

$$\begin{aligned} \frac{dt(\theta)}{d\theta} &= \frac{-b\cos\theta}{v'\sin^2\theta} [\dots] + \frac{b}{v'\sin\theta} \cdot \frac{v'(-\sin\theta)}{v_g} \\ &= -\frac{b}{v'\sin^2\theta} \cdot \left[\left(1 + \frac{V}{v_g}\right) \cos\theta + \frac{v'}{v_g} (\cos^2\theta + \sin^2\theta) \right] = 0. \end{aligned}$$

Av dette følger at vinkelen som minimaliserer tida er gitt som

$$\cos\theta_{\min} = -\frac{v'/v_g}{1 + V/v_g} = -\frac{v'}{V + v_g}. \quad (3)$$

Med de oppgitte tallverdiene får en $\cos\theta_{\min} = -3/(2+5)$ som gir $\theta_{\min} = 115^\circ$. Et ikke urimelig resultat!

d. Men dersom vi setter $V = 0$, gir uttrykket $\cos\theta_{\min} = -v'/v_g$. Dette kan umulig være riktig! Dersom elva stopper opp (dersom vi rett og slett skal krysse stillestående vann) må det raskeste være å ro rett over! Altså: I dette tilfellet burde $\theta_{\min} = 90^\circ$ og $\cos\theta_{\min} = 0$. Men hvor resonnerer vi feil i pkt b eller c?

Problemet ligger i forutsetningen $x_1 > 0$. Vi ser fra lign. (1) at dette gjelder bare dersom $v'\cos\theta + V > 0$ (siden b , v' og $\sin\theta$ alle er positive). Vi forutsetter altså $\cos\theta > -(V/v')$. Minimumsverdien $\cos\theta_{\min}$ i (3) er derfor bare gyldig dersom

$$-\frac{v'}{V + v_g} > -\frac{V}{v'} \quad \Rightarrow \quad v'^2 < V(V + v_g).$$

Hva skjer så dersom denne ulikheten for de oppgitte størrelsene ikke er oppfylt? For å forstå dette må vi gå tilbake til funksjonen $t(\theta)$ og ta høyde for at dette faktisk er *to* funksjoner. Den vi allerede har funnet, (2), er korrekt dersom vi lander *nedenfor* målpunktet, slik at $x_1 > 0$. Denne funksjonen kaller vi heretter $t^+(\theta)$. Men vi trenger også $t^-(\theta)$, som svarer til at båten lander *ovenfor* det endelige målet tvers over elva. Da er som nevnt ovenfor $t_g = -x_1/v_g$ og $t^+(\theta)$ i lign. (2) blir erstattet av

$$t^-(\theta) = t_r + t_g = \frac{b}{v' \sin \theta} - \frac{x_1}{v_g} = \frac{b}{v' \sin \theta} \left[1 - \frac{v'}{v_g} \cdot \cos \theta - \frac{V}{v_g} \right]. \quad (4)$$

De to funksjonene møtes der $x_1 = 0$, dvs for vinkelen θ_s gitt av $v' \cos \theta_s + V = 0$, altså for vinkelen

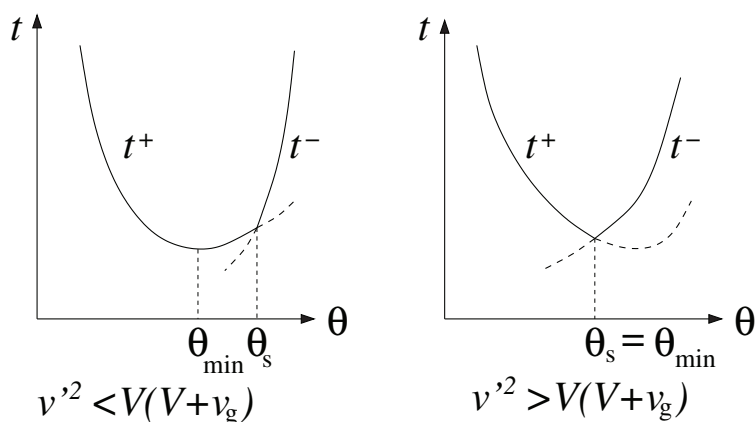
$$\cos \theta_s = -V/v'. \quad (5)$$

Skal dette ha mening, må $V < v'$. Dette har en åpenbar fysisk tolkning: Det er ikke mulig å havne rett over elva med en rofart som er mindre enn elvas strømningshastighet!

Figurene til høyre viser hva som skjer i de to parameterområdene.

Dersom $x_1 > 0$ og $v'^2 < V(V + v_g)$, er minimumstida gitt av minimum i funksjonen $t^+(\theta)$, med resultatet $\cos \theta_{\min} = -v'/(V + v_g)$ og $\theta_{\min} < \theta_s$. Minimum finnes på den konvensjonelle måten, ved å sette den deriverte lik null.

I parameterområdet der $v'^2 > V(V + v_g)$ er situasjonen kvalitativt annerledes. Der gir minimering av $t^+(\theta)$ et ufysikalsk resultat. Minimumstida er $t(\theta_s)$ der $t^+ = t^-$. Ingen av de to funksjonene som møtes i minimumspunktet har derivert lik null der.

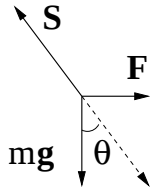


Den fysikalske tolkningen av dette er at i *hele* parameterområdet $v'^2 > V(V + v_g)$ lønner det seg å ro rett over elva, direkte til målet, med vinkelen θ_s gitt av (5) mellom roretning og elvas strømmetning.

Eksemplet viser at minimering kan være en mer sammensatt prosess enn den konvensjonelle. Det gjelder å bruke hodet, og sjekke resultatene mot sunn fornuft. Om det kan være til noen trøst: Flere årskull studenter og lærere overså fullstendig det vi her har diskutert, og tok for gitt at resultatet under pkt c var *hele* svaret. Men den enkle sjekken vi foretok avslørte umiddelbart at det ikke kunne være tilfelle.

TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til øving 2.

Oppgave 1.



a) Vi har her et eksempel på statisk likevekt. Newtons 2. lov gir da at $\mathbf{F} + m\mathbf{g} + \mathbf{S} = 0$, dvs $\mathbf{F}$ og $m\mathbf{g}$ balanseres av strekket i stanga, $\mathbf{S}$, som peker langs stanga. (Hvor opplagt er egentlig det...?) Dermed må også summen av $\mathbf{F}$ og $m\mathbf{g}$ peke langs stanga, som vist på figuren. Derav følger at

$$\tan \theta = \frac{F}{mg} \quad \Rightarrow \quad F = mg \tan \theta.$$

Riktig svar: C.

b) Kula roterer i horisontalplanet. Det er ingen bevegelse vertikalt, og dermed heller ingen akselerasjon vertikalt. Dermed må vertikalkomponenten av strekket i stanga, $S \cos \theta$, akkurat balansere tyngdekraften mg . Horisontalt er det kun horisontalkomponenten av strekket i stanga, $S \sin \theta$, som virker på kula. Denne kraften må derfor gi opphav til sentripetalakselerasjonen $v^2/r = \omega^2 r$. Vi har dermed de to ligningene (N1 vertikalt, N2 horisontalt)

$$\begin{aligned} S \cos \theta &= mg, \\ S \sin \theta &= m\omega^2 r = m\omega^2 L \sin \theta, \end{aligned}$$

og eliminasjon av S (f.eks ved å dele den første ligningen med den andre) gir

$$\cos \theta = \frac{g}{\omega^2 L}.$$

Riktig svar: B.

Vi vet at $|\cos \theta| \leq 1$. Med gitt verdi for L (og g) må derfor ω være større enn minimumsverdien

$$\omega_{\min} = \sqrt{g/L}$$

for at stanga og kula skal rotere med vinkel $\theta > 0$. Hvis systemet roterer med $\omega \leq \omega_{\min}$, vil stanga og kula henge rett ned. Vi ser at $\theta = 0$, $S = mg$ og $r = 0$ er en mulig løsning av de to ligningene ovenfor. Helt til slutt kan vi jo registrere at meget rask rotasjon, $\omega \gg \sqrt{g/L}$, gir $\cos \theta \simeq 0$, dvs $\theta \simeq \pi/2$, og stanga peker praktisk talt horisontalt utover. Ikke uventet!

c) Kula og flyet har lik akselerasjon a , ellers ville vinkelen θ forandre seg. Kulas situasjon er den samme som i spm a, bortsett fra at det *ikke* virker noen kraft $\mathbf{F}$ rettet mot høyre. Vertikal kraftbalanse (pga ingen bevegelse og dermed heller ingen akselerasjon vertikalt) gir

$$S \cos \theta = mg.$$

Horisontalt er det horisontalkomponenten av strekket i snora, $S \sin \theta$, som virker på kula, og som gir kula en lineær akselerasjon a :

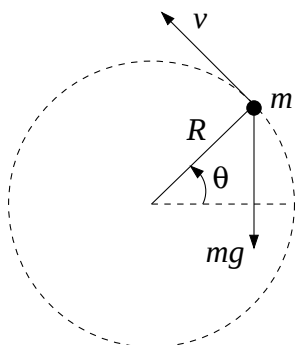
$$S \sin \theta = ma.$$

Divisjon av den siste med den første eliminerer S og gir

$$\tan \theta = a/g \quad \Rightarrow \quad a = g \tan \theta = g/\sqrt{3} = 5.7 \text{ m/s}^2.$$

Riktig svar: E.

Oppgave 2.



a) Snordraget S er rettet langs snora, radielt inn mot midten av sirkelen, og har ingen komponent tangentielt til sirkelbanen. Steinens vekt gir følgende kraftkomponent tangentielt, regnet positiv i positiv θ -retning (mot klokka): $-mg \cos \theta$. Akselerasjonen i tangentialretning er $a_{\parallel} = dv/dt = R d\omega/dt$. N2 langs sirkelbanen gir da

$$-mg \cos \theta = m \cdot R \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \underline{R \frac{d\omega}{dt} = -g \cos \theta},$$

som vi skulle vise. Kjernerregelen for $\omega(\theta(t))$ gir

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \omega.$$

Derved har vi funnet følgende separable differensialligning for $\omega(\theta)$:

$$\underline{R \omega d\omega = -g \cos \theta d\theta}.$$

b) Vi løser ligningen ved å integrere fra starttilstand $\theta = 0$; $\omega = \omega_0$ til vilkårlig tilstand θ ; ω :

$$R \int_{\omega_0}^{\omega} \omega d\omega = -g \int_0^{\theta} \cos \theta d\theta \Rightarrow \frac{1}{2} R (\omega^2 - \omega_0^2) = -g \cdot \sin \theta \Rightarrow \underline{\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{2g}{R} \cdot \sin \theta}.$$

c) Snordraget S må, sammen med komponenten av steinens vekt radielt (dvs normalt på sirkelbanen), gi opphav til sentripetalakselerasjonen $R\omega^2$. N2 radielt gir da

$$S + mg \sin \theta = mR\omega^2 = mR\omega_0^2 - 2mg \sin \theta \Rightarrow \underline{S(\theta) = mR\omega_0^2 - 3mg \sin \theta}.$$

Vi ser at vi har maksimalt snordrag $S_{\max}$ når $\sin \theta = -1$, dvs når massen passerer sirkelens bunnpunkt, som forventet. Vi ser videre at vi har minimalt snordrag $S_{\min}$ når $\sin \theta = 1$, dvs på toppen. Heller ikke uventet. Da er $S_{\min} = mR\omega_0^2 - 3mg$. Stram snor hele veien rundt har vi hvis $S_{\min} > 0$, som gir $\omega_0 > \sqrt{3g/R}$.

Oppgave 3.

a) Ingen bevegelse normalt skråplanet, og dermed null nettokraft i denne retningen. Tyngden mg har komponent $mg \cos \theta$ normalt skråplanet, følgelig er $N = mg \cos \theta$. Riktig svar: E.

b) Klossen ligger i ro, og dermed null nettokraft også parallelt med skråplanet. Tyngden mg har komponent $mg \sin \theta$ langs skråplanet, følgelig er $f = mg \sin \theta$. Riktig svar: B.

c) Maksimal friksjonskraft er $f_{\max} = \mu_s N = \mu_s mg \cos \theta$. Ligger klossen i ro er dessuten $f = mg \sin \theta$ (se b). Dermed må statisk friksjonskoeffisient minst være $\mu_s^{\min} = (mg \sin \theta)/(mg \cos \theta) = \tan \theta$. Riktig svar: C.

d) Hvis klossen glir, er $f = \mu_k N = \mu_k mg \cos \theta$. Netto kraft nedover langs skråplanet er dermed $mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta$, hvorefter N2 gir $a_{\parallel} = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$. Riktig svar: A.

e) Konstant hastighet dersom $a_{\parallel} = 0$ dvs $\tan \alpha = \mu_k$. Riktig svar: E.

Oppgave 4.

a) Klossene glir, da er $f = \mu N = \mu mg \cos \beta$. (Der μ er kinetisk friksjonskoeffisient.) Riktig svar: B.

b) Med stram snor virker snordraget S nedover på kloss nr 1. N2 gir da:

$$m_1 g \sin \beta + S - \mu_1 m_1 g \cos \beta = m_1 a_1,$$

dvs

$$a_1 = g(\sin \beta - \mu_1 \cos \beta) + S/m_1.$$

Riktig svar: B.

c) Med stram snor virker snordraget S oppover på kloss nr 2. N2 gir da:

$$m_2 g \sin \beta - S - \mu_2 m_2 g \cos \beta = m_2 a_2,$$

dvs

$$a_2 = g(\sin \beta - \mu_2 \cos \beta) - S/m_2.$$

Riktig svar: E.

d) $a_1 = a_2 = a$ gir, ved å trekke ligningen for a_2 fra ligningen for a_1 ,

$$S \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = g \cos \beta (\mu_1 - \mu_2).$$

Stram snor, $S > 0$, krever altså $\mu_1 > \mu_2$. Riktig svar: B.

e) Fra forrige punkt finner vi

$$S = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \cos \beta (\mu_1 - \mu_2).$$

Dette setter vi inn for S i ligningen for a_1 (eller a_2):

$$a = g(\sin \beta - \mu_1 \cos \beta) + S/m_1,$$

hvoretter litt opprydding gir

$$a = g \left(\sin \beta - \cos \beta \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} \right).$$

Konstant hastighet hvis $a = 0$, dvs

$$\sin \beta = \cos \beta \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2},$$

og dermed

$$\tan \beta = \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Riktig svar: B.

Oppgave 5.

a) Siden partikkelen følger en sirkulær bane, vil det alltid være en komponent av akselerasjonen rettet inn mot sirkelens sentrum (sentripetalakselerasjonen). Her øker dessuten hastigheten, så akselerasjonen må også ha en komponent tangentielt til sirkelbanen. Vektorsummen av normal- og tangentialkomponenten blir en total akselerasjon $\mathbf{a}$ med retning på skrå innover, som i B.

b) Legemet beveger seg med konstant positiv hastighet til å begynne med, deretter bremses det ned, før det snur og til slutt beveger seg med konstant negativ hastighet. Konstant fart betyr null akselerasjon, nedbremsing betyr negativ akselerasjon. Figur C passer bra med dette.

c) Prosjektil A er lengst tid i lufta. Vertikalbevegelsen, $z(t)$, beskrives ved

$$z(t) = v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Landingstidspunktet er gitt ved $z = 0$, dvs $t = 2v_{0z}/g$. Med andre ord, lengre tid i lufta jo større vertikalkomponent av starthastigheten v_0 .

TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til øving 3.

Oppgave 1.

a) $|W_f| = f \cdot s = \mu_k N s = 0.2 \cdot 50\text{kg} \cdot 10\text{m/s}^2 \cdot 3\text{m} = 300\text{Nm}$. Riktig svar: D.

b) Pianoet står i ro, da må statisk friksjonskraft "stille seg inn" slik at den akkurat balanserer skyvkraften på 350 N. Riktig svar: B.

c) Null nettokraft både tangentielt med og normalt på taket:

$$\begin{aligned} N &= mg \sin \theta, \\ f &= mg \cos \theta. \end{aligned}$$

Her er θ vinkelen mellom horisontalplanet og posisjonsvektoren din, relativt halvkulas sentrum, og f og N er friksjonskraft og normalkraft, som vanlig. Rett før du begynner å gli er $f = \mu_s N$, som med ligningene ovenfor gir

$$\mu_s = \frac{\cos \theta}{\sin \theta},$$

dvs

$$\theta = \arctan(1/\mu_s).$$

Du kan dermed gå avstanden (buelengden)

$$s = R(\pi/2 - \theta) = 18.5\text{m}.$$

Riktig svar: C.

d) Så lenge du har kontakt med taket er akselerasjonen inn mot halvkulas sentrum lik v^2/R . Krefter i denne retningen er $mg \sin \theta$ inn mot sentrum og N bort fra sentrum. Dermed, med N2:

$$mg \sin \theta - N = mv^2/R.$$

Bevaring av mekanisk energi (jf forelesning) gir

$$v(\theta) = \sqrt{2gR(1 - \sin \theta)},$$

som innsatt over gir

$$N = 3mg \sin \theta - 2mg.$$

Null normalkraft betyr altså at

$$\sin \theta = 2/3,$$

dvs avstanden fra toppen av taket er

$$s = R(\pi/2 - \theta) = 33.6\text{m}.$$

Riktig svar: D.

Oppgave 2.

ϕ	$S_{\max}/g$ (g)	μ
0	185	
$\pi/2$	240	0.166
π	300	0.154
$3\pi/2$	440	0.184
2π	600	0.187
$5\pi/2$	800	0.186
3π	1000	0.179
$7\pi/2$	1100	0.162
4π	1400	0.161

Tabell: Maksimal snorkraft $S_{\max}$ og statisk friksjonskoeffisient μ , med snor surret en vinkel ϕ rundt plastrøret.

Fra det oppgitte uttrykket for $S_{\max}(\phi)$ har vi

$$\mu = \frac{1}{\phi} \ln \frac{S_{\max}(\phi)}{S_{\max}(0)}$$

når $S_{\max}(\phi)$ er største tillatte snorkraft for å holde loddet med masse $m = S_{\max}(0)/g$ i likevekt (dvs i ro). Middelveiden av μ blir

$$\bar{\mu} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 \mu_i \simeq 0.1724,$$

standardavviket blir

$$\Delta\mu = \sqrt{\frac{1}{7} \sum_{i=1}^8 (\mu_i - \bar{\mu})^2} \simeq 0.0132,$$

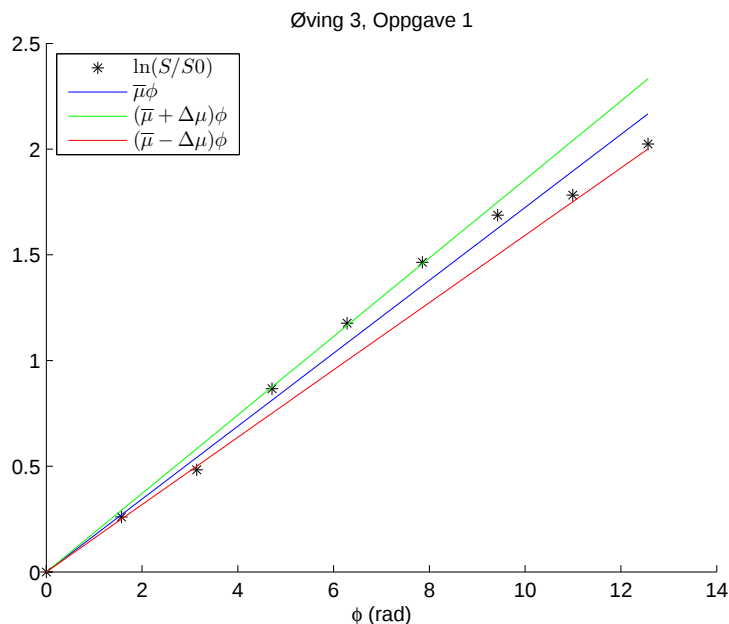
mens standardfeilen blir

$$\Delta\bar{\mu} = \frac{\Delta\mu}{\sqrt{8}} \simeq 0.0047.$$

Dermed:

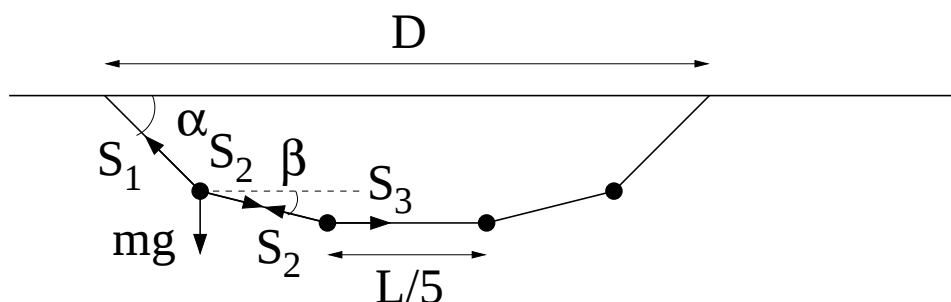
$$\mu = 0.172 \pm 0.005.$$

Vi plotter målepunktene for $\ln[S_{\max}/S_{\max}(0)]$ sammen med de rette linjene $\mu\phi$, for $\mu = \bar{\mu}$ samt $\mu = \bar{\mu} \pm \Delta\mu$:



Matlabprogrammet friksjon.m regner ut $\bar{\mu}$, $\Delta\mu$ og $\Delta\bar{\mu}$, og lager figuren ovenfor. Vi ser at 3 av de 8 målepunktene (37%) ligger utenfor intervallet $[\bar{\mu} - \Delta\mu, \bar{\mu} + \Delta\mu]$, dvs 63% ligger innenfor. Dette er omtrent som forventet (ca 68%).

Oppgave 3.



Vi kaller snordraget i 1., 2. og 3. snorbit regnet fra et festepunkt for hhv S_1 , S_2 og S_3 (se figuren over). N1 for 1. og 2. masse, horisontalt og vertikalt, gir da i alt

$$\begin{aligned} S_1 \cos \alpha &= S_2 \cos \beta \\ S_1 \sin \alpha &= S_2 \sin \beta + mg \\ S_2 \cos \beta &= S_3 \\ S_2 \sin \beta &= mg \end{aligned}$$

Ligning nr 5 uttrykker at horisontale forflytninger langs snora summerer seg til D :

$$\frac{L}{5} (1 + 2 \cos \beta + 2 \cos \alpha) = D.$$

Kombinasjon av 2. og 4. ligning gir $S_1 \sin \alpha = 2S_2 \sin \beta$, som kombinert med 1. ligning gir

$$\tan \alpha = 2 \tan \beta \quad \text{dvs} \quad \beta = \arctan\left(\frac{1}{2} \tan \alpha\right).$$

Bruker vi $\tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ og tilsvarende med β , finner vi

$$\cos \beta = \frac{2 \cos \alpha}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}}.$$

Dette setter vi inn i ligning nr 5 ovenfor og får

$$\frac{L}{5} \left(1 + \frac{4 \cos \alpha}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \alpha}} + 2 \cos \alpha \right) = D.$$

For å kunne bruke det utdelte Matlab-programmet og bestemme α numerisk (for gitte verdier av L og D , selvsagt), må denne ligningen omformes til $x = f(x)$, med $x = \cos \alpha$. I første omgang ser det meget naturlig ut å multiplisere med $5/L$ og trekke fra 1 på begge sider. Hvis vi så definerer $\gamma = (5D/L - 1)/2$, har vi (minst) tre åpenbare muligheter:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\gamma}{1 + 2/\sqrt{1 + 3x^2}}, \\ x &= \gamma - \frac{2x}{\sqrt{1 + 3x^2}}, \\ x &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + 3x^2} (\gamma - x). \end{aligned}$$

Algoritmen (se f.eks. Fixed-point iteration på wikipedia) i klessnor.m fungerer fint med alle disse tre. Til slutt kan vi gå tilbake til de opprinnelige ligningene og løse ut for S_1 , S_2 og S_3 mhp x . Vi finner:

$$\frac{S_1}{mg} = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\begin{aligned}\frac{S_2}{mg} &= \sqrt{\frac{1+3x^2}{1-x^2}}, \\ \frac{S_3}{mg} &= \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

Er disse uttrykkene rimelige? Vel, vi ser for det første at når $x \rightarrow 1$, dvs $\alpha \rightarrow 0$, dvs horisontal snor, så blir alle snordrag uendelig store. Ikke urimelig. Videre ser vi at $S_1 > S_2 > S_3$ hvis $x < 1$. Ved litt ettertanke heller ikke urimelig.

I programmet

`klessnor_los.m`

bestemmes begge vinkler og de tre snordragene, med $D = 0.9L$.

Til slutt kan det jo bemerkes at ei homogen snor, dvs med konstant massetetthet (masse pr lengdeenhet), vil henge med form som en hyperbolsk cosinus. Ei slik homogen snor skulle tilsvare at vi hengte N like store masser på snora, i innbyrdes avstand $L/(N+1)$, og lot $N \rightarrow \infty$. Det overlates til den enkelte å studere dette nærmere, gjerne både analytisk og numerisk.

TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til øving 4.

Oppgave 1.

a) Hastigheten v_1 til kule 1 like før kollisjonen finnes lettest ved å bruke energibevarelse:

$$\begin{aligned}m_1gL &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 \\ \Rightarrow v_1 &= \sqrt{2gL}\end{aligned}$$

Riktig svar: C.

b) Like før støtet antar vi at snora er vertikal, og dermed er det bare vertikale krefter som virker. Kun snordraget S_1 (oppper) og tyngden m_1g (nedover) virker på kule 1, og N2 gir

$$\begin{aligned}S_1 - m_1g &= m_1a = m_1\frac{v_1^2}{L} = 2m_1g \\ \Rightarrow S_1 &= m_1g + 2m_1g = 3m_1g\end{aligned}$$

Riktig svar: C.

c) Etter et fullstendig uelastisk støt vil kulene henge sammen. I kollisjonen er impulsen bevart, men ikke energien. Impulsbevarelse gir felleshastigheten $v'_1 = v'_2 = v'$ etter støtet:

$$\begin{aligned}p &= p' \\ \Rightarrow m_1v_1 &= (m_1 + m_2)v' \\ \Rightarrow v' &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{2gL}\end{aligned}$$

Etter kollisjonen svinger kulene til venstre opp til en posisjon i høyde h . Energibevarelse for denne delen av bevegelsen gir

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2)gh &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(v')^2 \\ \Rightarrow h &= \frac{(v')^2}{2g} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 L\end{aligned}$$

Riktig svar: E. (Snora når med andre ord ikke opp til horisontal stilling og er helt sikkert stram.)

d) Energien etter støtet er

$$(m_1 + m_2)gh = g\frac{m_1^2}{m_1 + m_2}L$$

mens den før støtet var m_1gL . Forholdet blir dermed

$$\frac{E_f}{E_i} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Riktig svar: A.

e) I et elastisk støt er også energien bevart. Hastighetene v'_1 og v'_2 etter støtet er gitt av de to ligningene:

$$\begin{aligned}m_1v_1 &= m_1v'_1 + m_2v'_2 \quad (\text{impulsbevarelse}) \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2 &= \frac{1}{2}m_1(v'_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(v'_2)^2 \quad (\text{energiebevarelse})\end{aligned}$$

En effektiv måte å løse disse to ligningene på er (som antydnet i forelesningene) å skrive

$$\begin{aligned} m_1(v_1 - v'_1) &= m_2 v'_2 \\ m_1(v_1^2 - (v'_1)^2) &= m_2(v'_2)^2 \end{aligned}$$

og deretter dividere den siste med den første. Det gir $v_1 + v'_1 = v'_2$. Dette innsatt i ligningen for impulsbevarelse lar oss eliminere v'_2 , og vi finner

$$\begin{aligned} m_1 v_1 &= m_1 v'_1 + m_2(v_1 + v'_1) \\ \Rightarrow v'_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \end{aligned}$$

Dermed:

$$v'_2 = v_1 + v'_1 = v_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

(Positive fartsretninger mot venstre.) Riktig svar: B.

f) Det kritiske punktet for kule 2 er toppen. Med v''_2 for hastigheten til kule 2 i toppunktet gir N2 her:

$$\sum F = m_2 a \quad \Rightarrow \quad S''_2 + m_2 g = m_2 (v''_2)^2 / L \quad \Rightarrow \quad S''_2 = m_2 (v''_2)^2 / L - m_2 g.$$

Dersom snora ikke skal slakkes, må snorkrafta S''_2 være større enn null, m.a.o.

$$(v''_2)^2 > gL.$$

Energibevarelse fra bunnpunkt til toppunkt for kule 2 bestemmer v''_2 uttrykt ved v'_2 og L :

$$\frac{1}{2} m_2 (v'_2)^2 = \frac{1}{2} m_2 (v''_2)^2 + m_2 g \cdot 2L \quad \Rightarrow \quad (v''_2)^2 = (v'_2)^2 - 4gL.$$

Et uttrykk for v'_2 har vi ovenfor. Dermed:

$$4v_1^2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 - g \cdot 4L > gL \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1}{m_1 + m_2} > \sqrt{\frac{5gL}{4v_1^2}} \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{m_2}{m_1} < \sqrt{\frac{4v_1^2}{5gL}}$$

Ovenfor har vi v_1 uttrykt ved g og L , som vi setter inn:

$$\frac{m_2}{m_1} < \sqrt{\frac{4 \cdot 2gL}{5gL}} - 1 = \sqrt{\frac{8}{5}} - 1,$$

dvs

$$\frac{m_1}{m_2} > \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8} - \sqrt{5}}.$$

Riktig svar: E.

Oppgave 2.

a) **C.** Graf 4 er åpenbart mulig: Klossen glir oppover med konstant (negativ) akselerasjon og blir liggende i ro dersom friksjonen mot underlaget er stor nok. Alternativt glir den ned igjen, igjen med konstant akselerasjon, men nå med *mindre* akselerasjon, siden både friksjonskraften og tyngdens komponent tangentielt med skråplanet virker mot bevegelsen når klossen er på vei opp (mens bare friksjonskraften virker mot bevegelsen hvis klossen er på vei ned). Dermed er også graf 2 en mulighet.

b) **C.** Impulsbevarelse gir $2mv_0 = 5mv$, dvs $v = 2v_0/5$. Energitapet er dermed $K_0 - K = (1/2)2mv_0^2 - (1/2)5m(2v_0/5)^2 = 3mv_0^2/5$.

Oppgave 3.

a) Rakettligningen:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg + u \frac{dm}{dt}.$$

Vi ganger ligningen med dt/m og integrerer, fra 0 til v for v , fra 0 til t for t , og fra m_0 til m for m :

$$\int_0^v dv = -g \int_0^t dt + u \int_{m_0}^m \frac{dm}{m},$$

som gir

$$v(t) = -gt + u \ln \frac{m}{m_0} = -u \ln \frac{m_0}{m} - gt.$$

b) Må ha skyvkraft minst like stor som tyngdekraften $m_0g = 2.98 \cdot 10^7$ N. Her er skyvkraften lik $u\beta = 3.40 \cdot 10^7$ N, så raketten *vil* lette fra bakken. Drivstoffmassen ved avreise er $m_d = -\beta t_f = 1.98 \cdot 10^6$ kg. Raketten uten drivstoff har masse $m_f = m_0 - m_d = 1.06 \cdot 10^6$ kg.

c) Fra rakettligningen har vi umiddelbart

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -g + \frac{u}{m} \frac{dm}{dt} = \frac{u\beta}{m} - g.$$

Med konstant drivstoff-forbruk har vi $m = m_0 + \beta t$, og dermed $a(t)$ som oppgitt. Ved $t = 0$: $a(0) = u\beta/m_0 - g = 1.39 \text{ m/s}^2$. Ved $t = t_f$: $a(t_f) = u\beta/m_f - g = 22.3 \text{ m/s}^2$.

Innsetting av tallverdier i $v(t)$ fra oppgave a) gir $v(t_f) \simeq 1247 \text{ m/s} \simeq 1.25 \text{ km/s}$.

d) Vi kan skrive

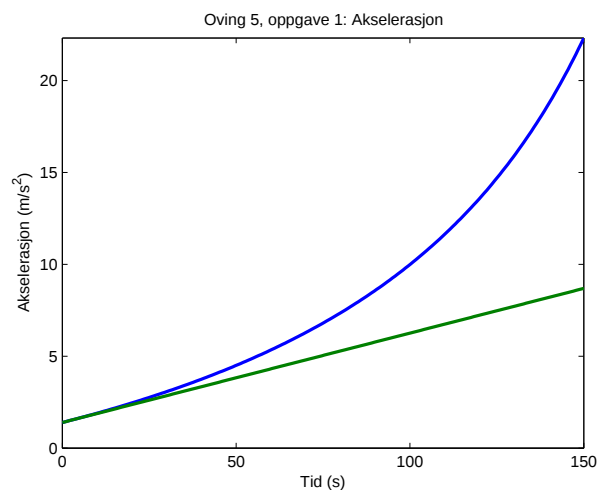
$$a(t) = \frac{u\beta}{m_0} \frac{1}{1 + \beta t/m_0} - g.$$

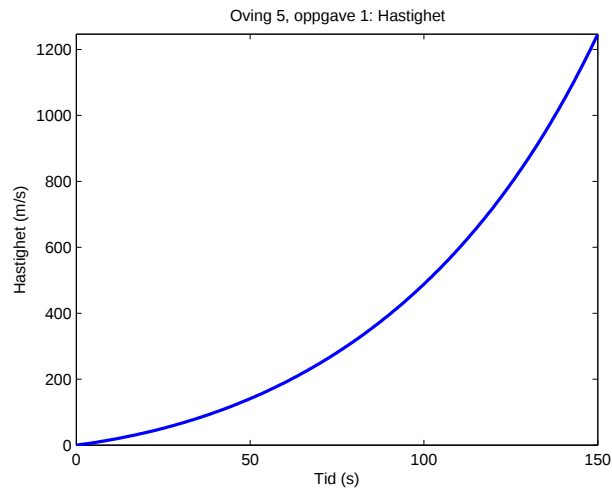
Hvis $t \ll m_0/(-\beta)$, så er $x = -\beta t/m_0 \ll 1$. Dermed er

$$a(t) \simeq a_{\text{lin}}(t) = \frac{u\beta}{m_0} \left(1 - \frac{\beta t}{m_0}\right) - g = a(0) - \frac{u\beta^2}{m_0^2} t,$$

som oppgitt.

Figurer produsert med Matlab-programmet rakettlosning.m for hhv akselerasjon og hastighet som funksjon av t :





På øyemål anslår vi at den lineære tilnærmelsen til $a(t)$ er god omtrentlig de første 20 sekundene.

e) Tilbakelagt distanse er gitt ved

$$h(t) = \int_0^t v(t) dt.$$

Vi har at

$$\int \ln x dx = x \ln x - x,$$

siden den deriverte av høyre side her gir tilbake $\ln x$. Litt fundering på hvordan riktige konstanter skal velges her og der gir da

$$h(t) = u \frac{m_0 + \beta t}{\beta} \ln \frac{m_0 + \beta t}{m_0} - ut - \frac{1}{2} g t^2,$$

og setter vi inn $t = t_f = 150$ s her, finner vi at $h(t_f) = 58353$ m $\simeq$ 58.4 km.

Forholdet mellom $g(0)$, dvs g ved jordoverflaten, og $g(h)$, dvs g i høyden h over bakken, er

$$\frac{g(0)}{g(h)} = \left(\frac{R+h}{R} \right)^2.$$

Setter vi inn $R = 6.37 \cdot 10^3$ km og $h = h_f = 58.4$ km, finner vi at dette forholdet blir ca 1.02. Med andre ord, vi gjør ikke større feil enn et par prosent ved å bruke samme verdi 9.81 m/s² for g for hele distansen.

Oppgave 4

a) Massen til del av bøylen innenfor vinklelementet $d\theta$ er

$$dm = \lambda dl = \lambda R d\theta,$$

der $\lambda = M/2\alpha R$ er bøylen masse pr lengdeenhet (kg/m). Men i slike oppgaver kan det være like greit å ikke innføre massetettheter, idet vi kan uttrykke massen i vinklelementet $d\theta$ som

$$dm = (\text{total masse}) \cdot (dm \text{ sin andel av hele massen}) = M \cdot \frac{d\theta}{2\alpha}.$$

Med denne dm og bruk av $x = R \cos \theta$ blir tyngdepunktets x -verdi

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{M} \int_{\text{legeme}} x dm = \frac{1}{M} \cdot R \cdot \frac{M}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta d\theta \\ &= \frac{R}{2\alpha} [\sin \alpha - \sin(-\alpha)] = \underline{\underline{R \frac{\sin \alpha}{\alpha}}}. \end{aligned}$$

Tyngdepunktets y -verdi er $Y = 0$, av symmetrigrunner.

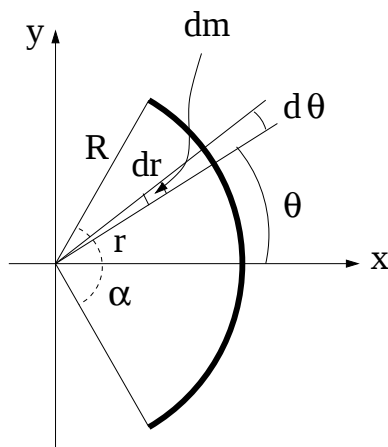
$\alpha = \pi$ gir $X = 0$, som ventet for en hel sirkel.

$\alpha \rightarrow 0$ gir $(\sin \alpha)/\alpha \rightarrow 1$ og $X = R$, som ventet for en liten masse samlet i $x = R$.

b) Massen til en infinitesimal del av sektoren innenfor vinklelementet $d\theta$ og radius dr er

$$dm = (\text{total masse}) \cdot (dm \text{ sin andel av hele massen}) = M \cdot \frac{dA}{A} = M \cdot \frac{r d\theta \cdot dr}{\frac{2\alpha}{2\pi} \pi R^2} = M \cdot \frac{r d\theta \cdot dr}{\alpha R^2}.$$

Med denne dm og bruk av $x = r \cos \theta$ blir tyngdepunktets x -verdi



$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{M} \int_{\text{sektor}} x dm = \frac{1}{M} \cdot \frac{M}{\alpha R^2} \int_{\theta=-\alpha}^{\alpha} \int_{r=0}^R r^2 \cos \theta d\theta dr \\ &= \frac{1}{\alpha R^2} \int_{\theta=-\alpha}^{\alpha} \cos \theta d\theta \int_{r=0}^R r^2 dr \\ &= \frac{1}{\alpha R^2} [\sin \theta]_{-\alpha}^{\alpha} \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^R \\ &= \underline{\underline{\frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}}}. \end{aligned}$$

Tyngdepunktets y -verdi er $Y = 0$, av symmetrigrunner.

Alternativt kan du bruke resultatet fra a) ved å betrakte sirkelsektoren som en sum av bøyler med radius fra 0 til R . En bøyle med radius r har da $X = r (\sin \alpha)/\alpha$ og masse (sammenlign med det som er gjort ovenfor)

$$dm = M \cdot \frac{dA_{\text{bøyle}}}{A} = M \cdot \frac{r \cdot 2\alpha \cdot dr}{\frac{2\alpha}{2\pi} \pi R^2} = M \cdot \frac{2r \cdot dr}{R^2},$$

og vi får

$$X = \frac{1}{M} \int_{\text{alle bøyler}} X \, dm = \frac{1}{M} \int_0^R r \frac{\sin \alpha}{\alpha} M \frac{2r \cdot dr}{R^2} = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{2}{R^2} \int_0^R r^2 \, dr = \underline{\underline{\frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}}}.$$

$\alpha = \pi$ gir $X = 0$, som ventet for en hel sirkel.

$\alpha \rightarrow 0$ gir $(\sin \alpha)/\alpha \rightarrow 1$ og $X = 2R/3$, som vel er rimelig for en meget smal sirkelsektor.

TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til øving 5.

Oppgave 1.

- a) $I_0 = MR^2/2 = 500 \cdot 0.5^2/2 = 500/8 = 62.5 \text{ kg m}^2$. Riktig svar: A.
- b) 60 sekunder pr minutt og 2500 omløp pr minutt gir $T = 60/2500 = 0.024 \text{ s} = 24 \text{ ms}$. Riktig svar: C.
- c) $\omega = 2\pi/T = 2\pi/0.024 = 262 \text{ s}^{-1}$. Riktig svar: D.
- d) $K = I_0\omega^2/2 = 62.5 \cdot 262^2/2 = 2.14 \text{ MJ}$, som omregnet ($1 \text{ kWh} = 3.6 \text{ MJ}$) gir 0.59 kWh . Riktig svar: B.
- e) $L = I_0\omega = 62.5 \cdot 262 = 16.4 \cdot 10^3 \text{ Js}$. Riktig svar: D.

Oppgave 2.

- a) Bordtennisball: $m = 2.7 \text{ g} = 0.0027 \text{ kg}$ og $r = 20 \text{ mm} = 0.020 \text{ m}$. Dermed: $I_0 = 2mr^2/3 = 7.2 \cdot 10^{-7} \text{ kg m}^2$. Riktig svar: B.
- b) Kule, friidrett, menn: $M = 7.26 \text{ kg}$ og $R = 60 \text{ mm} = 0.060 \text{ m}$. (Helt presist: Mellom 55 og 65 mm.) Dermed: $I_0 = 2MR^2/5 = 0.010 \text{ kg m}^2$. Riktig svar: D.

Oppgave 3

- a) Mhp aksens gjennom A (normalt papirplanet) har staven et treghetsmoment $MD^2/3$ (se forelesningene). En ekstra (punkt-)masse m i avstand d gir ganske enkelt et ekstra bidrag md^2 , slik at

$$I = \frac{1}{3}MD^2 + md^2.$$

Riktig svar: A.

- b) Før sammenstøtet mellom kule og stav er det bare kula som har impuls, slik at

$$\mathbf{p}_i = mv\hat{x}.$$

Riktig svar: B.

- c) Før sammenstøtet er det bare kula som har dreieimpuls mhp A, dens *banedreieimpuls* mhp A er

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{r} \times \mathbf{p}_i = -d\hat{y} \times mv\hat{x} = mvd\hat{z}.$$

Med impuls i x -retning bidrar ikke x -komponenten av $\mathbf{r}$ til dreieimpulsen. Riktig svar: B.

d) Tyngdekraften som virker på staven og kula i sammenstøtet har ingen arm mhp A. En eventuell kraft fra akslingen i sammenstøtet angriper staven i A og har dermed heller ingen arm mhp A. Da er det ikke noe ytre dreiemoment mhp A som påvirker systemet, og dreieimpulsen mhp A er bevart: $\mathbf{L}_f = \mathbf{L}_i = mvd\hat{z}$. Riktig svar: B.

e) Stav pluss kule er et stivt legeme med treghetsmoment I og dreieimpuls mvd mhp A rett etter sammenstøtet. Systemet utfører ren rotasjon om A. Da har vi $L = I\omega$, slik at

$$\omega = \frac{L}{I} = \frac{v/d}{1 + MD^2/3md^2} \hat{z}.$$

Alternativt uttrykt som alternativ D i oppgaveteksten. Riktig svar: D.

f) Like etter sammenstøtet har alle deler av staven, inklusive den "absorberte" kula, hastighet i positiv x -retning:

$$\mathbf{v}(y) = -\omega y \hat{x},$$

slik at $\mathbf{v} = 0$ ved A ($y = 0$) og $\mathbf{v} = \omega D \hat{x}$ helt nederst ($y = -D$). Gjennomsnittshastigheten for staven blir dermed $\omega D \hat{x}/2$ og dens impuls $M\omega D \hat{x}/2$. Til dette må vi huske å addere kulas impuls $m\omega d \hat{x}$. Følgelig:

$$\mathbf{p}_f = \left(\frac{1}{2}MD + md\right) \omega \hat{x}.$$

Innsetting for ω fra e) gir

$$\mathbf{p}_f = \frac{mv + MvD/2d}{1 + MD^2/3md^2} \hat{x}.$$

Siden vi skal sammenligne p_f med p_i , trekker vi ut $mv = p_i$ fra telleren og får

$$\mathbf{p}_f = \mathbf{p}_i \frac{1 + MD/2md}{1 + MD^2/3md^2}.$$

Riktig svar: A.

g) Her vil forholdet mellom leddene som adderes til 1 i teller og nevner avgjøre om det er p_f eller p_i som er størst:

$$\frac{MD/2md}{MD^2/3md^2} = \frac{3d}{2D}.$$

Dermed: Hvis $d = 2D/3$, er $p_f = p_i$. Treffer kula nøyaktig her, ønsker stavens øvre ende ikke å bevege seg i sammenstøtet, og vi har faktisk impulsbevarelse.

Hvis $d > 2D/3$: Kula treffer staven så langt ned at rotasjonsbevegelsen ville ha blitt slik at stavens øverste ende rett etter støtet ville ha beveget seg mot venstre. Men staven er festet i A og beveger seg ikke der. Dette må skyldes en kraft $\mathbf{F}$ fra akslingen på staven i A rettet mot høyre. Og et ytre kraftstøt $\mathbf{F} \cdot \Delta t$ rettet mot høyre vil som kjent gi en økning i systemets impuls i denne retningen. (Her er Δt sammenstøtets (korte) varighet.)

Tilsvarende: Hvis $d < 2D/3$, treffer kula staven så langt opp at øverste ende "prøver" å bevege seg mot høyre. En kraft fra akslingen rettet mot venstre forhindrer dette, og gir samtidig systemet en redusert impuls mot høyre.

(I det *videre forløpet*, når tyngdekraften får virke på systemet, med en arm mhp A som ikke er null, har vi selvsagt ikke impulsbevarelse - og heller ikke dreieimpulsbevarelse - men det var det ikke spørsmål om her.)

h) Kinetisk energi før støtet:

$$K_i = \frac{1}{2}mv^2.$$

Kinetisk energi rett etter støtet:

$$\begin{aligned} K_f &= \frac{1}{2}m(\omega d)^2 + \frac{1}{2} \int_{\text{staven}} dm(\omega y)^2 \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 d^2 + \frac{1}{2} \int_{-D}^0 \frac{Mdy}{D} \omega^2 y^2 \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 d^2 + \frac{1}{6}MD^2\omega^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}md^2 + \frac{1}{6}MD^2 \right) \frac{(v/d)^2}{(1 + MD^2/3md^2)^2} \\ &= \dots \\ &= \frac{K_i}{1 + MD^2/3md^2}. \end{aligned}$$

Dermed er endringen i kinetisk energi

$$\Delta K = K_f - K_i = -\frac{K_i}{1 + 3md^2/MD^2},$$

og relativ endring, i absoluttverdi, som i alternativ A i oppgaveteksten.

Hvis kula har mye større masse enn staven, $m \gg M$, er $\Delta K/K_i \simeq 0$. Det høres rimelig ut: Staven representerer kun en "ubetydelig hindring" for kula, som (rett etter støtet) fortsetter som om intet hadde hendt. Hvis kula derimot har mye mindre masse enn staven, $m \ll M$, blir $\Delta K/K_i \simeq -1 = -100\%$. Det høres også rimelig ut: Staven er så tung i forhold til kula at den henger praktisk talt i ro etter støtet. (Tenk bare på grensen $M \rightarrow \infty$; da er staven som en "massiv vegg", all bevegelse opphører, og hele den kinetiske energien er tapt som varme og eventuelt deformasjon av kule og stav.)

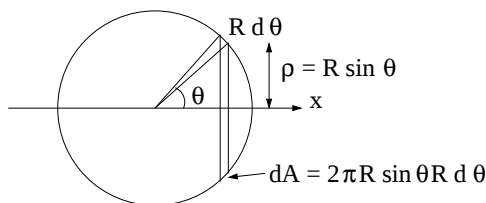
Oppgave 4

a) **C.** Bruk Steiners sats, $I_1 = I_2 = I_0 + Md^2$ med $d = R_1 = R_2$.

b) **C.** I luftlinje i nord-syd-retning er det ca 40 mil mellom Oslo og Trondheim, dvs ca $4 \cdot 10^5$ m. Dette blir bilimpulsens "arm" a . Bilen har masse omlag 1000 kg og hastighet østover ca 25 m/s. Dreieimpulsen mhp et sted i Oslo sentrum blir dermed $L = mva \sim 1000 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 10^5 = 10^{10}$ kg m²/s.

c) **A.** Vi har $\tau = I_0\dot{\omega}$, N2 for rotasjon om akse gjennom slipesteinens tyngdepunkt. Her er $\tau = Sr = 20 \cdot 0.25 = 5.0$ i SI-enheter. Dessuten er $\dot{\omega} = 60/12 = 5.0$, også i SI-enheter. Dermed må I_0 være lik 1.0, i SI-enheten kg m².

Ekstraoppgave



Vi setter $dm = M \cdot dA/A$, med $A = 4\pi R^2$ = arealet av hele kuleskallet og $dA = 2\pi\rho \cdot R d\theta = 2\pi R \sin \theta \cdot R d\theta$ = arealet av en smal ring med omkrets $2\pi R \sin \theta$ og bredde $R d\theta$. Her er θ vinkelen mellom (rotasjons-)aksen og linjen fra kuleskallets sentrum ut til den smale ringen, se figur. Dermed:

$$I_0 = \int_0^\pi (R \sin \theta)^2 \cdot M \cdot \frac{2\pi R^2 \sin \theta d\theta}{4\pi R^2} = \frac{1}{2} M R^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta.$$

Vi bruker tipset gitt i oppgaven og finner

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_0^\pi \frac{1}{4} (3 \sin \theta - \sin 3\theta) = \left|_0^\pi \left(\frac{\cos 3\theta}{12} - \frac{3 \cos \theta}{4} \right) \right| = \frac{4}{3},$$

slik at

$$I_0 = \frac{2}{3} M R^2.$$

Vi betrakter ei kompakt kule som mange tynne kuleskall utenpå hverandre, hver med treghetsmoment $dI = 2r^2 dm/3$, radius r , masse $dm = M \cdot dV/V$, der $V = 4\pi R^3/3$ er kulas totale volum, og $dV = 4\pi r^2 dr$ er volumet til et kuleskall med radius r og tykkelse dr . Dermed:

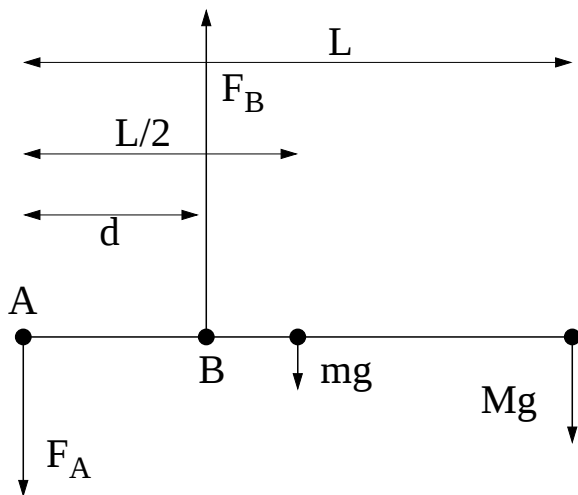
$$I_0 = \int dI = \int_0^R \frac{2}{3} r^2 \cdot M \cdot \frac{4\pi r^2 dr}{4\pi R^3/3} = \frac{2M}{R^3} \int_0^R r^4 dr = \frac{2}{5} M R^2.$$

Alternativ metode: La x -aksen være rotasjonsaksen og del opp kula i tynne skiver med tykkelse dx og radius $\sqrt{R^2 - x^2}$, og dermed volum $dV = dx \cdot \pi(R^2 - x^2)$ og masse $dm = M dV/V = M \cdot dx \cdot \pi(R^2 - x^2)/(4\pi R^3/3)$. Treghetsmomentet til ei slik skive er $dI = dm \cdot (R^2 - x^2)/2$, slik at kulas treghetsmoment blir

$$\begin{aligned} I &= \int dI \\ &= \frac{1}{2} \int dm \cdot (R^2 - x^2) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^R \frac{M \cdot dx \cdot \pi(R^2 - x^2)}{4\pi R^3/3} \cdot (R^2 - x^2) \\ &= \frac{3M}{4R^3} \int_0^R (R^4 - 2R^2 x^2 + x^4) dx \\ &= \frac{2}{5} M R^2 \end{aligned}$$

TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til øving 6.

Oppgave 1



Stupebrettet er i ro, dvs vi har statisk likevekt. Det betyr at summen av alle krefter i vertikal retning er null og at dreiemomentet om enhver akse er lik null. Vi ser da umiddelbart at kraften F_A er rettet nedover for å gi null dreiemoment om B. Vi ser videre at kraften F_B er rettet oppover for å gi null dreiemoment om A.

a) Vi velger her først å beregne dreiemomentene om A. Kraften F_A har da null arm og dermed null dreiemoment. Dreiemomentene pga tyngdekraftene er negative siden de prøver å dreie *med klokka* om A. Tyngdekraften for stupebrettet angriper i tyngdepunktet som ligger i avstand $L/2$ fra A. Dreiemomentet pga F_B er positivt siden det prøver å dreie *mot klokka* om A. Totalt dreiemoment om A lik null gir

$$0 = F_A \cdot 0 - mg \frac{L}{2} - MgL + F_B d$$

$$F_B = \frac{gL}{d} \left(M + \frac{m}{2} \right)$$

Riktig svar: C.

b) Kraftbalanse i vertikal retning gir (med positiv retning valgt oppover)

$$0 = -F_A - mg - Mg + F_B$$

$$F_A = F_B - (m + M)g = \frac{gL}{d} \left(M + \frac{m}{2} \right) - (m + M)g$$

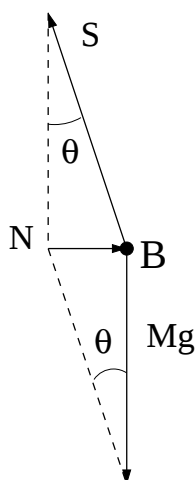
Riktig svar: D.

La oss bruke dreiemomentbalanse om B til å kontrollere at vi har riktig uttrykk for F_A :

$$\begin{aligned} \tau_B &= F_A d - mg \left(\frac{L}{2} - d \right) - Mg(L - d) \\ &= gL \left(M + \frac{m}{2} \right) - (m + M)gd - mg \left(\frac{L}{2} - d \right) - Mg(L - d) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ser bra ut!

Oppgave 2



a) Det er tre krefter som virker på ballen, snordraget S , tyngdekraften $G = Mg$ og normalkraften fra vegg, N . Ballen er i ro, dvs i statisk likevekt. Da må f.eks det totale dreiemomentet om ballens tyngdepunkt B være null. Både N og G har null arm mhp en akse gjennom B, og bidrar derfor ikke til τ_B . Da kan heller ikke S gi noe dreiemoment om B, og snoras forlengelse må passere gjennom B.

La oss kalle vinkelen mellom vegg og snora for θ . Null nettokraft på ballen horisontalt gir da

$$N - S \sin \theta = 0,$$

mens null nettokraft vertikalt gir

$$S \cos \theta - Mg = 0.$$

Siden snoras forlengelse går gjennom B, har vi

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{(L+R)^2 - R^2}}{L+R} = \frac{\sqrt{L(L+2R)}}{L+R}$$

og

$$\tan \theta = \frac{R}{\sqrt{L(L+2R)}},$$

slik at

$$S = \frac{Mg}{\cos \theta} = Mg \frac{L+R}{\sqrt{L(L+2R)}}$$

og

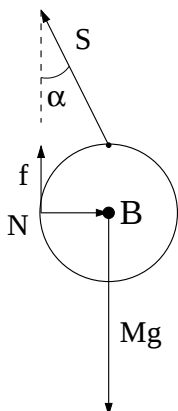
$$N = S \sin \theta = Mg \tan \theta = Mg \frac{R}{\sqrt{L(L+2R)}}.$$

Riktig svar: A.

Hvis snora er veldig lang, $L \gg R$, er $S \simeq Mg$ og $N \simeq 0$. Det er rimelig for en ball som henger i ei praktisk talt vertikal snor. Hvis snora er kort, $L \ll R$, blir både S og N store, og tilnærmet lik

$$S \simeq N \simeq Mg \sqrt{\frac{R}{2L}}.$$

Eksempelvis blir $S = N = 10Mg$ hvis $L = R/200$. (F.eks ball med radius 10 cm og snor med lengde 0.5 mm.) Litt friksjon mellom ball og vegg vil endre på dette.



b) La oss her kalle vinkelen mellom vegg og snor for α . Null dreiemoment om B gir da

$$S \sin \alpha \cdot R - f \cdot R = 0,$$

dvs

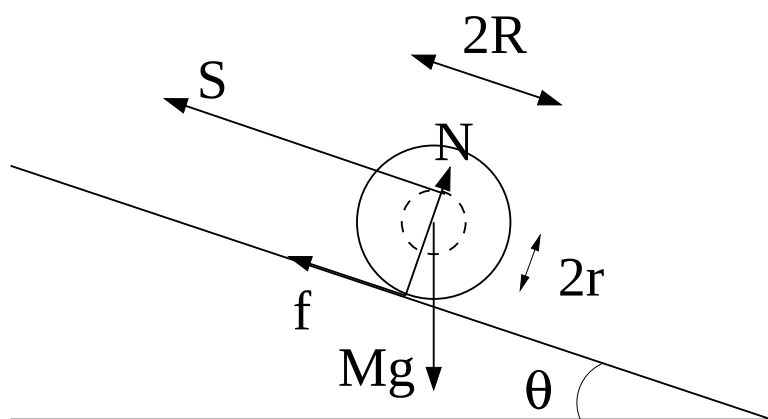
$$f = S \sin \alpha.$$

Maksimal friksjonskraft er $f_{\max} = \mu N$. Null nettokraft horisontalt gir da

$$N = S \sin \alpha = f = \mu N,$$

dvs $\mu = 1$, som akkurat gjør det mulig å ha snorfestet øverst på ballen. Riktig svar: B. (En mye enklere løsning finnes ved å bruke snoras festepunkt som referansepunkt. Da har f og N like stor arm, R , slik at $f = N$ og $\mu = 1$ følger umiddelbart.)

Oppgave 3.



a) Her har vi fire ukjente: θ_0 , S , f , N . Dette krever fire ligninger. Når snella holdes i ro av snora og friksjonen, gjelder N1:

$$\text{Normalt skråplanet: } \sum F_{\perp} = 0 \Rightarrow N = Mg \cos \theta \quad (\text{I})$$

$$\text{Langs skråplanet: } \sum F_{\parallel} = 0 \Rightarrow Mg \sin \theta = f + S \quad (\text{II})$$

der f er friksjonskrafta.

$$\text{N1 for rotasjon (mhp snellas massesenter): } \sum \tau = 0 \Rightarrow S r = f R \quad (\text{III})$$

Statisk friksjonskraft kan ligge mellom null og en øvre grense:

$$f \leq \mu_s N = \mu_s Mg \cos \theta \quad (\text{IV})$$

Ved grensa $\theta = \theta_0$ – dvs der hvor snella akkurat glipper fra underlaget og begynner å rulle/slure – er friksjonskraften lik det maksimale: $f = \mu_s Mg \cos \theta_0$.

Ligning (III) gir $S = (R/r)f$, som innsatt i ligning (II) gir

$$Mg \sin \theta_0 - f - (R/r)f = 0.$$

Innsetting av maksimalverdien av f gir en ligning for θ_0 :

$$Mg \sin \theta_0 = \mu_s Mg \cos \theta_0 (1 + R/r) \Rightarrow \tan \theta_0 = \mu_s (1 + R/r),$$

og dermed

$$\theta_0 = \arctan [\mu_s (1 + R/r)].$$

Riktig svar: A.

b) Snorkrafta:

$$\underline{S = \frac{R}{r} f = \frac{R}{r} \mu_s Mg \cos \theta_0}, \quad \text{Alternative uttrykk: } S = \frac{MgR}{r + R} \sin \theta_0 = Mg (\sin \theta_0 - \mu_s \cos \theta_0).$$

Riktig svar: C.

c) Når snella har begynt å slure, må ligning (II) og (III) erstattes av N2. Vinkelen er nå gitt lik $\theta (\geq \theta_0)$, og de fire ukjente blir: a , S_1 , f , N . Snorkraften blir en annen enn tidligere, derfor nytt symbol for den, og akselerasjonen a langs skråplanet blir en ukjent. Friksjonskraften nå er gitt av den *kinetiske* friksjonskoeffisienten μ_k :

$$f = \mu_k N = \mu_k Mg \cos \theta.$$

Ligning (I) bestemmer N og ligning () bestemmer f , slik at vi har igjen bare to ukjente, a og S_1 . To ligninger:

$$N2 \text{ langs skråplanet: } \sum F_{\parallel} = Ma \Rightarrow Mg \sin \theta - f - S_1 = Ma \quad (\text{IIb})$$

$$N2 \text{ for rotasjon (om snellas massesenter): } \sum \tau = I\dot{\omega} \Rightarrow -fR + S_1 r = I\dot{\omega} \quad (\text{IIIb})$$

der I = treghetsmomentet om snellas akse. Vi har valgt a positiv nedover og positiv ω mot klokka (= den retningen det virkelig går). Når snella rutsjer nedover, rulles snora ut med hastighet $v = \omega r$ (IKKE $v = \omega R$!), og $\dot{\omega} = \dot{v}/r = a/r$. N2-ligningene (IIb) og (IIIb) gir da (vi venter litt med å sette inn for f):

$$Mg \sin \theta - f - S_1 = Ma \quad (1)$$

$$-fR + S_1 r = I(a/r). \quad (2)$$

To ligninger og to ukjente (a og S_1). Eliminerer S_1 fra ligning (1) og setter inn i ligning (2):

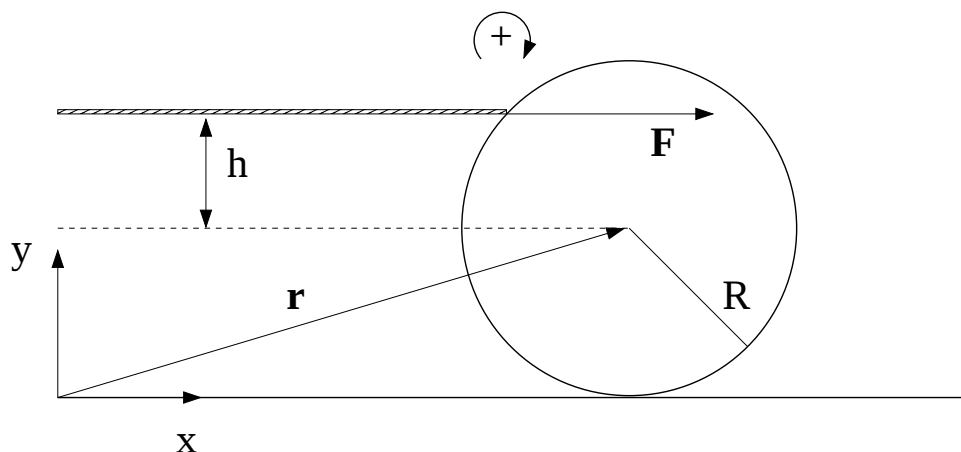
$$S_1 = Mg \sin \theta - f - Ma \xrightarrow{(2)} -fR + Mgr \sin \theta - fr = I(a/r) + Mar. \quad (3)$$

Løsning av a , med litt smarte divisjoner og innsetting av f gir

$$a = g \frac{\sin \theta - \mu_k \cos \theta \left(1 + \frac{R}{r}\right)}{1 + I/(Mr^2)}.$$

Riktig svar: A.

Oppgave 4.



a) Det kortvarige, kraftige støtet gir kula en (lineær) impuls og en dreieimpuls (relativt massesenteret):

$$F\Delta t = M\Delta V = MV_0$$

$$\tau\Delta t = Fh\Delta t = I_0\Delta\omega = I_0\omega_0.$$

Fortegnsvalg: Positiv translasjon i positiv x -retning og positiv rotasjon med klokka, vist i figuren. Vi har som oppgitt neglisjert friksjonskraftens bidrag i det korte tidsrommet Δt , noe som er rimelig unntatt for slag som er veldig svake. En god snookerspiller kan mobilisere en langt større kraft F når *det* er hensiktsmessig. Vi eliminerer den ukjente størrelsen $F\Delta t$ fra de to ligningene, og får derved en relasjon mellom V_0 og ω_0 ,

$$MhV_0 = I_0\omega_0 \Rightarrow V_0 = \frac{2R^2}{5h} \omega_0 \text{ eller } \underline{\omega_0 = \frac{5h}{2R^2} V_0}. \quad (4)$$

Riktig svar: D.

b) Ren rulling forutsetter at $V_0 = R\omega_0$, og denne betingelsen er bare oppfylt når $\underline{h_0/R = +2/5}$. Riktig svar: B.

c) Dersom $h > 2R/5$, vil $\omega_0 > V_0/R$, dvs kula roterer for fort i forhold til ren rulling. Det innebærer at undersiden av kula glir mot venstre på underlaget, og friksjonskraften vil derfor være rettet mot høyre. Retningen kan også fastlegges ved at friksjonskraften forsøker å oppnå perfekt rulling ved å redusere vinkelhastigheten og øke translasjonshastigheten. Med kinetisk friksjon er $f = \mu_k N = \mu_k Mg$; ingen bevegelse vertikalt, så $N = Mg$. Riktig svar: B.

(Dersom $h < 2R/5$, er situasjonen den motsatte: Friksjonskraften virker mot venstre og gir kula rotasjonsakselerasjon og translasjonsretardasjon. For $h < 0$ vil $\omega_0 < 0$, dvs kula roterer "feil" vei. Friksjonen virker fortsatt mot venstre, dvs den forsøker å få kula til å rotere rett vei.)

Velger vi referansepunktet (hvor som helst) langs x -aksen, vil $\mathbf{r}_f \times \mathbf{f} = 0$, der $\mathbf{r}_f$ er $\mathbf{f}$'s angrepspunkt, som er i kontaktpunktet mellom kule og bord. De to vektorene er parallelle. Ingen andre krefter gir noe dreiemoment om origo etter at støtet er avsluttet, og total dreieimpuls relativt origo må derfor være bevart. (Luftmotstanden, som vi har neglisjert, gir selvsagt et ørlite dreiemoment, noe som ødelegger for perfekt dreieimpulsbevarelse.)

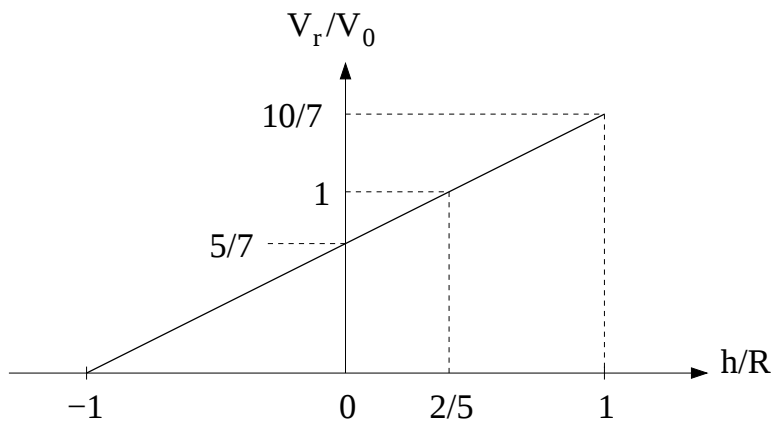
d) Total dreieimpuls blir

$$\begin{aligned} L_z &= L = M[\mathbf{r} \times \mathbf{V}]_z + I_0\omega = MRV + I_0\omega \\ \text{start: } L_0 &= MRV_0 + (2/5)MR^2\omega_0 \stackrel{(4)}{=} MRV_0(1 + h/R) \\ \text{ved ren rulling: } L_r &= MRV_r + (2/5)MR^2 \cdot V_r/R = (7/5)MRV_r. \end{aligned}$$

Da dreieimpulsen er bevart, må vi ha $L_0 = L_r$, som gir hastigheten når ren rulling er oppnådd:

$$\underline{V_r = \frac{5}{7} \left(1 + \frac{h}{R}\right) V_0.} \quad (5)$$

Riktig svar: C.



Når $h/R = +\frac{2}{5}$, finner vi $V_r = V_0$, som vi burde. Når $h/R > \frac{2}{5}$, vil altså massesenterhastigheten øke på vei mot den endelige rullebevegelsen, ellers vil den avta. Merk at $V_r \geq 0$ *alltid*, uansett hvor lavt på kula køen treffer, dvs det er ikke mulig å få kula til å trille tilbake etter at ren rulling er oppnådd. For $h = -R$ (vanskelig i praksis!) stopper kula.

e) Når translasjonshastigheten endres fra V_0 til V_r i løpet av en tid t_r (som skal bestemmes), er det ene og alene friksjonskraften $f = \mu_k Mg$ som gir denne akselerasjonen. Akselerasjonen $a = f/M = \mu_k g$ er konstant, og vi kan bruke konstant-akselerasjonslikningen $V_r = V_0 + at_r$ til å bestemme t_r . Som funnet i b) peker f mot høyre, og a er positiv når $h/R > 2/5$, mens f peker mot venstre og a er negativ når $h/R < 2/5$.

Vi tar for oss tilfellet positiv a :

$$\begin{aligned} V_r &= V_0 + at_r \quad \text{og} \quad V_r = \frac{5}{7} \left(1 + \frac{h}{R}\right) V_0 \\ \Rightarrow t_r &= \frac{1}{a} (V_r - V_0) = \frac{1}{\mu_k g} \left(-\frac{2}{7} + \frac{5}{7} \frac{h}{R}\right) V_0 = V_0 \frac{2}{7\mu_k g} \left(\frac{5}{2} \frac{h}{R} - 1\right) \quad \text{når } h/R > 2/5. \end{aligned}$$

Riktig svar: A.

Når $h/R < 2/5$, blir $a = -\mu_k g$, og fortegnet snus:

$$t_r = V_0 \frac{2}{7\mu_k g} \left(1 - \frac{5}{2} \frac{h}{R}\right) \quad \text{når } h/R < 2/5.$$

Om ønsket kan vi sammenfatte dette til en ligning:

$$t_r = \frac{2V_0}{7\mu_k g} \left|1 - \frac{5}{2} \frac{h}{R}\right| \quad \text{for alle } h/R \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Verdien er 0 *bare* for $h/R = 2/5$, i tråd med det vi visste fra før.

f) Energiberegninger: Først startenergien uttrykt ved translasjonsenergien $\frac{1}{2}MV_0^2$:

$$K_0 = \frac{1}{2}MV_0^2 + \frac{1}{2}I_0\omega_0^2 \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{2}MV_0^2 \left(1 + \frac{5}{2} \frac{h^2}{R^2}\right).$$

Dernest energi for den rullende kula med $\omega_r = V_r/R$:

$$K_r = \frac{1}{2}MV_r^2 + \frac{1}{2}I_0\omega_r^2 = \frac{1}{2}MV_r^2 \cdot \frac{5}{7} \stackrel{(5)}{=} \frac{1}{2}MV_0^2 \cdot \frac{5}{7} \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2.$$

Og vi kan uttrykke energitapet:

$$\Delta K = K_r - K_0 = \frac{1}{2}MV_0^2 \left[\frac{5}{7} \left(1 + 2\frac{h}{R} + \frac{h^2}{R^2}\right) - \left(1 + \frac{5}{2} \frac{h^2}{R^2}\right) \right] = \underline{\underline{-\frac{1}{2}MV_0^2 \cdot \frac{2}{7} \cdot \left(1 - \frac{5}{2} \frac{h}{R}\right)^2}}$$

etter litt algebra. Vi kan også uttrykke relativ energi etter at rulling er oppnådd:

$$\epsilon = \frac{K_r}{K_0} = \frac{\frac{5}{7} \left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}{1 + \frac{5}{2} \frac{h^2}{R^2}}.$$

En kontroll: Med et støt som gir ren rulling ($h/R = 2/5$) er $\epsilon = 1$, dvs ikke energitap. Med $h = -R$ er $\epsilon = 0$, dvs 100% energitap. Dessuten: Med $h = +R$ er $\epsilon = 40/49$ og med $h = 0$ er $\epsilon = 5/7$.

g) Det er konstant akselerasjon slik at lengden som kula glir langs underlaget før ren rulling oppnås, finnes fra gjennomsnittsfarten $\langle V \rangle$:

$$x_r = \langle V \rangle t_r = \frac{1}{2}(V_r + V_0) t_r = \frac{2V_0^2}{49\mu_k g} \left(6 + \frac{5h}{2R}\right) \left|1 - \frac{5h}{2R}\right|,$$

der vi har brukt uttrykk for V_r og t_r ovenfra. Kontroll: $x_r = 0$ når $h/R = 2/5$.

Vi har lært at det kreves relativt omfattende regning for å bestemme t_r eller x_r , mens V_r i pkt d) (og dermed, med litt ekstra faktoreringsstrev, ΔK) faller nesten rett ut ved bruk av dreieimpulsbevarelse.

Det ville også ha vært interessant å analysere bevegelsen etter et støt som treffer til høyre eller venstre for xy -planet. Dette vil gi sidelengs rotasjon (ω vertikal), noe som kan gi en ikkelineær bane. For curlingspillere er vertikal ω viktig for curlingsteinens videre bevegelse. Men det er utfordrende å regne på!

TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til øving 7.

Svingninger

a) Vi antar at Hookes lov, $F = -kx$, gjelder for fjæra. Newtons andre lov gir da

$$-kx = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

eller

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

med $\omega_0^2 = k/m$. Ligningen har løsning $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$, som gitt i oppgaveteksten. Klossen svinger altså med vinkelfrekvens $\omega = \sqrt{k/m}$, og dermed med periode $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$. Riktig svar: C.

b) og c) Amplituden A og fasekonstanten ϕ fastlegger vi ved å bruke de oppgitte initialbetingelsene $x(0) = x_0$ og $v(0) = \dot{x}(0) = v_0$. Vi har

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

slik at

$$x_0 = A \cos \phi$$

og

$$v_0 = -\omega_0 A \sin \phi$$

Herfra er det flere mulige veier å gå. Vi kan for eksempel dele disse to ligningene med hverandre, som gir

$$\phi = -\arctan \frac{v_0}{x_0 \omega_0}$$

og

$$A = \frac{x_0}{\cos \arctan v_0/x_0 \omega_0}.$$

Alternativt kan vi kvadrere de to ligningene og legge dem sammen:

$$1 = \sin^2 \phi + \cos^2 \phi = \frac{v_0^2}{\omega_0^2 A^2} + \frac{x_0^2}{A^2}$$

som gir

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2} = x_0 \sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2}$$

og deretter

$$\phi = \arccos \frac{x_0}{A} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2}}.$$

Altså er både A og B riktige svar på oppgavene b) og c), dvs C er riktig svar.

d) Siden vi ikke har noe damping i systemet, er den totale energien E bevart. (Dvs: Vi har et *konservativt* system.) Da kan vi beregne energien ved et hvilket som helst tidspunkt, for eksempel ved maksimalt utsving, der $x = x_{\max} = A$ og $v = 0$:

$$E = E_p^{\max} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}k(x_0^2 + mv_0^2/k) = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2$$

Dette gjenkjenner vi som summen av potensiell og kinetisk energi ved $t = 0$, $E_{p0} + E_{k0}$, hvilket jo også må tilsvare den totale energien. Riktig svar: C.

e) Skriver vi løsningen på formen $x(t) = B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t$, har vi

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 B \sin \omega_0 t + \omega_0 C \cos \omega_0 t$$

og dermed, ved hjelp av $x(0) = x_0$ og $\dot{x}(0) = v_0$,

$$B = x_0 \quad \text{og} \quad C = v_0/\omega_0$$

Riktig svar: B.

f) Maksimalt utsving:

$$x_{\max} = A = x_0 \sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2} = x_0 \sqrt{1 + E_{k0}/E_{p0}}$$

Maksimal hastighet:

$$v_{\max} = \omega_0 A = \sqrt{\frac{k}{m} (x_0^2 + mv_0^2/k)} = v_0 \sqrt{1 + kx_0^2/mv_0^2} = v_0 \sqrt{1 + E_{p0}/E_{k0}}$$

Med oppgitte tallverdier:

$$E_{p0} = 0.5 \cdot 10 \cdot 0.010^2 = \frac{1}{2000} \quad , \quad E_{k0} = 0.5 \cdot 0.100 \cdot 0.10^2 = \frac{1}{2000}$$

begge i enheten J, ettersom vi kun har brukt SI-enheter underveis. Følgelig er $x_{\max} = \sqrt{2}x_0 \simeq 1.4$ cm og $v_{\max} = \sqrt{2}v_0 \simeq 14$ cm/s. Riktig svar: A.

g) Bevegelsesligning for klossen:

$$m\ddot{y} = -ky + mg$$

Her har vi valgt positiv y -retning nedover. Uten tyngdefelt til stede ($g = 0$) er klossens likevektsposisjon $y = 0$. I tyngdefeltet bestemmes den nye likevektsposisjonen Δy ved å sette total kraft lik null, følgelig

$$\begin{aligned} -k\Delta y + mg &= 0 \\ \Delta y &= mg/k \end{aligned}$$

Med ny posisjonsvariabel

$$z = y - \Delta y$$

får vi bevegelsesligningen

$$m\ddot{z} = -k(z + \Delta y) + mg = -kz$$

som betyr at klossen vil svinge harmonisk med vinkelfrekvens $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ omkring likevektsposisjonen $z = 0$, dvs $y = \Delta y = mg/k$. (Med tallverdiene fra oppgave 1 har vi $\Delta x = 0.100 \cdot 9.8/10 = 9.8$ cm.) Riktig svar: A.

h) Fra figuren ser vi f.eks. at $x(0) = 1$ og $x(5T) = 0.5$, der T er svingningens periode. Dermed:

$$\begin{aligned} e^{-5T/\tau} &= e^{-5 \cdot 2\pi/\omega\tau} = 0.5 \\ \Rightarrow \frac{10\pi}{\omega\tau} &= \ln 2 \\ \Rightarrow \omega\tau &= 45 \end{aligned}$$

Riktig svar: D.

i) Med utsving x fra likevektsstilling er kraften på massen m de to fjærkreftene $-k_1x$ og $-k_2x$. N2 gir svingeligningen

$$-k_1x - k_2x = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \left(\frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m}\right)x = 0.$$

Sammenligning med "standardligningen" $\ddot{x} + \omega^2x = 0$ gir at svingefrekvensen ω er gitt av

$$\omega^2 = \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} = \omega_1^2 + \omega_2^2, \quad \text{alts} \quad \omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

Sammenligning med $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ viser også at effektiv fjærstivhet for parallellkoblede fjærer er $k = k_1 + k_2$. Riktig svar: C.

j) Når m forskyves x mot høyre, strekkes fjærene x_1 og x_2 , og slik at x_1 og x_2 er forskjellige dersom $k_1 \neq k_2$. Kraften F på massen m forplanter seg gjennom begge fjærene med samme strekk (N3 og masseløse fjærer). Dermed er $F = -k_1x_1 = -k_2x_2$, som gir $x = x_1 + x_2 = -(1/k_1 + 1/k_2)F$. Dermed er kraften som virker på klossen lik

$$F = -\frac{1}{1/k_1 + 1/k_2}x = -\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}x$$

og N2 gir

$$-\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}x = m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k_1k_2}{(k_1 + k_2)m}x = 0.$$

Sammenligning med $\ddot{x} + \omega^2x = 0$ gir at svingefrekvensen ω er gitt av

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{(k_1 + k_2)m}{k_1k_2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_1^2\omega_2^2}, \quad \text{alts} \quad \omega = \frac{\omega_1\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}.$$

Sammenligning med $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ viser også at effektiv fjærstivhet for seriekoblede fjærer er $k = \frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}$. Riktig svar: B.

k) Med utsving x fra likevektsstilling vil høyre fjær k_2 presses sammen x og gi en kraft $-k_2x$ mot venstre på massen. Venstre fjær vil strekkes x og gi en kraft $-k_1x$ mot venstre. Krefteene er altså de samme som i a), og $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$. Riktig svar: C.

TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til øving 8.

Oppgave 1

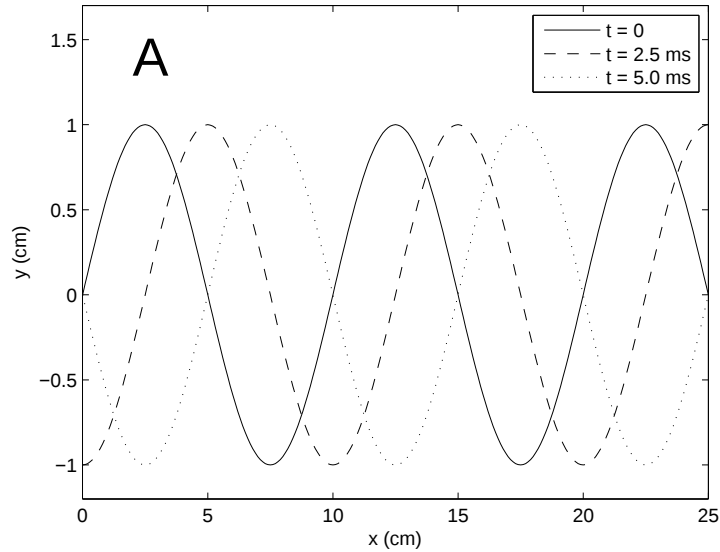
a)

$$y = A \sin(kx - \omega t) = A \sin \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right] \quad (1)$$

med $A = 1.0$ cm, $T = 2\pi/\omega = 10$ ms og $\lambda = 2\pi/k = 10$ cm. Med følgende linjer i Matlab, der bølgetallet angis med enhet cm^{-1} og vinkelfrekvensen med enhet ms^{-1} ,

```
%TFY4106 Fysikk 2014.  
%ving 8, oppgave 1a: Plotting av harmonisk blge  
%y(x,t) = A sin(kx - wt)  
%som funksjon av x mellom x=0 og x=25 cm, for de tre  
%tidspunktene t=0, t=2.5 ms og t=5.0 ms.  
%  
clear all;  
%A = amplituden (cm)  
A = 1.0;  
%k = blgetallet (1/cm)  
k = 2*pi/10;  
%w = vinkelfrekvensen (1/ms)  
w = 200*pi/1000;  
%x = posisjonstabell (cm)  
x = 0:0.1:25;  
%t = tidstabell (ms)  
t = 0:2.5:5.0;  
%y = tabell (matrise) med alle verdier for y(x,t)  
for n = 1:3  
    y(:,n) = A*sin(k*x-w*t(n));  
end;  
%Plotter y(x,t) for de tre tidspunktene  
plot(x,y(:,1),'-k',x,y(:,2),'--k',x,y(:,3),' :k');  
handle=legend('t = 0','t = 2.5 ms','t = 5.0 ms');  
label=('A');  
text(2,1.4,label,'FontSize',28);  
xlabel('x (cm)');  
ylabel('y (cm)');  
axis([0 25 -1.2 1.7]);
```

får vi denne figuren:



Riktig svar: A

b) Siden $y = y(x - vt)$ (med $v = \omega/k$), forplanter bølgen seg i positiv x -retning. Riktig svar: A

c) Utsvinget vil bli det samme som for $t = 0$ for hver hele periode, dvs for $t = nT = 10n$ ms, der $n = 1, 2, 3, \dots$ Riktig svar: D

d) Vi ser av figuren ovenfor, og har allerede i punkt a slått fast at $T = 10$ ms. Riktig svar: D

e) Vi ser av figuren ovenfor, og har allerede i punkt a slått fast at $\lambda = 10$ cm. Riktig svar: C

f) En bølgetopp forplanter seg en bølgelengde $\lambda = 10$ cm på en periode $T = 10$ ms. Altså er fasehastigheten

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0.10 \text{ m}}{0.010 \text{ s}} = 10 \text{ m/s}$$

Riktig svar: D

g) Hastigheten til strengementene (i y -retning) er gitt ved:

$$v_p = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (A \sin(kx - \omega t)) = -\omega A \cos(kx - \omega t). \quad (2)$$

Maksimalverdien av $\cos(kx - \omega t)$ er 1. Altså er maksimalhastighet for et strengement:

$$v_p^{\max} = \omega A = 200\pi \text{ s}^{-1} \cdot 0.010 \text{ m} = 2\pi \text{ m/s} \approx 6.3 \text{ m/s}$$

Riktig svar: D

h)

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (A \sin(kx - \omega t)) = \frac{\partial}{\partial t} (-\omega A \cos(kx - \omega t)) = -\omega^2 A \sin(kx - \omega t) \quad (3)$$

som har maksimalverdi

$$a^{\max} = \omega^2 A = (200\pi \text{ s}^{-1})^2 \cdot 0.010 \text{ m} = 3.9 \cdot 10^3 \text{ m/s}^2.$$

Riktig svar: A

i) Vi har

$$\sin u = \cos\left(u - \frac{\pi}{2}\right).$$

Derfor, dersom vi velger $\phi = -\pi/2$, vil $y = A \cos(kx - \omega t + \phi)$ beskrive samme bølge som $y = A \sin(kx - \omega t)$.
Riktig svar: D

Merknad: Fra (1), (2) og (3) har vi

$$\begin{aligned} y &= A \sin(kx - \omega t) \\ v_p &= -\omega A \cos(kx - \omega t) = -\omega A \sin\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \omega A \sin\left(kx - \omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \omega A \sin\left[kx - \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right] \\ a &= -\omega^2 A \sin(kx - \omega t) = \omega^2 A \sin(kx - \omega t - \pi) = \omega^2 A \sin[kx - (\omega t + \pi)]. \end{aligned}$$

Med andre ord kan vi si at a i tid er faseforskjøvet $\pi/2$ foran v_p som igjen er faseforskjøvet $\pi/2$ foran y .

Oppgave 2

a)

$$\begin{aligned} y_3 &= y_1 + y_2 \\ &= A \cos(kx - \omega t + \phi_1) + A \cos(kx - \omega t + \phi_2) \\ &= 2A \cos \frac{kx - \omega t + \phi_1 + kx - \omega t + \phi_2}{2} \cdot \cos \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \\ &= 2A \cos\left(kx - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \cos \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \\ &= A_3 \cos(kx - \omega t + \phi_3) \end{aligned} \tag{4}$$

der vi har satt

$$A_3 \equiv 2A \cos \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \equiv 2A \cos \frac{\Delta\phi}{2} \tag{5}$$

$$\phi_3 = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \tag{6}$$

Riktig svar: B

b) $|A_3|$ har maksimalverdi når

$$\left| \cos \frac{\Delta\phi}{2} \right| = 1,$$

dvs når $\Delta\phi/2 = n \cdot \pi, n = 0, 1, 2, \dots$, dvs når $\Delta\phi = n \cdot 2\pi, n = 0, 1, 2, \dots$

$|A_3|$ har minimalverdi nr

$$\cos \frac{\Delta\phi}{2} = 0,$$

dvs når $\Delta\phi/2 = (2n + 1) \cdot \pi/2, n = 0, 1, 2, \dots$, dvs når $\Delta\phi = (2n + 1) \cdot \pi, n = 0, 1, 2, \dots$

Riktig svar: B

c) Med de beregnede faseforskjellene fra punkt b) finner vi at $|A_3|^{\max} = 2A$ (bølgene adderes i fase) og $|A_3|^{\min} = 0$ (bølgene adderes i motfase). Riktig svar: A

Oppgave 3

a) Bølgehastigheten for transversale bølger på en streng er utledet i forelesningene. Vi får

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}} = \sqrt{\frac{8.5}{0.028}} \simeq 17 \text{ m/s}$$

Riktig svar: A

b)

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

som gir bølgelengden

$$\lambda = \frac{v}{f} \simeq 17 \text{ m}$$

Riktig svar: A

c) Vi har ikke dispersjon i dette systemet, så v er den samme for alle bølger, uansett frekvens. Riktig svar: A

d) Ettersom λ er omvendt proporsjonal med f , vil en frekvens på 3.0 Hz resultere i en bølgelengde på ca 5.8 m. Riktig svar: D

e) og f) Vi har harmoniske bølger som kan beskrives ved

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \phi)$$

der $k = 2\pi/\lambda$ er bølgetallet og ϕ en fasekonstant. Vi velger $x = 0$ ved svingekilden og har

$$y(0, t) = A \cos(-\omega t + \phi) = A \cos \omega t$$

som gir $\phi = 0$ siden $\cos u = \cos(-u)$. Dermed er bølgen beskrevet ved

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$$

For $x = 1.0$ og $x = 5.0$ m får vi

$$y(1.0, t) \simeq A \cos\left(2\pi \frac{1.0}{17} - 2\pi t\right)$$

$$y(5.0, t) \simeq A \cos\left(2\pi \frac{5.0}{17} - 2\pi t\right)$$

med t målt i sekunder. Riktig svar: B (på begge)

g) Faseforskjellen mellom utsvinget i disse to posisjonene er

$$\Delta\phi = \frac{8\pi}{17} \simeq 1.4 \simeq 83^\circ$$

Riktig svar: C

Oppgave 4

a) Små transversale utsving på en slik streng oppfyller bølgeligningen

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\mu}{S} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

og det eneste vi krever av funksjonen $\xi(x, t)$ er at den kan skrives på formen $f(x - vt)$ eller $g(x + vt)$, eller en kombinasjon av disse to, der f og g er vilkårlige to ganger deriverbare funksjoner. Den oppgitte gaussformede bølgepulsen er på en slik form ($\xi(x - vt)$) og representerer dermed en mulig bølgepuls langs strengen. Riktig svar: A

b) Bølgen propagerer i positiv x -retning. Riktig svar: A

c) Som utledet i forelesningene, og som vi ser av ligningen ovenfor, har vi

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

(Uttrykket på høyre side har dimensjon

$$\sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{m/s}^2}{\text{kg/m}}} = \sqrt{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \text{m/s}$$

som er det vi skal ha.) Riktig svar: B

d) Bølgepulsens energi endrer seg ikke med tiden. Vi kan derfor beregne E for et hvilket som helst tidspunkt, for eksempel $t = 0$. Med energi $\varepsilon(x, 0) dx$ på intervallet $(x, x + dx)$, må total energi være

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x, 0) dx.$$

Vi har, med $t = 0$,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \xi_0 (-2x/a^2) e^{-x^2/a^2},$$

som gir

$$\varepsilon(x, 0) = \frac{2\mu v^2 \xi_0^2}{a^2} \frac{2x^2}{a^2} e^{-2x^2/a^2}.$$

Vi substituerer $\beta = \sqrt{2}x/a$ som gir (med $dx = a d\beta/\sqrt{2}$)

$$E = \frac{2\mu v^2 \xi_0^2}{\sqrt{2}a} \int_{-\infty}^{\infty} \beta^2 e^{-\beta^2} = \frac{2\mu v^2 \xi_0^2}{\sqrt{2}a} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi} \mu v^2 \xi_0^2}{\sqrt{2}a}$$

Så til tross for at det er fristende å insistere på alternativ D: Riktig svar er: C

TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til øving 9.

Oppgave 1

a) Svar C er korrekt. Fasehastigheten er gitt ved

$$v = \frac{\omega}{k}$$

og vi ser fra figuren at dette forholdet er størst for små verdier av k , dvs for lange bølgelengder.

b) Svar B er korrekt. Bølgehastigheten er gitt ved

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

slik at en endring i S til $S + \Delta S$ gir hastigheten

$$\begin{aligned} v' &= \sqrt{\frac{S + \Delta S}{\mu}} = \sqrt{\frac{S(1 + \Delta S/S)}{\mu}} \\ &= \sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot \sqrt{1 + \Delta S/S} \simeq \sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot (1 + \Delta S/2S) = v \cdot (1 + \Delta S/2S) \end{aligned}$$

Følgelig er

$$\Delta v = v' - v = v \Delta S/2S$$

c) Svar A er korrekt. Bølgehastigheten er gitt ved

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

slik at en endring i μ til $\mu + \Delta\mu$ gir hastigheten

$$\begin{aligned} v' &= \sqrt{\frac{S}{\mu + \Delta\mu}} = \sqrt{\frac{S}{\mu(1 + \Delta\mu/\mu)}} \\ &= \sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta\mu/\mu}} \simeq \sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot (1 - \Delta\mu/2\mu) = v \cdot (1 - \Delta\mu/2\mu) \end{aligned}$$

Følgelig er

$$\Delta v = v' - v = -v \Delta\mu/2\mu$$

d) B

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 10 \log \frac{I_1}{I_0} \\ \Rightarrow \frac{\beta_1}{10} &= \log I_1 - \log I_0 \\ \beta_2 &= 10 \log \frac{I_2}{I_0} = \beta_1 + 5 \\ \Rightarrow \frac{\beta_1}{10} + \frac{1}{2} &= \log I_2 - \log I_0 \\ \Rightarrow \log I_2 - \log I_1 &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \frac{I_2}{I_1} &= 10^{1/2} \simeq 3.16 \end{aligned}$$

e) C

Intensiteten er proporsjonal med utsvingsamplituden kvadrert, mens trykkamplituden er proporsjonal med utsvingsamplituden. Dermed blir intensiteten proporsjonal med trykkamplituden kvadrert, og vi finner

$$\frac{p_2}{p_1} = \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} = 10^{1/4} \simeq 1.78$$

f) D

$$\begin{aligned} I &= \frac{P}{A_{\text{halvkule}}} = \frac{P}{2\pi r^2} = \frac{0.2}{2\pi \cdot 4^2} \simeq 2.0 \text{ mW/m}^2 \\ \Rightarrow \beta &= 10 \log \frac{2.0 \cdot 10^{-3}}{10^{-12}} = 93 \text{ dB} \end{aligned}$$

Oppgave 2

a) Bølgelengden:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{330}{1000} \text{ m} = 33 \text{ cm}$$

Riktig svar: C

b) Intensitetsnivået β målt i dB er definert ved

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0},$$

der referanseintensiteten $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$. Med $I = 10^{-9} \text{ W/m}^2$ har vi

$$\beta = 10 \log \frac{10^{-9}}{10^{-12}} = 10 \cdot 3 = 30 \text{ dB}.$$

Riktig svar: C

c) Intensiteten I tilsvarer en midlere effekt P pr flateenhet A . Vi anslår trommehinnens areal til f.eks 0.5 cm^2 . Effekten som mottas på en slik flate blir dermed

$$P = I \cdot A = 10^{-9} \text{ W/m}^2 \cdot 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 5 \cdot 10^{-14} \text{ W}.$$

(Som er under forutsetning av at lydbølgen faller normalt inn mot trommehinnen.) Riktig svar: A

d) Sammenhengen mellom intensiteten I og utsvingsamplituden ξ_0 har vi utledet i forelesningene:

$$I = \bar{\epsilon} v = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2 v.$$

Her er ρ luftas massetetthet, ω er vinkelfrekvensen, og v er bølgehastigheten. Dermed:

$$\xi_0 = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{\frac{2I}{\rho v}} = \frac{1}{2000\pi} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-9}}{1.3 \cdot 330}} \text{ m} \simeq 0.34 \text{ nm}.$$

Utsvinget er altså her av samme størrelsesorden som molekylenes diameter. Riktig svar: D

e) Trykkendringen Δp er relatert til utsvinget ξ (se forelesningene):

$$\Delta p = -B \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

der B er luftas bulkmodul. Med en plan harmonisk bølge får vi

$$\Delta p(x, t) = -Bk\xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

med amplitude

$$\mathcal{P}_0 = Bk\xi_0 = 1.42 \cdot 10^5 \cdot \frac{2\pi}{0.33} \cdot 0.34 \cdot 10^{-9} \simeq 0.9 \text{ mPa}.$$

Riktig svar: B

f) Trykkvariasjonen relativt likevektstrykket $p_0 = 1 \text{ atm} = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ blir

$$\frac{\mathcal{P}_0}{p_0} = \frac{0.9 \cdot 10^{-3}}{1.013 \cdot 10^5} = 9 \cdot 10^{-9}.$$

Ikke rare greiene! Riktig svar: A

Oppgave 3

a) Grunntonen på en svingende streng som er festet i begge ender har bølgelengde $\lambda = 2L$, der L er strengens lengde. En bestemt frekvens f oppnås da ved å sørge for at bølgehastigheten blir

$$v = \lambda f = 2fL.$$

Samtidig vet vi at v er bestemt ved strammingen S og strengens masse pr lengdeenhet μ :

$$v = \sqrt{S/\mu}.$$

Strammingen må derfor være

$$\begin{aligned} S &= \mu v^2 \\ &= \frac{m}{L} \cdot 4f^2 L^2 \\ &= 4mf^2 L \\ &= 4 \cdot 0.0002 \cdot 440^2 \cdot 0.370 \\ &\simeq 57.3 \text{ N}. \end{aligned}$$

Riktig svar: B

b) Stående lydbølger i et tynt luftfylt rør som er åpent i begge ender, har knutepunkt, $\Delta p = 0$, for trykkbølgen i begge ender, dvs i $x = 0$ og i $x = L$, der $L = 0.5 \text{ m}$ i dette tilfellet. Utsvingsbølgen ξ har dermed maksimal amplitude (buk) i begge ender. Laveste resonansfrekvens (grunntonen) må dermed ha bølgelengde $\lambda = 2L = 1.0 \text{ m}$. Med lydhastighet $v = 340 \text{ m/s}$ blir laveste resonansfrekvens

$$f = v/\lambda = 340 \text{ Hz}.$$

Riktig svar: A

c) Rørets resonansfrekvenser er $f_n = n \cdot 340$ Hz, med $n = 1, 2, \dots$. Resonans nr n har n knutepunkter for den stående utsvingsbølgen ξ . Altså 4 knutepunkter for moden med frekvens 1360 Hz. Riktig svar: C

d) Vi kan tenke på dette systemet som tvungne svingninger: Den vibrerende gitarstrengen virker som en ekstern harmonisk kraft på luftmolekylene omkring, som dermed tvinges til å svinge fram og tilbake med samme frekvens som den vibrerende strengen. Bølgehastigheten er bestemt ved mediets elastiske egenskaper og mediets massetetthet og er generelt forskjellig for strengen og lufta. Dermed blir også bølgelengden $\lambda = v/f$ generelt forskjellig. Når det gjelder amplituden, vil det nok være en sammenheng mellom disse, for et kraftigere anslag på strengen resulterer jo i sterkere lyd. Men som vi har sett i en tidligere øving, vil utsvingsamplituden til luftmolekylene typisk være av størrelsesorden noen få nanometer (med lydintensitet godt under smertegrensen), som åpenbart er mye mindre enn typiske amplituder på en vibrerende gitarstreng. Riktig svar: D

Oppgave 4

At vandretiden τ kun avhenger av strengens omløpsperiode T , og ikke av lengden L eller massen M , kan vi slå fast med ren dimensjonsanalyse: Problemet inneholder kun størrelsene T , M og L . Det går ikke an å lage størrelser med enhet s (sekund) ved å kombinere kg og m. Da gjenstår bare T .

Bølgehastigheten er $v = \sqrt{S/\mu} = \sqrt{SL/M}$. Snordraget $S(r)$ i avstand r fra festepunktet er den kraften som skal til for å holde strengbiten mellom r og L i sirkulær bane med vinkelfrekvens $\omega = 2\pi/T$, dvs akselerasjon $a(r') = \omega^2 r'$:

$$\begin{aligned} S(r) &= \int a \, dm = \int_r^L \omega^2 r' \frac{M}{L} dr' \\ &= \frac{\omega^2 M}{2L} (L^2 - r^2) \end{aligned}$$

Med $S(r)$ på plass skulle resten være grei skuring! Bølgehastigheten blir

$$v(r) = \sqrt{S(r)L/M} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \sqrt{L^2 - r^2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{T} \sqrt{L^2 - r^2}.$$

Tiden som en bølgepuls bruker fra festepunktet til strengens ende blir dermed

$$\begin{aligned} \tau &= \int \frac{dr'}{v} \\ &= \frac{T}{\sqrt{2}\pi} \int_0^L \frac{dr'}{\sqrt{L^2 - r'^2}} \\ &= \frac{T}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Her følger en noe mer utdypende forklaring:

Vi betrakter en liten bit av strengen, mellom r og $r + dr$, og med masse $dm = dr \cdot M/L$. På denne lille biten virker det en kraft *innover mot sentrum* på grenseflaten ved r (fra masseelementet rett innenfor) og en kraft *utover* på grenseflaten ved $r + dr$ (fra masseelementet rett utenfor). Disse to kreftene må nettopp være snordraget $S(r)$ og $S(r + dr)$, slik at nettokraften, innover, på vårt lille masseelement må være:

$$dF = S(r) - S(r + dr).$$

Ifølge Newtons 2. lov har vi

$$dF = dm \cdot a = \frac{M}{L} dr \omega^2 r.$$

Den totale kraften på strengbiten som befinner seg mellom r og L blir da

$$F(r) = \int dF = \frac{M\omega^2}{L} \int_r^L r \, dr = \frac{M\omega^2}{2L} (L^2 - r^2).$$

Men denne kraften $F(r)$ må nettopp tilsvare snordraget i avstand r , dvs $F(r) = S(r)$. Dvs, snordraget i r er lik nettokraften på strengen mellom r og L . (Del f.eks opp biten mellom r og L i små biter med lengde dr . I hver grenseflate mellom slike små biter virker biten til venstre på den til høyre med en like stor men motsatt rettet kraft som omvendt, Newtons 3. lov, slik at kraften i den venstre enden, $S(r)$, er lik total kraft på hele strengen utenfor r .)

Med $S(r)$ på plass henvises til avslutningen på den ”offisielle” versjonen ovenfor.

TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til øving 10.

Oppgave 1. Dopplereffekt. Svevning. Interferens.

a) Så lenge $v_O = v_S = 0$, spiller det ingen rolle om det blåser. Observatøren vil måle samme frekvens som kilden (S) sender ut. Riktig svar: B.

b) Veggen står i ro og ”observerer” bølgen som sendes ut av flaggermusen. Frekvensen f_V mottatt av veggen er

$$f_V = \frac{v}{v - v_F} f_F = \frac{340}{340 - 10} \cdot 100 \text{ kHz} = 103.03 \text{ kHz}.$$

Veggen reflekterer, dvs sender tilbake mot flaggermusen, en bølge med denne frekvensen. Nå er veggen en bølgekilde i ro, mens flaggermusen er en observatør i bevegelse, *mot* kilden (veggen). Dermed hører flaggermusen et ekko med frekvens

$$f_E = \frac{v + v_F}{v} f_V = \frac{350}{340} \cdot 103.03 \text{ kHz} \simeq 106 \text{ kHz}.$$

Riktig svar: B.

c) Her er sveveperioden $T_s = 1$ s. Dermed er svevefrekvensen $f_s = 1/T_s = 1$ Hz. Dette tilsvarer frekvensforskjellen mellom de to lydbølgene fra hhv stemmegaffelen (440 Hz) og pianoets A-streng. Du kan imidlertid ikke vite om A-strengen svinger med frekvens 439 Hz eller 441 Hz. Riktig svar: D.

d) To lydkilder som svinger i fase med samme frekvens gir konstruktiv interferens (max intensitet) dersom bølgene har en veilengdeforskjell lik et helt antall bølgelengder λ . Med avstand d mellom lydkildene og vinkel θ mellom senterlinjen (med lengde 20 m; se figuren i oppgaven) og en linje fra (midtpunktet mellom) høyttalerne til observatøren, blir veilengdeforskjellen, med god tilnærming, lik $d \sin \theta$. Max intensitet høres derfor av dem som sitter slik til at $\theta = 0$ eller

$$\theta = \arcsin(d/n\lambda),$$

med $n = 1, 2, \dots$. Destruktiv interferens (min intensitet) oppnås med veilengdeforskjell $(n+1/2)\lambda$, og dermed av dem som sitter slik til at

$$\theta = \arcsin(d/(n+1/2)\lambda).$$

Med $d = 1$ m og $\lambda = v/f = 340/3400 = 0.1$ m har vi max intensitet i retningene $\theta_{\max} = 0, \pm 5.7^\circ, \pm 11.5^\circ, \pm 17.5^\circ$ osv. Minimal intensitet har vi i retningene $\theta_{\min} = \pm 2.9^\circ, \pm 8.6^\circ, \pm 14.5^\circ$ osv. Bjarne sitter ved $\theta_B = 0$ og hører dermed max intensitet. Anne sitter ved $\theta_A = \arctan(5.2/20) = 14.6^\circ$, som er tilstrekkelig nær 14.5° til å fastslå at hun hører minimal intensitet. Camilla sitter ved $\theta_C = \arctan(-3.0/20) = -8.5^\circ$, så hun hører også minimal intensitet. Endelig har vi Dag som sitter ved $\theta_D = \arctan(-6.3/20) = 17.5^\circ$, så Dag hører max intensitet. Riktig svar: B.

Oppgave 2. Termisk fysikk: Ideell gass. Volumutvidelse.

a) Hvis du vet, eller finner ut, at luft har massetetthet ca $1.2 - 1.3 \text{ kg/m}^3$ (mindre tetthet ved høyere temperatur), er det bare å gange med volumet på ca $10 \text{ m}^2 \times 2.4 \text{ m}$, dvs ca 24 m^3 . Dette gir en masse omkring 30 kg.

Med ideell gass: $pV = Nk_B T$ gir antall molekyler pr volumenhet (ved 300 K)

$$\rho = N/V = p/k_B T = 1.013 \cdot 10^5 / (1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300) \simeq 2.45 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}.$$

Vi trenger midlere masse pr molekyl. Med ca 20 prosent oksygen og resten nitrogen blir dette ca 29 g/mol, som er ca $4.8 \cdot 10^{-26}$ kg pr molekyl. Dermed

$$\mu = \langle m \rangle \rho \simeq 1.18 \text{ kg/m}^3.$$

Riktig svar: C.

b) En høydeendring på 1 cm, som gir en temperaturendring på 1 grad, krever en volumendring

$$\Delta V = A \cdot h = \pi r^2 \cdot h \simeq 0.4\pi \text{ mm}^3.$$

Totalt volum sprit må da være

$$V = \frac{\Delta V}{\beta \Delta T} = 400\pi \text{ mm}^3 \simeq 1.3 \text{ mL}.$$

Riktig svar: A.

c) Trykket i 1 mol ideell gass ved 20°C og volum 24.0 L:

$$p = \frac{RT}{V} = \frac{8.314 \cdot 293}{24.0 \cdot 10^{-3}} \text{ Pa} = 1.015 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ atm}.$$

Riktig svar: A.

Oppgave 3. Atmosfæren på Mars

a) Vi ser på en luftsøyle med tverrsnitt A og høyde dz , og dermed masse $dM = \mu A dz$ når massen pr volumenhet er μ . Vekten av denne luftsøylen er $dM g = \mu A dz g$, som må tilsvare forskjellen dF i kraften (nedover) på luftsøylens nedre og øvre flate. Siden trykket pr definisjon er kraft pr flateenhet, må $dp = -dF/A = -\mu dz g$ bli endringen i trykket hvis vi forflytter oss fra høyde z til høyde $z + dz$. Av dette følger det oppgitte uttrykket $dp/dz = -\mu g$.

b) Hvis m er gassens masse pr mol, er nm massen til n mol gass. Og hvis n mol gass okkuperer volumet V , blir da masse pr volumenhet $\mu = nm/V$. Dermed: $pV = nRT \Rightarrow p/RT = n/V = \mu/m$, i samsvar med oppgitt uttrykk for μ .

c) Fra a) har vi $dp/dz = -\mu g$, og med resultatet i b) betyr det at $dp/p = -mgdz/RT$. Integrasjon på begge sider, på venstre side fra $p(0) = p_0$ til $p(z)$ og på høyre side fra $z = 0$ til z , gir $\ln[p(z)/p_0] = -\int_0^z mg(z')dz'/RT(z')$, som etter eksponentiering på begge sider gir det oppgitte uttrykket for $p(z)$ med oppgitt skalahøyde $H(z)$.

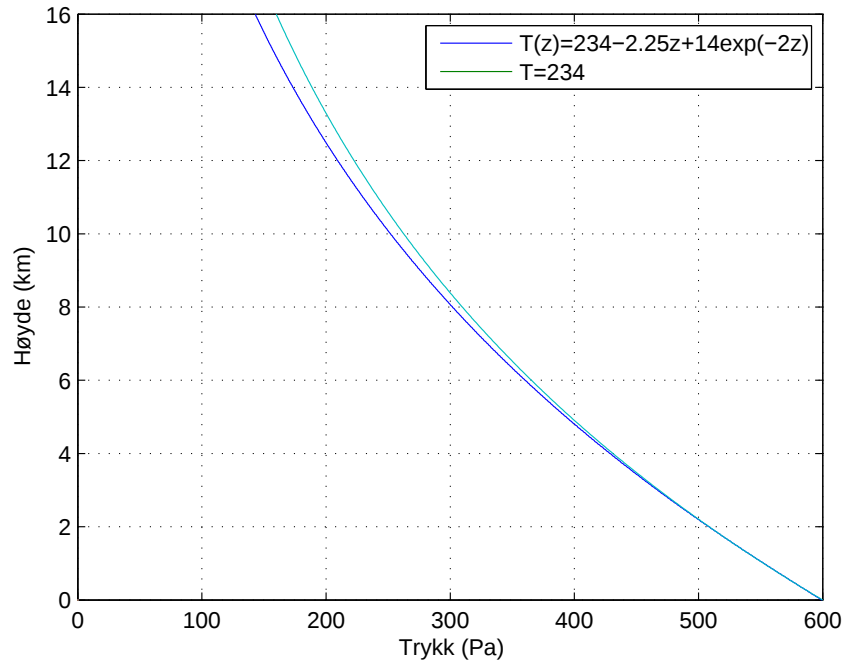
d) Innsetting av oppgitte tallverdier for R , T , m og g gir $H = 12.1$ km. Integralet i c) blir da lik 1, slik at $p(H)/p_0 = 1/e$.

e) og f) Se martian_atmosphere.m. Figuren nedenfor viser at trykkprofilen blir ganske riktig ved å bruke konstant temperatur 234 K, med økende feil ved store høyder.

Merknad: Numerisk løsning av integralet

$$\int_0^z \frac{dz'}{T(z')}$$

med Simpsons metode fordrer at intervallet fra 0 til z deles inn i et like antall intervaller, dvs med et odde antall diskretiserte høydeverdier, endepunktene 0 og z inkludert. Dette skyldes at metoden er basert på å trekke parabler mellom nest nærmeste nabo høydeverdier. Denne begrensningen har vi ikke med trapesmetoden, der rette linjer trekkes mellom nærmeste nabo høydeverdier.



Figur 1: Trykk som funksjon av høyde over bakken på planeten Mars, beregnet med utgangspunkt i en realistisk temperaturprofil og med bruk av konstant temperatur.

I programmet `martian_atmosphere.m` brukes Simpsons metode for å bestemme annenhver verdi for $p(z)$, dvs for de høydeverdiene som tilsvarer at antall intervaller er et partall. For de resterende høydeverdiene brukes trapesmetoden. Det ville selvsagt ha vært enklere å bruke trapesmetoden for alle verdier av z . Merk at de to første høydene, $z = 0$ og $z = h$, må behandles separat, ettersom iterasjonsprosessen først kan startes med to verdier på plass, en for iterasjon med trapesmetoden og en for iterasjon med Simpsons metode.

TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til øving 11.

1) Med de gitte antagelsene blir Clapeyrons ligning (med $pV_g = RT$)

$$\frac{dp}{dT} = \frac{l}{T(V_g - V_v)} \simeq \frac{l}{TV_g} = \frac{lp}{RT^2},$$

som integrert gir (med $l \simeq$ konstant)

$$p = \text{konst} \cdot e^{-l/RT}.$$

Integrasjonskonstanten bestemmes ved at $p = p_0 = 4.58$ mm Hg ved $T = T_0 = 273$ K. Dette gir

$$p = p_0 \exp \left[\frac{l}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right].$$

Løsning mhp T gir, for $p = 760$ mm Hg:

$$T = T_0 \left[1 - \frac{RT_0}{l} \ln(p/p_0) \right]^{-1} = 273 \left[1 - \frac{8.314 \cdot 273}{40.7 \cdot 10^3} \ln(760/4.58) \right]^{-1} \simeq 382,$$

dvs 382 K, eller 109°C. Grunnen til at beregnet kokepunkt blir for høyt er at molar fordampningsvarme l ikke er konstant, men øker med avtagende temperatur. Riktig svar: C

2) Med antagelsene om konstant fordampningsvarme l , neglisjerbart væskevolum, og at dampen er ideell gass, følger det av Clapeyrons ligning at damptrykket blir

$$p = C \exp(-l/RT),$$

der C er en konstant. Med oppgitte data får en ligningene

$$\begin{aligned} p_1 &= C \exp(-l/RT_1) \\ p_2 &= C \exp(-l/RT_2). \end{aligned}$$

Divisjon gir

$$\frac{p_2}{p_1} = \exp \left[\frac{l}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \right],$$

som løst mhp l gir

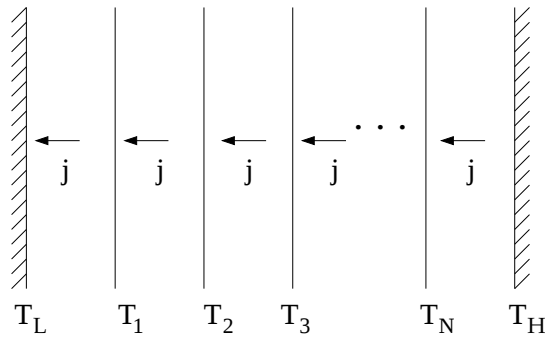
$$l = R \frac{\ln(p_2/p_1)}{1/T_1 - 1/T_2} = 8.314 \frac{\ln(12139/4402)}{1/273 - 1/293} \text{ J/mol} = 33.7 \text{ kJ/mol}.$$

Riktig svar: B

3) Med $C = p_2 \exp(l/RT_2)$ blir damptrykket ved $T = 30^\circ\text{C} = 303$ K:

$$p = p_2 \exp \left[\frac{l}{R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T} \right) \right] = 12139 \text{ Pa} \exp \left[\frac{33.7 \cdot 10^3}{8.314} \left(\frac{1}{293} - \frac{1}{303} \right) \right] = 19.2 \text{ kPa}.$$

Den eksperimentelle verdien ved denne temperaturen er litt mindre, 18676 Pa. Dette henger sammen med at l avtar med økende T , som også påpekt i oppgave 1. Riktig svar: D



4) Ved stasjonære forhold er varmestrommen j mellom skjoldene den samme overalt. Med Stefan-Boltzmanns lov er netto varmestrom pr flateenhet i

$$\begin{aligned}
 \text{1. intervall : } j &= \sigma(T_1^4 - T_L^4) \\
 \text{2. intervall : } j &= \sigma(T_2^4 - T_1^4) \\
 &\dots \\
 \text{N. intervall : } j &= \sigma(T_N^4 - T_{N-1}^4) \\
 \text{siste intervall : } j &= \sigma(T_H^4 - T_N^4)
 \end{aligned}$$

De mellomliggende ukjente temperaturer kan nå elimineres ved å legge sammen disse $N + 1$ ligningene:

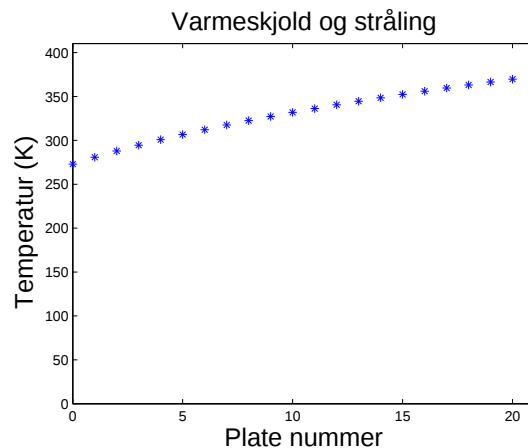
$$(N + 1)j = \sigma(T_H^4 - T_L^4) = j_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{j}{j_0} = \frac{1}{N + 1},$$

der j_0 er varmestrommen uten skjold. Riktig svar: C.

Kommentar: Temperaturen på skjoldene kan nå bestemmes ved å addere de k første intervallene. Dette gir $kj = \sigma(T_k^4 - T_L^4)$, eller $T_k^4 = T_L^4 + kj/\sigma$, som innsatt for j gir

$$T_k = \left[T_L^4 + k\sigma(T_H^4 - T_L^4)/(N + 1) \right]^{1/4}.$$

Med $N = 20$ skjold og $T_H = 373$ K og $T_L = 273$ K:

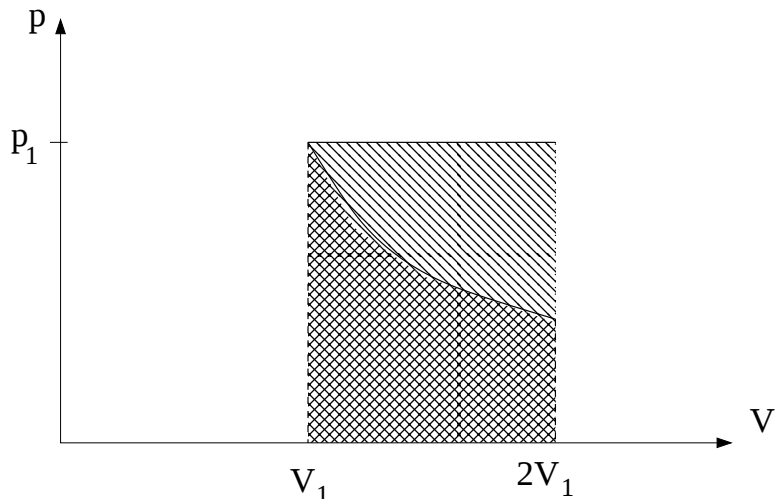


5) Koeksistens mellom fast stoff og væske ved 1, dvs smelting. Koeksistens mellom gass og væske ved 2, dvs fordampning. Koeksistens mellom fast stoff og gass ved 3, dvs sublimasjon. Riktig svar: D

6) Partiklenes midlere kinetiske translasjonsenergi, $\langle K \rangle = m\langle v^2 \rangle/2$, er proporsjonal med systemets temperatur T . En halvering av T betyr derfor en halvering av $\langle v^2 \rangle$, dvs v_{rms} reduseres med faktoren $1/\sqrt{2} \simeq 0.7$, en reduksjon på ca 30 prosent. Riktig svar: C

7) Produktet pV er uendret hvis trykket dobles og volumet halveres. Da er også temperaturen uendret, som igjen betyr at v_{rms} er uendret. Riktig svar: B

8) Det isoterme arbeidet W_0 tilsvarer det "dobbeltskraverte" arealet i figuren nedenfor, mens arbeidet W_1 utført ved konstant trykk p_1 tilsvarer hele det skraverte arealet. Vi ser at $W_1 > W_0$, og **A** er riktig svar.



9) Tilførsel av varme ved konstant trykk betyr at gassen utfører et positivt arbeid på omgivelsene (f.eks. hele det skraverte arealet i forrige oppgave). Da blir gassens økning i indre energi mindre enn tilført varme. Riktig svar: B

10) Siden temperaturen er proporsjonal med molekylenes midlere kinetiske energi, må $\langle K \rangle$ være den samme for både oksygen- og nitrogenmolekylene. Oksygen har større molekylmasse (ca 32 u) enn nitrogen (ca 28 u), så nitrogenmolekylene har i gjennomsnitt noe større hastighet enn oksygenmolekylene. (Her er u lik en atomær masseenheter, ca $1.66 \cdot 10^{-27}$ kg.) Riktig svar: D

11) Grafen tilsier at smelting av stoffet tar $3/2$ "tidsenheter" mens fordampning tar $5/2$ tidsenheter. Dermed er $L_s/L_f = 3/5 = 0.60$. Riktig svar: B

12) Dette er termodynamikkens 1. lov, eller 1. hovedsetning, som den også kalles. Den uttrykker energibevarelse: Varme tilført systemet, ΔQ , går med til å øke systemets indre energi, ΔU , samt til det arbeidet som systemet utfører på omgivelsene, ΔW . Alle størrelser kan være positive eller negative. Indre energi U er en tilstandsvariabel (evt tilstandsfunksjon), mens Q og W begge er prosessvariable. Riktig svar: D

13) Total varmemotstand til en slik seriekobling av 4 varmemotstander er (fra innerst til ytterst, og i enheten K/W):

$$R = 1/7.5 + 0.024/0.12 + 0.050/0.035 + 1/25 \simeq 1.8 \text{ K/W}.$$

Riktig svar: A

14) Vi har her en temperaturforskjell på 40 grader fra innerst til ytterst. Dermed er

$$P = \Delta T/R = 40/1.802 \simeq 22.2 \text{ W}.$$

Riktig svar: D

15) Hyttegulvets U -verdi er $U = 1/R \simeq 0.55 \text{ W/K}$. Riktig svar: B

16) Varmemotstanden fra innerst til grenseflaten mellom sponplate og isoporplate er $R_g = 1/7.5 + 0.024/0.12 = 1/3$ K/W. Temperaturforskjellen mellom innelufta og denne grenseflaten er da $PR_g = 22.2 \cdot 1/3 \simeq 7.4$ K, slik at grenseflaten har temperaturen $20 - 7.4 = 12.6^\circ\text{C}$. Riktig svar: A

17) Det er $24 \cdot 365 = 8760$ timer i et år. Midlere effekt levert av fjernvarmeanlegget er dermed $P = 600 \cdot 10^9 / 8760 \simeq 68.5$ MW. Riktig svar: C

18) Vannmasse gjennom anlegget pr tidsenhet:

$$\begin{aligned} dM/dt &= \frac{dQ/dt}{dQ/dM} = \frac{P}{c dT} \\ &= \frac{68.5 \cdot 10^6}{4184 \cdot 80} \\ &= 205 \text{ kg/s} \end{aligned}$$

Som tilsvarer 205 L/s. Riktig svar: C

19) Maksimal strømningshastighet (faktor 2 pga 2 sløyfer):

$$\begin{aligned} v &= \frac{dz}{2dt} = \frac{dV/A}{2dt} = \frac{dV/2dt}{\pi r_2^2} \\ &= \frac{0.205/2}{\pi \cdot 0.125^2} \\ &\simeq 2 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Riktig svar: B

TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til øving 12.

1) Med isoterme forhold og ideell gass blir bulkmodulen

$$B = -V(\partial p/\partial V)_T = -V(\partial(Nk_B T/V)/\partial V)_T = Nk_B T/V,$$

slik at $v = \sqrt{(Nk_B T/V)/(mN/V)} = \sqrt{k_B T/m}$. Riktig svar: B.

2) Med adiabatisk forhold og ideell gass er pV^γ konstant, dvs vi kan skrive $p(V) = AV^{-\gamma}$. Bulkmodulen blir da

$$B = -V \cdot A \cdot (-\gamma)V^{-\gamma-1} = \gamma p,$$

og siden $p = Nk_B T/V$, har vi $v = \sqrt{\gamma k_B T/m}$. Riktig svar: A.

3) Molar masse 29 gram gir molekylmasse $m = 0.029/6.022 \cdot 10^{23} \text{ kg} = 4.82 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$. Med $T = 293 \text{ K}$ gir dette $v = 290 \text{ m/s}$. Riktig svar: A.

4) Luft er nesten utelukkende en toatomig gass, slik at $\gamma \simeq 1.4$. Dette gir $v = 343 \text{ m/s}$. Riktig svar: D.

5) I en ideell gass er det ingen vekselvirkning mellom molekylene, slik at indre energi U er lik molekylens kinetiske energi K . Toatomige molekyler har 5 kvadratiske ledd i energifunksjonen: $K = (m/2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + (I_0/2)(\omega_x^2 + \omega_y^2)$ (når vi velger z -aksen langs molekylets akse; null treghetsmoment med hensyn på rotasjon omkring molekylets akse for lineære molekyler; intet bidrag fra kinetisk vibrasjonsenergi, da tilgjengelig termisk energi ved normale temperaturer er for liten til å eksitere vibrasjonsbevegelse i toatomige molekyler (utover laveste vibrasjonsenergitilstand, den såkalte grunntilstanden)). Ekvipartisjonsprinsippet sier at hvert kvadratiske ledd i energifunksjonen gir et bidrag $k_B T/2$ til indre energi U pr molekyl når systemets temperatur er T . Dermed er $U(T) = 5Nk_B T/2$ for en ideell toatomig gass. Da er $C_V = (dQ/dT)_V = (dU/dT)_V$ (siden $dW = p dV = 0$ når eksperimentet foretas ved konstant volum), dvs $C_V = 5Nk_B/2$. Hvis eksperimentet foretas ved konstant trykk, er $C_p = (dQ/dT)_p = (dU/dT)_p + p(dV/dT)_p = 5Nk_B/2 + p \cdot Nk_B/p = 7Nk_B/2$. Riktig svar: C.

6) Arbeid utført pr syklus er gitt ved arealet som omslutes av kurven $p(V)$. Her blir da $W = (5p_0 - p_0) \cdot (4V_0 - V_0) = 12p_0 V_0$. Riktig svar: C.

7) La oss nummerere de fire hjørnene av den rektangulære $p(V)$ -kurven fra 1 til 4, med klokka, og med tilstand 1 oppe til venstre, dvs $p_1 = 5p_0$ og $V_1 = V_0$. Ideell gass tilstandsligning gir da $T_1 = p_1 V_1 / Nk_B = 5p_0 V_0 / Nk_B$, $T_2 = p_2 V_2 / Nk_B = 20p_0 V_0 / Nk_B$, $T_3 = p_3 V_3 / Nk_B = 4p_0 V_0 / Nk_B$, og $T_4 = p_4 V_4 / Nk_B = p_0 V_0 / Nk_B$. I stigende rekkefølge, og i enheten $p_0 V_0 / Nk_B$ blir dette $T_4 = 1$, $T_3 = 4$, $T_1 = 5$ og $T_2 = 20$. Riktig svar: D.

8) Varme som overføres fra omgivelsene til gassen er $C_p \Delta T$ for de to isobare delprosessene (12 og 34), og $C_V \Delta T$ for de to isokore delprosessene (23 og 41). Siden temperaturen i gassen avtar fra tilstand 2 til tilstand 3, og fra tilstand 3 til tilstand 4, er dette delprosesser der varme *avgis* fra gassen til omgivelsene. Dette er ikke varme som vi må betale for, og skal dermed ikke regnes med når virkningsgraden skal beregnes. I den isobare utvidelsen fra 1 til 2 og i den isobare trykkøkningen fra 4 til 1, derimot, øker temperaturen i gassen. Dette gir positiv varmeoverføring fra omgivelsene til gassen, slik at Q_{12} og Q_{41} skal regnes med ved beregning av η . Her blir $Q_{12} = (7Nk_B/2) \cdot (T_2 - T_1) = 105p_0 V_0/2$ og $Q_{41} = (5Nk_B/2) \cdot (T_1 - T_4) = 10p_0 V_0$. I alt blir $Q_{\text{inn}} = 125p_0 V_0/2$, slik at virkningsgraden er

$$\eta = W/Q_{\text{inn}} = 12/(125/2) = 24/125 \simeq 0.19.$$

Riktig svar: A.

Kommentar: En Carnot-prosess med isotermer ved høyeste (T_2) og laveste (T_4) temperatur i den aktuelle

prosessen ville hatt virkningsgrad $\eta_C = 1 - T_4/T_2 = 1 - 1/20 = 0.95$. Dette er en øvre teoretisk grense, og vi ser at vår kretsprosess har virkningsgrad (0.19) betydelig mindre enn dette.

9) Isobar utvidelse fra a til b betyr at $T_a < T_b$. Isoterm utvidelse fra b til c betyr at $T_b = T_c$. Adiabatisk kompresjon fra d til a betyr at $T_d < T_a$ (siden en adiabat er brattere enn en isoterm i et pV -diagram). Dermed er $T_d < T_a < T_b = T_c$. Riktig svar: B.

10) Isobar kompresjon fra a til b betyr at $T_a > T_b$. Isoterm utvidelse fra b til c betyr at $T_b = T_c$. Adiabatisk kompresjon fra d til a betyr at $T_d < T_a$ (siden en adiabat er brattere enn en isoterm i et pV -diagram). Dermed er $T_b = T_c < T_d < T_a$. Riktig svar: D.

11) En Carnot-varmepumpe har effektfaktor

$$\varepsilon_V^C = |Q_2/W| = |Q_2/(Q_2 + Q_1)| = |1/(1 + Q_1/Q_2)| = |1/(1 - T_1/T_2)| = T_2/(T_2 - T_1).$$

Her er T_2 temperaturen til det varme reservoaret, dvs inne i stua, og T_1 er temperaturen til det kalde reservoaret, dvs ute. Din venn hevder at han oppnår $Q_2 = 10$ kW med $W = 1$ kW når $T_1 = 253$ K. Dette høres veldig mye ut: Hvis vi går ut fra at din venn i hvert fall har 15 varmegrader inne i stua, dvs minst $T_2 = 288$ K, vil en Carnot-varmepumpe ikke kunne levere mer enn $Q_2 = W \cdot T_2/(T_2 - T_1) = 1 \cdot 288/35 = 8.2$ kW. Mer enn dette vil det ikke være mulig å få ut av en reell varmepumpe, og i praksis vil nok effektfaktoren være en god del mindre enn som så. Men du kan trygt gratulere din venn med en god investering – en god varmepumpe kan gi god fyringsøkonomi i dag. Du kan tillate deg alternativ C, eventuelt alternativ B, hvis du ikke er av den snakkesalige typen. Men A og D vil ikke se bra ut.

12) En Carnot-kjølemaskin har effektfaktor

$$\varepsilon_K^C = |Q_1/W| = |Q_1/(Q_1 + Q_2)| = |1/(1 + Q_2/Q_1)| = |1/(1 - T_2/T_1)| = T_1/(T_2 - T_1).$$

Dermed: $W = Q_1 \cdot (T_2 - T_1)/T_1 = 500 \cdot 33/255 = 65$ W. Riktig svar: B.

TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til øving 13.

- 1) Tilført varme: $Q_2 = 8 \text{ kJ}$ pr syklus. Netto utført arbeid: $W = 2 \text{ kJ}$ pr syklus. Virkningsgrad: $\eta = W/Q_2 = 2/8 = 0.25$. Riktig svar: B.
- 2) Avgitt varme pr syklus: $|Q_1| = |W - Q_2| = |2 - 8| = 6 \text{ kJ}$. Riktig svar: C.
- 3) Forbrent mengde bensin pr syklus: $8 \text{ kJ}/46 \text{ kJ/g} = 0.17 \text{ g}$. Riktig svar: A.
- 4) Motorens effekt (med $t =$ perioden): $P = W/t = 2 \text{ kJ}/(1/120) \text{ s} = 240 \text{ kJ/s} = 240 \text{ kW}$. Riktig svar: C.
- 5) For adiabatisk prosesser er $TV^{\gamma-1} = \text{konstant}$. Dermed: $T_2 = T_1 \cdot (V_1/V_2)^{\gamma-1} = 295 \text{ K} \cdot 8^{0.4} = 678 \text{ K} = 405^\circ\text{C}$. Riktig svar: C.
- 6) For adiabatisk prosesser er $pV^\gamma = \text{konstant}$. Dermed: $p_2 = p_1 \cdot (V_1/V_2)^\gamma = 85 \text{ kPa} \cdot 8^{1.4} \simeq 1560 \text{ kPa} = 1.56 \text{ MPa}$. Riktig svar: C.
- 7) I forelesningene utledet vi virkningsgraden for en reversibel Otto-syklus:

$$\eta = |W/Q_{\text{inn}}| = \dots = 1 - (V_1/V_2)^{1-\gamma} = 1 - 8^{-0.4} = 0.56.$$

Riktig svar: C.

- 8) Carnot-prosessen består av to isotermer (konstant T) og to adiabater (konstant S). I et ST -diagram blir derfor Carnot-prosessen et rektangel. Riktig svar: B. (Strengt tatt er vel et rektangel et spesialtilfelle av både rombe, parallelogram og trapes, slik at alle fire alternativ kan hevdes å være riktige.)
- 9) I en adiabatisk, reversibel prosess er $dS = dQ/T = 0$ langs hele prosessen, dvs $\Delta S = S_B - S_A = 0$. Entropien S er en tilstandsfunksjon. Da spiller det ingen rolle hvordan vi bringer systemet fra tilstand A til tilstand B, endringen ΔS er den samme uansett. Riktig svar: A.
- 10) Smelting av isen skjer ved den konstante temperaturen $T_s = 273 \text{ K}$, og systemet tilføres varme (den såkalt latente varmen, eller rett og slett smeltevarmen L_s). Da øker entropien i 1 kg is/vann, med mengden $\Delta S = L_s/T_s = 335 \text{ kJ}/273 \text{ K} = 1.23 \text{ kJ/K}$. Riktig svar: A.
- 11) Ved kondensasjon avgir vannet varme til omgivelsene, ved konstant temperatur $T_f = 373 \text{ K}$ (f for fordampning, siden vi vel har benyttet indeksen k for koking). Da avtar entropien i 1 kg vanndamp/vann, med mengden $\Delta S = -L_f/T_f = -2272 \text{ kJ}/373 \text{ K} = -6.09 \text{ kJ/K}$. Riktig svar: B.
- 12) Hvis jorda er i termisk likevekt, mottas like mye varme Q via strålingen fra sola som jorda selv stråler ut. Da mottar jorda entropien $S_{\text{inn}} = Q/T_{\text{sol}}$, og avgir entropien $S_{\text{ut}} = Q/T_{\text{jord}}$. Forholdet mellom avgitt og mottatt entropi er $S_{\text{ut}}/S_{\text{inn}} = T_{\text{sol}}/T_{\text{jord}} = 5800/290 = 20$. Med andre ord, jordas samlede entropi avtar (betraktelig) som følge av varmestrålingen inn og ut. Riktig svar: C. I tillegg til dette kommer all verdens irreversible prosesser på jorda, og disse medfører alle en netto entropiøkning. Det totale entropiregnskapet for jorda er det dermed ikke så lett å si noe sikkert om. Til tross for termodynamikkens 2. lov er det ikke sikkert at vi går mot en tilstand med stadig større entropi, og dermed stadig større grad av uorden og kaos. Jorda er ikke et termisk isolert system.

13) Den varmen som den varmeste klossen avgir absorberes i sin helhet av den kaldeste klossen. Siden de to klossene har like stor varmekapasitet C , må det bety at temperaturøkningen ΔT i den kalde klossen er like stor som temperaturreduksjonen i den varme klossen. Felles slutt-temperatur blir dermed $T_s = (T_1 + T_2)/2$. Riktig svar: B.

14) Fra den termodynamiske identitet (1. hovedsetning) har vi generelt $dS = dU/T + (p/T)dV$. Her er $dV = 0$, og med $dU = C_V dT$ og $C_V = C_p = C$ er $dS = C dT/T$ for en "tenkt" reversibel varmetjebning, for hver av de to klossene. Total entropiendring blir:

$$\begin{aligned}\Delta S &= S_f - S_i = \int_i^f (dS_1 + dS_2) \\ &= C \int_{T_1}^{(T_1+T_2)/2} \frac{dT}{T} + C \int_{T_2}^{(T_1+T_2)/2} \frac{dT}{T} \\ &= C \ln \frac{T_1 + T_2}{2T_1} + C \ln \frac{T_1 + T_2}{2T_2} \\ &= C \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} \\ &= C \ln \left(1 + \frac{(T_1 - T_2)^2}{4T_1 T_2} \right)\end{aligned}$$

Her skrev vi om argumentet til logaritmefunksjonen for å se klart at den totale entropien *øker*. ($\ln(1+x) > 0$ når $x > 0$.) Riktig svar: D.

15) Reversibel utvidelse ved konstant trykk p innebærer tilførsel av varme, og $dQ = C_p dT$, med $C_p = 7Nk_B/2$ for ideell toatomig gass. Dermed er $dS = dQ/T = C_p dT/T$, og $\Delta S = S_f - S_i = C_p \ln(T_f/T_i)$. Her angir f slutt-tilstanden og i angir start-tilstanden (som i forrige oppgave). Hvis trykket er konstant og volumet dobles, dobles også temperaturen: $T_f = 2T_i$. Entropiendringen pr molekyl er dermed $\Delta s = \Delta S/N = (7/2)k_B \ln 2 \simeq 2.43k_B$. Riktig svar: D.