

Klassisk dynamikk

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt, \quad \vec{a} = d\vec{v}/dt = d^2\vec{r}/dt^2$$

$$d\vec{r} = \vec{v} dt, \quad d\vec{v} = \vec{a} dt$$

Sirkelbevegelse:

$$d\varphi = ds/r, \quad \omega = d\varphi/dt, \quad \alpha = d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2$$

$$v = ds/dt = r d\varphi/dt = r\omega$$

$$a_{\perp} = -\omega^2 r = -v^2/r, \quad a_{\parallel} = dv/dt = r d\omega/dt = r\alpha$$

$$T = 2\pi r/v, \quad f = 1/T, \quad \omega = 2\pi/T = 2\pi f$$

Newtons lover:

$$N1: \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{konst.}$$

$$N2: \vec{F} = m\vec{a} = m d\vec{v}/dt = d\vec{p}/dt \quad [\text{Impuls: } \vec{p} = m\vec{v}]$$

$$N3: \vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$$

$$\text{Gravitasjon: } F = \frac{GmM}{r^2}; \quad G = \text{gravitasjonskonstanten}$$

$$\text{Tynge: } F = mg; \quad g = G \cdot M/R^2 = 9.81 \text{ m/s}^2 \text{ p\u00e5 jordas overflate}$$

Kontaktkrefter: Normalkraft, Snordrag, Friksjon

$$\text{T\u00f8rr friksjon: Statisk: } f \leq \mu_s N; \quad \text{Kinetisk: } f = \mu_k N$$

$$\text{V\u00e5t friksjon: Lamin\u00e6r str\u00f8mning: } \vec{f} = -k v \hat{v}$$

$$\text{Turbulent ---: } \vec{f} = -D v^2 \hat{v}$$

$$\text{Arbeid: } dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{Effekt: } P = dW/dt = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\text{Kinetisk energi: } K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\text{Konservativ kraft: } \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\text{Potensiell energi: } U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{kons. kraft } \vec{F})$$

Mekanisk energi, $E = K + U$, er bevart i kons. system

Frksjonsarbeid: $W_f = \int \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$ ($\vec{f}$ ikke kons.) (2)

Impuls: $\vec{p} = m\vec{v}$. Hvis ytre $\vec{F} = 0$, er $\vec{p} = \text{konstant}$ (N1)

$$\Delta \vec{p} = \int \vec{F} \cdot dt \quad (\text{da } \vec{F} = d\vec{p}/dt; \text{ N2})$$

Kollisjoner: $\Delta \vec{p} = 0$ hvis $\vec{F}_{\text{ytre}} = 0$

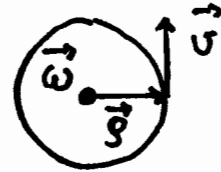
Elastisk: $\Delta K = 0$ Uelastisk: $\Delta K < 0$ Fullstendig uelastisk: $\max |\Delta K|$

Massesenter: $\vec{R}_{\text{CM}} = \int \vec{r} dm / \int dm = \int \vec{r} dm / M$ ($\approx$ Tyngdepunkt)

Tyngdepunktbevegelse: $M \ddot{\vec{R}}_{\text{CM}} = \vec{F}_{\text{ytre}}$

Rotasjon:

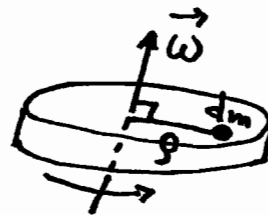
Vinkelhastighetsvektor: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$



($\vec{\omega}$ opp)

Rotasjonsenergi: $K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2$

Tregghetsmoment: $I = \int r^2 dm$



Stirt legeme: $K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_o \omega^2$

$\uparrow$ mhp akse gjennom CM

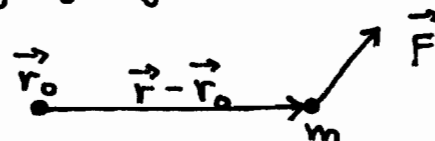
Steiners sats: $I = I_o + M d^2$

Ren rulling: $V = \omega R$, $A = \alpha R$ (rullebetingelser)

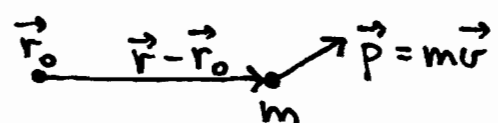
Sluring: Relativ hastighet i kontaktpunktet $v = V - \omega R \neq 0$

$\Rightarrow$ effekttap $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$ pga frksjon

Dreiemoment: $\vec{\tau} = (\vec{r} - \vec{r}_o) \times \vec{F}$



Dreieimpuls: $\vec{L} = (\vec{r} - \vec{r}_o) \times \vec{p}$



N2 for rotasjon: $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$ ("spinnsetsen")

(3)

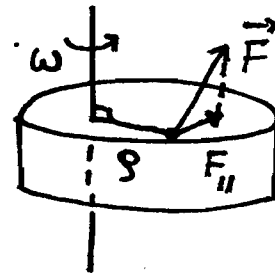
Arbeid ved rotasjon: $dW = \tau d\varphi$; Effekt: $P = \tau \omega$

Stivt legeme: $\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = M(\vec{R}_{cm} - \vec{r}_o) \times \vec{V} + I_o \vec{\omega}$

N2, rotasjon om fast akse:

$$\tau = I \frac{d\omega}{dt}; \quad \tau = F_{||} \cdot \rho$$

$$I = \int \rho^2 dm$$



$(F_{||} \perp \rho)$

Bevaringslover:

- For isolert system er total energi, impuls og dreieimpuls bevart.
- For konservativt system er mekanisk energi, $E = K + U$, bevart.
- Når netto $\vec{F}_{ytte}$ er null, er impuls $\vec{p}$ bevart.
- Når netto $\vec{\tau}_{ytte}$ er null, er dreieimpuls $\vec{L}$ bevart.

Mekanisk likevekt (Statikk):

Stivt legeme er i ro, $\vec{p} = 0$ og $\vec{L} = 0$, bare hvis netto $\vec{F}_{ytte} = 0$ og netto $\vec{\tau}_{ytte} = 0$.

Svingninger

Harmonisk oscillator:

$$F = -kx \quad (\text{Hookes lov}) \quad \xrightarrow{N2} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{med } \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$T = 2\pi/\omega_0 = 1/f$$

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad U = \frac{1}{2} k x^2, \quad E = K + U = \frac{1}{2} k A^2 = \text{konstant}$$

Med friksjon $f = -b\dot{x}$: $x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) \quad (\gamma < \omega_0)$

$$\gamma = b/2m; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t} \quad (\gamma > \omega_0)$$

$$\alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Twungen svingning: $F_{ytre} = F_0 \cos \omega t$

(4)

Resonans: $x(t) = x_p(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \varphi)$ [$x_h \approx 0$ når $\omega t \gg 1$]

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m} \left\{ (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2 \right\}^{-1/2}$$

$\Delta\omega = 2\gamma = \text{halvverdbredde}$

$Q = \omega_0 / \Delta\omega = Q\text{-faktor}$

Matematisk pendel: $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$; $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ (små utsving)

Fysisk pendel: $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$; $\omega_0 = \sqrt{mgd/I}$ (små utsving)

Bølger

Transversal: partiklene svinger $\perp$ forplantningsretningen

Longitudinal: $\text{-----} \parallel \text{-----} \parallel \text{-----}$

Harmonisk bølge: $y(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t)$

$k = 2\pi/\lambda$, $\omega = 2\pi/T$, $v = \lambda/T = \omega/k$, $f = 1/T = v/\lambda$

Transv. bølge på streng: $v = \sqrt{S/\mu}$

Longit. bølge i fluid (lyd!): $v = \sqrt{B/\rho}$

Lydbølge i tynn stang: $v = \sqrt{E/\rho}$

Lydbølge i bulk faststoff: $v_p = \sqrt{(B + 4G/3)/\rho}$ (longit.)

$v_s = \sqrt{G/\rho}$ (transv.)

$E = (F/A)/(\Delta L/L_0)$

$B = -(\Delta F/A)/(\Delta V/V_0) = -\Delta p/(\Delta V/V_0)$

$G = (F/A)/(\Delta x/L) = (F/A)/\tan \theta$

Bølgeligning: $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$; $\xi(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$

Energitetthet, transv. bølge på streng: $\epsilon = \mu v^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$ (J/m)

-----, plan lydbølge: $\epsilon = \rho v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2$ (J/m³)

(5)

Midlere energitæthed i harmoniske bølge:

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} \epsilon(x,t) dx ; \quad \langle \epsilon \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \epsilon(x,t) dt$$

Intensitet: $I = \text{overført effekt pr fladeenhed} = \frac{\bar{P}}{A} = \bar{\epsilon} \cdot v$

Desibelskalaen: $\beta = \# \text{ dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) ; \quad I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$

Kulebølge: $I(r) \sim 1/r^2$ Cylinderbølge: $I(r) \sim 1/r$ Plan bølge: $I = \text{konst.}$

Stående bølger:

Streng med to faste eller to fri ender: $\lambda_n = 2L/n \quad (n=1,2,3,\dots)$

Streng med en fast og en fri ende: $\lambda_n = 4L/(2n-1) \quad (\text{---||---})$

Tilsvarende for lydbølge i tynt rør.

Grunntone: $n=1$. Overtoner: $n=2,3,\dots$

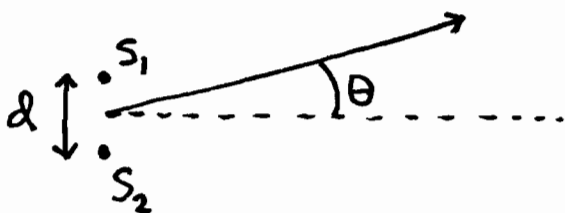
Dopplereffekt: $f_o = \frac{v + v_m - v_o}{v + v_m - v_s} \cdot f_s \quad \left[\begin{array}{l} o: \text{observer} \\ s: \text{kilde} \\ m: \text{medium} \end{array} \right]$

Svevning: $I(t) \sim 1 + \cos(\Delta\omega \cdot t) ; \quad \Delta\omega = 2\pi |f_1 - f_2| = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T_s}$

Interferens: Max intensitet der bølgerne er i fase.

Min ---"--- ---"--- i modfase.

Retningsafhængig interferens:



max I for $d \cdot \sin \theta = n \cdot \lambda$

min I for $d \cdot \sin \theta = (n + 1/2) \cdot \lambda$
 $(n=0,1,2,\dots)$

Termisk fysikk

⑥

Trykk: $p = dF/dA$; $d\vec{F} = -p d\vec{A}$

Termisk likevekt: $T_A = T_B$ ($T = \text{temperatur}$)

Absolutt temperatur: $T = 0 \text{ K}$ tilsvarer -273.15°C

$\Delta T = 1 \text{ K}$ — " — $\Delta T = 1^\circ\text{C}$

Standardreferanse: Trippelpunkt for H_2O , $p_t = 612 \text{ Pa}$, $T_t = 273.16 \text{ K}$

Ideell gass tilstandsligning: $pV = nRT$ ($pV = Nk_B T$)

Avogadros tall: $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ = antall molekyler i 1 mol

Gasskonstanten: $R = 8.314 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$

Boltzmanns konstant: $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ } $R = N_A \cdot k_B$

Prosess: Endring i systemets tilstandsvariable

Isoterm: $T = \text{konst.}$ Isobar: $p = \text{konst.}$ Isokor: $V = \text{konst.}$

Termiske koeffisienter:

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p ; \alpha = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{3} \beta ; \gamma = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V ;$$

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \beta^{-1}$$

Varme: Energioverføring pga ΔT

Arbeid: Andre former for energioverføring

Varmekapasitet: $C = \Delta Q / \Delta T$; $C_p = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_p$; $C_v = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_v$

Spesifikke varmekap: $c = C/M = \text{varmekap. pr masseenh.}$

$$c_m = C/n = \text{molar varmekap.}$$

Koeksistenslinjer: Likevekt mellom to faser (tre ⑦ i trippelpunkt). Markerer faseovergang (smelting/frysing, fordamping/kondensasjon, sublimasjon/deposisjon).

Latent varme: L = påkrevd varme for å smelte, fordampe eller sublimere stoffet ved gitt T ($\Delta T = 0$). Varmen avgis ved frysing, kondensasjon eller deposisjon.

Clapeyrons ligning for koeksistenslinjene: $\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T \cdot \Delta V}$

Damptrykk-kurven: $p_d(T) = p_d(T_0) \exp\left\{\frac{L}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right\}$

L = molar latent varme

$T_0, p_d(T_0)$ = valgt ref. punkt (f.eks. p_t, T_t)

Relativ luftfuktighet: $\phi = 100\% \cdot p_{H_2O} / p_d$

Varmetransport:

Konveksjon: Strømning, vind $\Rightarrow$ mer effektiv varmeoverføring

Varmeovergangstall α : $j = -\alpha \cdot \Delta T$

j = overført varmeeffekt pr flateenhet (W/m^2)

Ute (med "midlet vind"): $\alpha_u \approx 25 W/m^2 \cdot K$

Inne (vindstille): $\alpha_i \approx 7.5$ — " —

"Perfekt kobling": $\alpha \rightarrow \infty$

Varmeledning (stasjonært, 1D): $j = -\lambda \cdot \frac{\Delta T}{a}$

λ = materialets varmeledningsevne ($W/m \cdot K$)

a = — " — tykkelse

Fouriers lov: $j_x = -\lambda \cdot \Delta T / \Delta x$

Seriekobling av varmemotstander: $\Delta T = -\left(\sum_j \frac{a_j}{\lambda_j A_j}\right) \cdot P$; $P = j \cdot A$

Parallellkobling — " — : $\Delta T = -\left[\sum_j \frac{\lambda_j A_j}{a_j}\right]^{-1} \cdot P$

Stråling: $j = \sigma T^4$; $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$ (svart legeme, $e = a = 1$)

Reelt legeme: $j = e \cdot \sigma T^4$; $e = \text{emissiviteten} \leq 1$

Plancks fordelingslov:

$$j(\tau) = \int_0^\infty (dj/df) df; \quad \frac{dj}{df} = \frac{2\pi h f^3 / c^2}{\exp[hf/k_B T] - 1}$$

$$j(\tau) = \int_0^\infty (dj/d\lambda) d\lambda; \quad \frac{dj}{d\lambda} = \frac{2\pi h c^2 / \lambda^5}{\exp[hc/\lambda k_B T] - 1}$$

Wiens forskyvningslov: Max $\frac{dj}{d\lambda}$ for $\lambda \cdot T = 2.90 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$

Kinetisk gasteori (Mikroskopisk tolkning av p og T):

$$p = \frac{2N}{3V} \langle K_{\text{trans}} \rangle; \quad \langle K_{\text{trans}} \rangle = \text{midlere kinetisk translasjonsenergi pr molekyl}$$

$$\Rightarrow k_B T = \frac{2}{3} \langle K_{\text{trans}} \rangle$$

Middelhastigheter: $\langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0$

$$\langle v^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle = 3 k_B T / m$$

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3 k_B T / m}$$

Arbeid (utvidelse av gass): $dW = p dV \Rightarrow W$ er arealet under $p(V)$

Isobar utvidelse: $W = p(V_2 - V_1)$

Isoterm ———: $W = N k_B T \ln(V_2 / V_1)$

Indre energi: $U = \text{systemets energi}$

Ideell gass: $U = U(T) = N \cdot \langle K \rangle$

Atomær gass: $U = \frac{3}{2} N k_B T$; 2-atomig: $U = \frac{5}{2} N k_B T$

1. hovedsetning: $\Delta Q = \Delta U + \Delta W$ (energibevarelse) ⑨

C_p og C_v for ideell gass: $C_p - C_v = nR = Nk_B$

Atomær: $C_v = \frac{3}{2}nR$ Toatomig: $C_v = \frac{5}{2}nR$

Adiabatisk prosess: $dQ = 0 \Rightarrow dU = -dW$

$$pV^\gamma = \text{konst.}; \quad TV^{\gamma-1} = \text{konst.}; \quad pT^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \text{konst.}$$

Adiabatkonstanten: $\gamma = C_p/C_v > 1$

Luft: $\gamma \approx 1.4$ Edelgasser: $\gamma \approx 1.67$

Lydfart i gasser: $v = \sqrt{\gamma k_B T / m}$

Kretsprosess:  $\Delta U = 0$
 $\Delta Q = \Delta W$ (> 0 med klokke)

Carnotprosess: To isotermer ($T_2 > T_1$; $Q_2 > 0$; $Q_1 < 0$),
to adiabater ($Q = 0$).

$$W = Q_1 + Q_2; \quad Q_1 = -Q_2 \cdot T_1/T_2$$

$$\Rightarrow W_c = Q_2 (1 - T_1/T_2)$$

Varmekraftmaskin: Tilfører varme Q_2 , får utført arbeid W .

$$\text{Virkningsgrad: } \eta = W/Q_2$$

$$\Rightarrow \eta_c = 1 - T_1/T_2$$

Reell varmekraftmaskin: $\eta < \eta_c$ alltid

Kjøleskap/Varmepumpe:

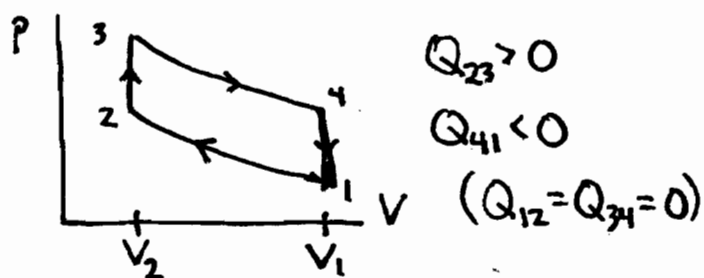
Gjør arbeid W på systemet ("arbeidssubstansen"), overfører varme (Q_1) (delvis) fra kaldt til varmt reservoar (Q_2)

Effektfaktor: $\epsilon_K = |Q_1/W|$, $\epsilon_V = |Q_2/W|$

Med Carnotprosess: $\epsilon_K^c = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$, $\epsilon_V^c = \frac{T_2}{T_2 - T_1}$

Reelle kjølemaskiner: $\epsilon_K < \epsilon_K^c$; $\epsilon_V < \epsilon_V^c$

Otto-syklus: Reversibel idealisering av bensinmotor



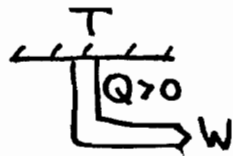
$$\eta_o = 1 - r^{1-\gamma}$$

$$r = V_1/V_2$$

= kompresjonsforholdet

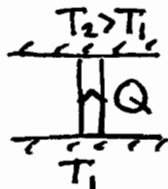
2. hovedsetning:

Kretsprosessen



er umulig (Kelvin)

— " —



er umulig (Clausius)

Entropi: $dS = dQ/T$; $\oint dS = 0$ (tilstandsfunksjon!)

$\Rightarrow$ Termodyn. identitet for reversible prosesser: $TdS = dU + p dV$

Rev. adiabatisk prosess: $\Delta S = 0$

Isoterm utvidelse: $dS = \cancel{p/T} (p/T) dV \stackrel{\text{ideell gass}}{=} Nk_B dV/V$

Prinsippet om entropiens økning: $\Delta S \geq 0$ i termisk isolert system

Boltzmanns prinsipp: $S = k_B \ln \Omega$; Ω = antall mikrotilstander konsistent med den gitte makrotilstand