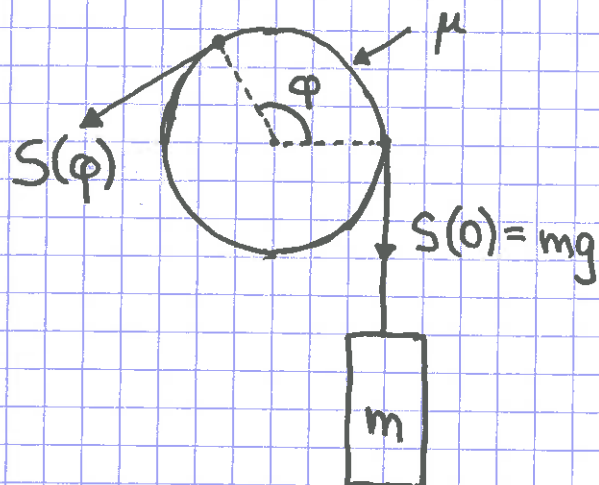


Eks: Snor rundt sylinder (Vanskelig!)



$S(\varphi)$ = snordrag med "kontaktvinkel" φ mellom snor og sylinder.

$S_{\min}(\varphi)$ = påkrevd snordrag for å holde lodd oppe

$S_{\max}(\varphi)$ = max snordrag uten at loddet heises opp

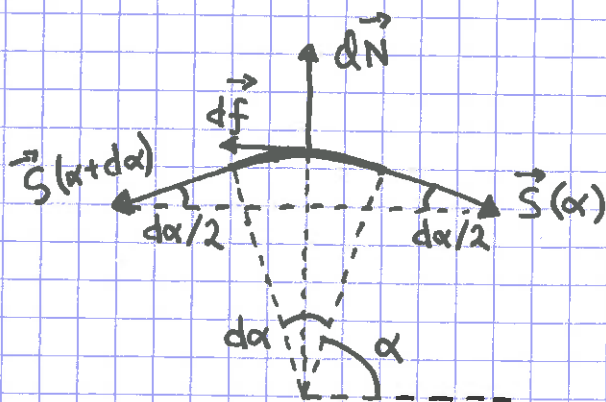
m = loddmasse

μ = statisk friksjonskoeff.

Erfaring: $S_{\min}$ og $S_{\max}$ avhenger sterkt av φ .

Oppgave: Bestem $S_{\min}(\varphi)$ og $S_{\max}(\varphi)$!

Strategi: Se på liten snorbit mellom α og $\alpha + d\alpha$



$\vec{S}$ = kraft på snorbiten, fra resten av snora

$d\vec{N}$ = normalkraft fra sylinder på snorbit

$d\vec{f}$ = friksjonskraft fra sylinder på snorbit; $df \leq \mu \cdot dN$;
når $S(\varphi) = S_{\min}(\varphi)$ er $df = \mu \cdot dN$

Lodd i ro når $\sum_i \vec{F}_i = 0$ (N1):

(15)

$$\vec{S}(\alpha + d\alpha) + \vec{S}(\alpha) + d\vec{N} + d\vec{f} = 0$$

Dekomponerer:

Tangentielt: $S(\alpha + d\alpha) \cdot \cos \frac{d\alpha}{2} - S(\alpha) \cdot \cos \frac{d\alpha}{2} \pm df = 0$

Normalt: $S(\alpha + d\alpha) \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} + S(\alpha) \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} - dN = 0$

Når $d\alpha \rightarrow 0$: $\cos \frac{d\alpha}{2} \approx 1$, $\sin \frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$

Dermed:

Tangentielt: $S(\alpha + d\alpha) - S(\alpha) \pm \mu dN = 0$

Normalt: $[S(\alpha + d\alpha) + S(\alpha)] \cdot d\alpha/2 - dN = 0$

Vi har: $S(\alpha + d\alpha) - S(\alpha) = dS$

$$S(\alpha + d\alpha) + S(\alpha) \approx 2S$$

Dermed:

Tangentielt: $dS = \mp \mu dN$

Normalt: $S \cdot d\alpha = dN$

Eliminerer dN ved å dividere "T" med "N":

$$\frac{dS}{S \cdot d\alpha} = \mp \mu \Rightarrow \frac{dS}{S} = \mp \mu d\alpha$$

Integrerer: $\int_{S(0)}^{S(\varphi)} \frac{dS}{S} = \mp \int_0^\varphi \mu d\alpha$

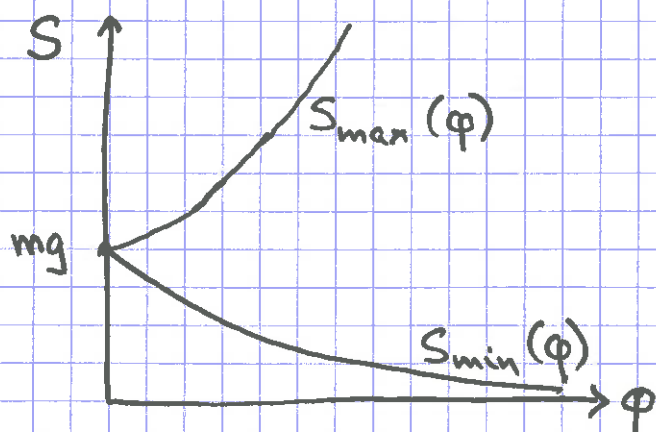
$$\Rightarrow \underbrace{\ln S(\varphi) - \ln S(0)}_{= \ln \frac{S(\varphi)}{S(0)}} = \mp \mu \varphi$$

$$\Rightarrow S(\varphi) = S(0) e^{\mp \mu \varphi} \quad ; \quad S(0) = mg$$

Øvre ~~grense~~ ^{fortegn}: $\vec{df}$ som i figuren, dvs friksjonen hjelper til med å holde loddet oppe.

Nedre ~~grense~~ ^{fortegn}: $\vec{df}$ mot høyre, dvs friksjonen motvirker vårt forsøk på å trekke loddet opp

$$\text{Dermed: } S_{\min}(\varphi) = mg \cdot e^{-\mu \varphi} \quad ; \quad S_{\max}(\varphi) = mg \cdot e^{+\mu \varphi}$$



Talleks: $\mu = 0.2$ og $2\frac{1}{4}$ omdreining, dvs

$$\varphi = 2 \cdot 2\pi + \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{9\pi}{2}, \text{ gir}$$

$$S_{\min} = mg \cdot e^{-0.2 \cdot 9\pi/2} \approx 0.06 \text{ mg}$$

$$S_{\max} = mg \cdot e^{+0.2 \cdot 9\pi/2} \approx 17 \text{ mg}$$

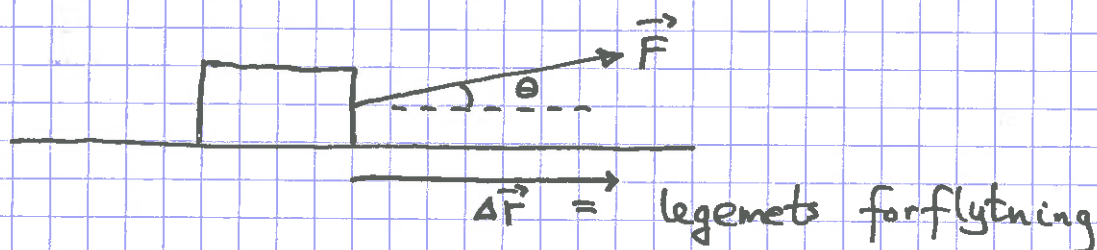
Arbeid og energi

[YF 6,7 ; LL 4]

(17)

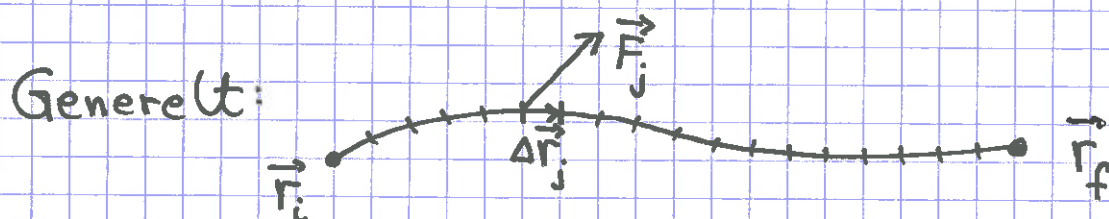
Arbeid

[YF 6.1-6.3 ; LL 4.1]



$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta = \text{arbeid utført av ytre kraft } \vec{F} \text{ på legemet}$$

$$[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J} \text{ (joule)}$$



Arbeid utført ved forflytning fra $\vec{r}_i$ til $\vec{r}_f$:

$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j \stackrel{\Delta \vec{r}_j \rightarrow 0}{=} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Effekt

[YF 6.4 ; LL 4.1]

effekt = arbeid (energi) pr tidsenhet

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$[P] = \text{J/s} = \text{W (watt)}$$

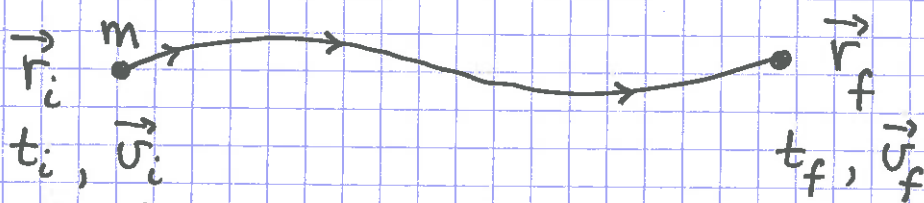
Eks: Studenthybel: ca 4 MWh el. energi pr år. $\langle P \rangle = ?$

$$\text{Løsn: } \langle P \rangle = 4 \cdot 10^6 \text{ Wh} / (365 \cdot 24 \text{ h}) = 457 \text{ W} \approx 0.5 \text{ kW}$$

Kinetisk energi

[YF 6.2; LL 4.2]

(18)



$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} \stackrel{N2}{=} \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$d(v^2) = d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = d\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot d\vec{v} = 2\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} m \int_{v_i^2}^{v_f^2} d(v^2) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

Vi definerer: $K = \frac{1}{2} m v^2 = \text{kinetisk energi}$

Dermed:

$$W = K_f - K_i = \Delta K$$

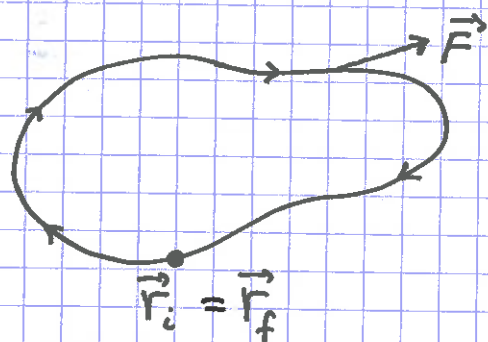
Dvs: Arbejd W utført på legemet
tilsvarende endringen ΔK i legemets
kinetiske energi.

Konservativ kraft

[YF 7.3; LL 4.4]

(19)

System uten tap av mekanisk energi til andre energiformer (feks. varme) er konservativt.



Hvis $\vec{F}$ er konservativ,
er $K_f = K_i$ (dvs $|v_f| = |v_i|$),
dvs $W = \Delta K = 0$.

Dermed: $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ ($\oint \dots$: Integral rundt lukket kurve)

Potensiell energi

[YF 7.1-7.4; LL 4.3-4.4]

Med kons. kraft $\vec{F}$ er potensiell energi

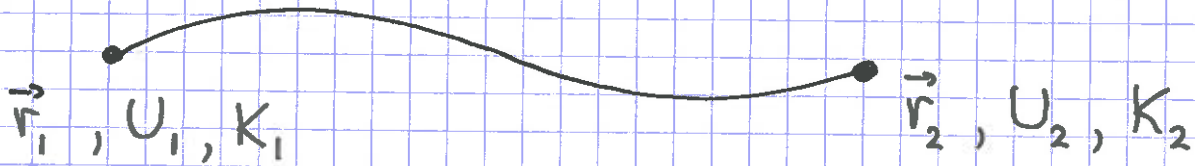
$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Har her valgt $U(\vec{r}_0) = 0$.

Dvs: Bare forskjeller i pot. energi
har fysisk betydning.

04.09.14

(20)

Mekanisk energibevarelse [YF 7.1-7.3; LL 4.5]

$$\begin{aligned}
 U_1 - U_2 &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
 &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = W = K_2 - K_1
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{K_1 + U_1 = K_2 + U_2}$$

Dvs: Total mekanisk energi,

$$E = K + U,$$

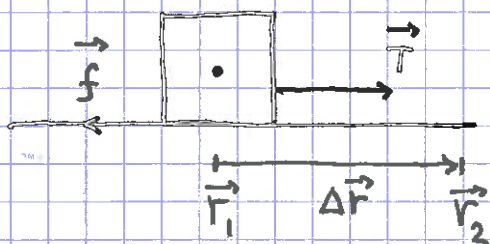
er konstant ("bevart")

for et konservativt system.

Frøksjonsarbeid

YF 7.3
[LL 4.5]

(21)

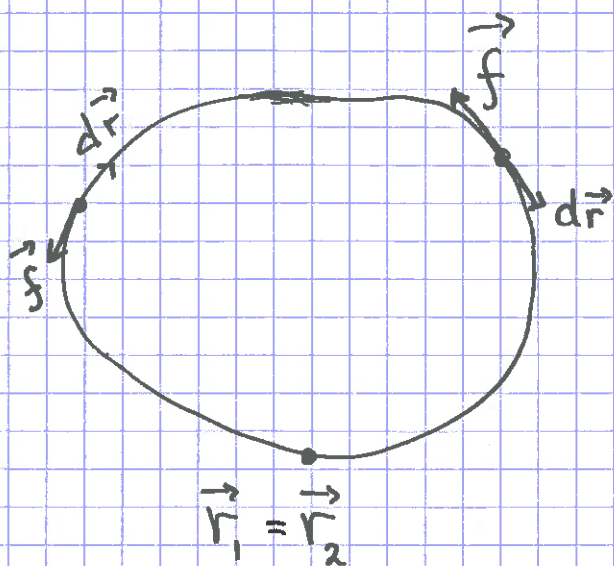


$$W_f = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$$

fordi $\vec{f}$ alltid er rettet mot $d\vec{r}$.

Frøksjonsarbeidet W_f "går tapt":

mekanisk energi $\rightarrow$ varme



$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$$

Dvs: Frøksjonskraft

$\vec{f}$ er ikke

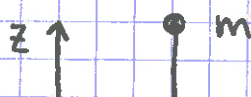
konservativ

Eks: Fritt fall

(22)

Anta $U(0)=0$ og $v(0)=0$

• Bestem $U(z)$ og $v(z)$ ($z < 0$)



$$\vec{F} = m\vec{g} = -mg\hat{z}$$

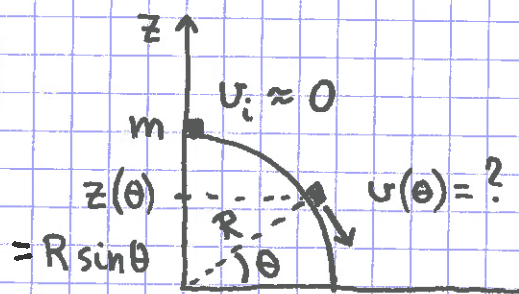
$$\text{Løsning: } U(z) = - \int_0^z \underbrace{(-mg\hat{z})}_{\vec{F}} \cdot \underbrace{(\hat{z} dz)}_{d\vec{r}} = \underline{\underline{mgz}}$$

$$E(0) = U(0) + K(0) = 0$$

$$\Rightarrow U(z) + K(z) = mgz + \frac{1}{2}mv(z)^2 = 0$$

$$\Rightarrow v(z) = \underline{\underline{\sqrt{-2gz}}} \quad (z < 0)$$

Eks: Gli på kuleflate



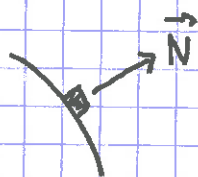
Løsning:

E er bevart



$$\frac{1}{2}mv(\theta)^2 + mgz(\theta) = mgR$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v(\theta) = \sqrt{2gR(1 - \sin\theta)}}}$$



• Mister kontakt med underlaget når $N=0$;
"skrått kast" derfra. Hvor skjer dette?

• Hva med friksjon?

• Hva skjer hvis legemet kan rulle (og "skure")?