Impuls [YF 8 ; LL 5]

= bevegelsesmengde = "linear momentum"

N2 : $\vec{F} = m \dfrac{d\vec{v}}{dt} \underset{m = \text{konst.}}{\overset{\text{hvis}}{=}} \dfrac{d(m\vec{v})}{dt}$

impuls = masse · hastighet

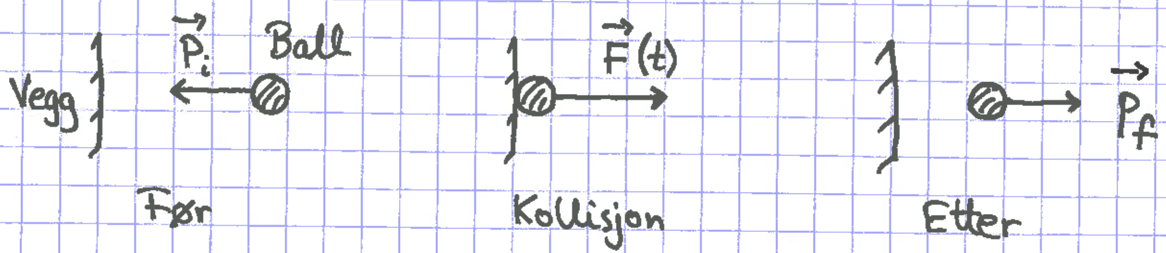
$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ $\qquad [p] = \text{kg m/s}$

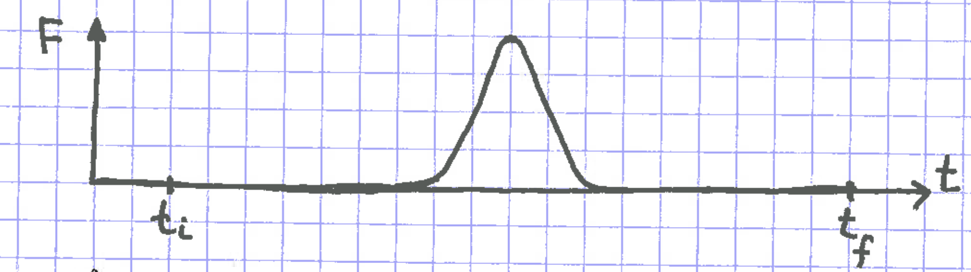
$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}}$ N2

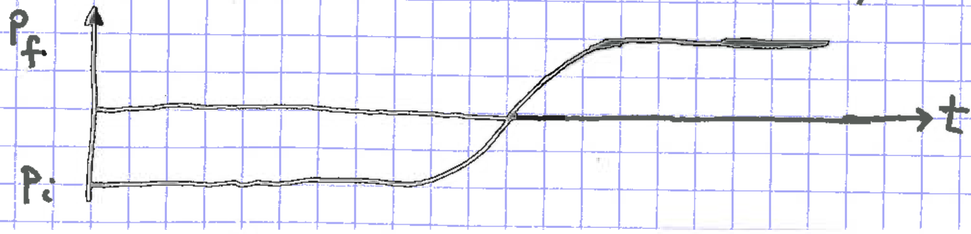
$\Rightarrow$ Lov om impulsbevarelse :

> Hvis sum av ytre krefter på et legeme er null, er legemets impuls bevart : $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{konst.}$

Ytre $\vec{F}$ $\Rightarrow$ impulsendring :







$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt$$

Kollisjoner [YF 8.3, 8.4 ; LL 5.3]

Elastisk støt : $\Delta K = 0$ (energien bevart)

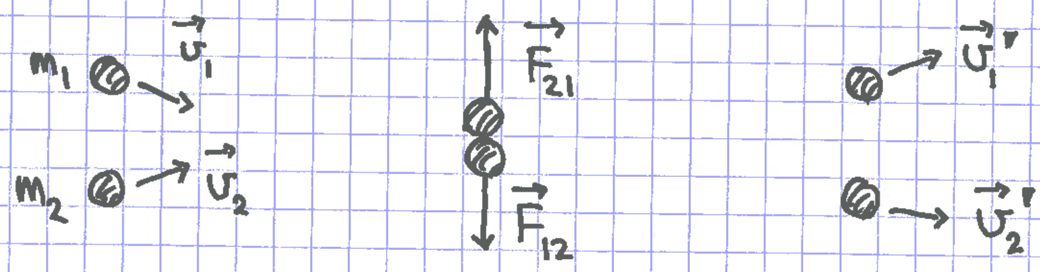
Uelastisk støt : $\Delta K < 0$ (–"– ikke bevart)

Fullstendig uelastisk støt : Legemene henger sammen, med felles hastighet etter kollisjonen ; max. energitap $|\Delta K|$.

Tapt mek. energi $\Delta K \rightarrow$ deformasjon, lyd, varme...

Hvis $\vec{F}_{ytre} = 0$, er $\Delta\vec{p} = 0$ for alle typer kollisjoner.

Indre krefter $\vec{F}_{ij}$ endrer ikke systemets totale impuls:



Før

Kollisjon (kort varighet Δt)

Etter

$$\text{N3}: \quad \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad \overset{\text{N2}}{\Longrightarrow} \quad \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right) = \frac{d}{dt}\vec{P}_{tot} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{P}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konst.}$$

Eks: Slag på bordtennisball; anslå midlere kraft $\langle \vec{F} \rangle$ og sammenlign med mg.

Løsn: $m = 2.7\,g$, $v_i \sim 10\,m/s$, $v_f \sim 30\,m/s$, $\Delta t \sim 1\,ms$

$$\Rightarrow \langle F \rangle = m\Delta v / \Delta t \approx 2.7 \cdot 10^{-3}\,kg \cdot 40\,m/s / 10^{-3}\,s = \underline{\underline{108\,N}}$$

$$\langle F \rangle / mg = \frac{\Delta v}{g \cdot \Delta t} = \frac{\langle a \rangle}{g} \approx \frac{40 \cdot 10^3\,m/s^2}{10\,m/s^2} = \underline{\underline{4000}}$$

$\Rightarrow$ OK å se bort fra ytre kraft mg i kollisjonen

Sentralt støt [YF 8.2–8.4 ; LL 5.3]

Før: $m \bullet \longrightarrow v$ $\qquad V \longleftarrow \bullet M$ (i)

Etter: $v' \longleftarrow \bullet m$ $\qquad M \bullet \longrightarrow V'$ (f)

[I fig. er $v, V' > 0$ og $v', V < 0$.]

$$\Delta p = 0 \Rightarrow \underbrace{mv + MV}_{p_i} = \underbrace{mv' + MV'}_{p_f}$$

(a) Fullstendig uelastisk støt (enklest):

$$v' = V' = \frac{mv + MV}{m + M}$$

(b) Delvis uelastisk støt: Har kun 1 lign. ($\Delta p = 0$) for 2 ukjente (v', V'). Må ha en ekstra opplysning for å bestemme v' og V'.

(c) Elastisk støt, $\Delta K = 0$:

$$\underbrace{\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M V^2}_{K_i} = \underbrace{\frac{1}{2} m v'^2 + \frac{1}{2} M V'^2}_{K_f}$$

"Triks": Skriv om litt.

$$m(v + v')(v - v') = M(V' + V)(V' - V) \qquad (1)$$

$$m(v - v') = M(V' - V) \qquad (2)$$

Divider (1) med (2):

$$v + v' = V + V'$$

$$\Rightarrow \quad v' - V' = -(v - V) \qquad (3)$$

Fra (2) og (3) får vi:

$$v' = \frac{M}{m+M}\left(2V + v \cdot \frac{m-M}{M}\right)$$

$$V' = \frac{m}{M+m}\left(2v + V \cdot \frac{M-m}{m}\right)$$

Eks: Elastisk kollisjon mellom ball og vegg

Før: $\overset{m}{\bullet} \longrightarrow v$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} V = 0 \\ M \gg m \\ (M \to \infty) \end{array} \right.$ $\qquad$ Etter: $\underset{v' = ?}{\longleftarrow} \overset{m}{\bullet}$ $\quad \left\{ V' = ? \right.$

Sjekk om $\Delta p = 0$ og $\Delta K = 0$.

Løsn: $v' = \frac{M}{m+M}\left\{0 + v\cdot\frac{m-M}{M}\right\} \approx \frac{M}{M}\cdot v\cdot\left(\frac{-M}{M}\right) = \underline{\underline{-v}}$

$V' = \frac{m}{M+m}\left\{2v + 0\right\} \approx \frac{m}{M}\cdot 2v \approx \underline{\underline{0}}$

Som ventet!

Impulsbevarelse?

$p = mv, \quad P = MV = 0, \quad p' = mv' = -mv,$

$P' = MV' \approx M\cdot\frac{m}{M}\cdot 2v = 2mv$

$\Rightarrow \Delta p = p_f - p_i = (p' + P') - (p + P) = (-mv + 2mv) - mv$
$= \underline{\underline{0}}$; OK!

Energibevarelse?

$K_m = \frac{1}{2}mv^2, \quad K_M = \frac{1}{2}MV^2 = 0, \quad K_m' = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}mv^2$

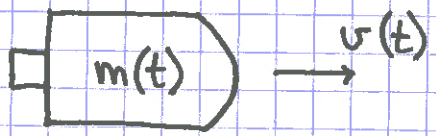
$K_M' = \frac{1}{2}MV'^2 \approx \frac{1}{2}M\cdot\left(\frac{m}{M}\cdot 2v\right)^2 = \frac{2m^2v^2}{M} \approx 0$

$\Rightarrow \Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \underline{\underline{0}}$; OK!

Rakettprinsipp

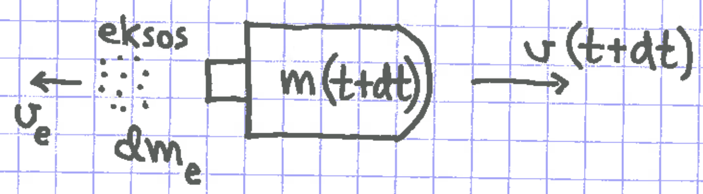
[YF 8.6 ; LL 5.4]

"Før" (t) :



$p(t) = m(t)\,v(t)$

"Etter" $(t+dt)$:



$$p(t+dt) = \underbrace{m(t+dt)}_{m(t)+dm}\,\underbrace{v(t+dt)}_{v(t)+dv} + \underbrace{dm_e}_{-dm}\cdot\underbrace{v_e(t)}_{v(t)+u}$$

Her er: u = eksosens hastighet relativt raketten $(u < 0)$

dm = rakettens masseendring mellom t og $t+dt$ $(dm < 0)$

$$\Rightarrow p(t+dt) = \underbrace{m(t)v(t)}_{=p(t)} + m(t)\,dv + \underbrace{dm\cdot v(t) - dm\cdot v(t)}_{=0} - dm\cdot u$$

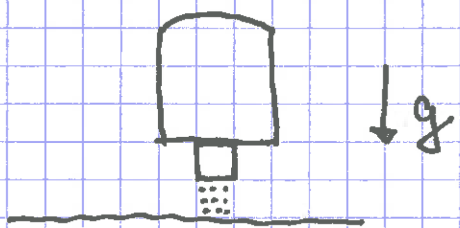
Hvis "outer space" : $F_{ytre} = 0 \overset{N2}{\Rightarrow} p(t+dt) = p(t)$

$$\Rightarrow m(t)\,dv = u\,dm$$

$$\Rightarrow m\frac{dv}{dt} = u\frac{dm}{dt} = u\dot{m} \quad (>0)$$

$$\Rightarrow F_{skyv} = ma, \quad \text{med skyvkraft } F_{skyv} = u\dot{m}$$

Hvis i tyngdefeltet :



$$F_{ytre} = -mg$$

$\Rightarrow$ Total kraft på (rest-)raketten :

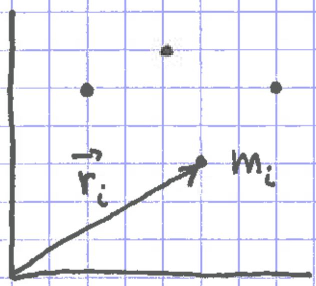
$$F_{skyv} + F_{ytre} = u\dot{m} - mg$$

$$\overset{N2}{\Rightarrow} \quad u\dot{m} - mg = ma$$

Til nå: Punktmasser

Nå: Partikkelsystemer. Stive legemer.

Massesenter. Tyngdepunkt [YF 8.5, oppg. 8.115 + 8.116; LL 5.6, 5.8, 6.1]

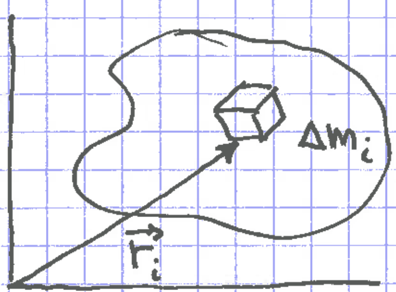


Massesenter (CM = center of mass) for N punktmasser $m_1, m_2, \cdots, m_N$ i posisjoner $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_N$:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

Total masse: $M = \sum_i m_i$

Med kontinuerlig massefordeling:



$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum_i \Delta m_i} \xrightarrow{\Delta m_i \to 0} \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm}$$

$$= \underline{\frac{1}{M} \int \vec{r}\, dm}$$

integral over der vi har masse

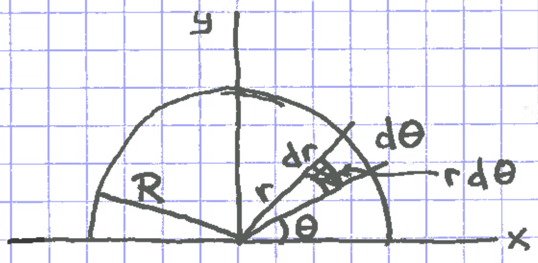
Masseelement:

$dm = \rho\, dV$, ρ = masse pr volumenhet, dV = volumelement (3D)

$dm = \sigma\, dA$, σ = — " — flate —"—, dA = flate —"— (2D)

$dm = \lambda\, d\ell$, λ = — " — lengde —"—, $d\ell$ = lengde —"— (1D)

Eks: Halvsirkulær tynn skive



$$dm = \sigma\, dA = \sigma \cdot r\, d\theta \cdot dr$$

$$M = \sigma \cdot \tfrac{1}{2}\pi R^2$$

$$\vec{r} = \hat{x}x + \hat{y}y = \hat{x}\, r\cos\theta + \hat{y}\, r\sin\theta$$

$X_{CM} = 0$ pga symmetri $\Rightarrow \vec{R}_{CM} = Y_{CM}\,\hat{y}$

$$Y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\, dm = \frac{2}{\sigma\pi R^2}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi} r\sin\theta \cdot \sigma \cdot r\, d\theta \cdot dr$$

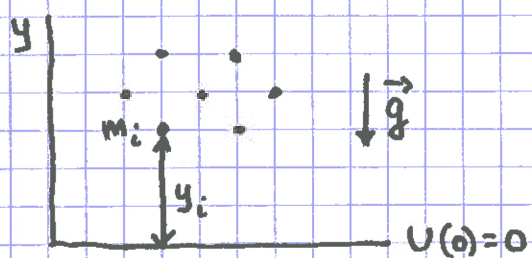
$$= \frac{2}{\sigma\pi R^2}\underbrace{\left\{\int_0^R r^2\, dr\right\}}_{\frac{1}{3}R^3}\cdot\underbrace{\left\{\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\right\}}_{\Big|_0^\pi(-\cos\theta) = 1+1=2}$$

$$= \frac{4}{3\pi}R \approx \underline{\underline{0.42\,R}}$$

[Vis selv: $Y_{CM} = \frac{2}{\pi}R$ for halvsirkulær bøyle (1D)

og $Y_{CM} = \frac{3}{8}R$ for kompakt halvkule (3D)]

Pot. energi U for partikkelsystem i tyngdefeltet



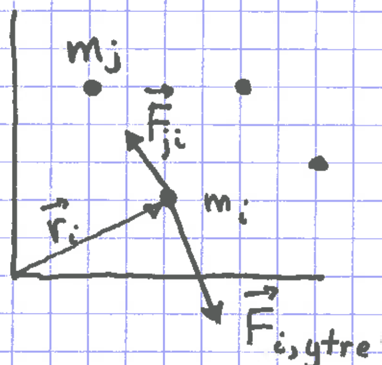
$$U = \sum_i U_i = \sum_i m_i g y_i$$

Hvis g = konst:

$$U = g\sum_i m_i y_i = g M Y_{CM}$$

Dvs: Som om hele massen $M = \sum_i m_i$ er samlet i høyden $Y_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i$ (og da f.eks. i $\vec{R}_{CM}$)

Tyngdepunktbevegelsen [YF 8.5; LL 5.8]



System med N masser; $m_1, m_2 \cdots m_N$

N2 for m_i:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \underbrace{\vec{F}_{i,ytre}}_{\text{total ytre kraft på } m_i} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{\text{total indre kraft på } m_i} \qquad (i = 1, 2, \cdots, N)$$

Legg sammen N2 for alle massene:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \underbrace{\sum_i \vec{F}_{i,ytre}}_{\text{= netto ytre kraft } \vec{F}_{ytre} \text{ på systemet}} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}$$

$$= \underbrace{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}}_{=0} + \cdots + \underbrace{\vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N}}_{=0}$$

$$= 0$$

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2}\left(M \vec{R}_{CM}\right) = M \ddot{\vec{R}}_{CM}$$

Dermed: $\boxed{M \ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{ytre}}$

Tyngdepunktet $\vec{R}_{CM}$ beveger seg som om hele massen M er samlet i $\vec{R}_{CM}$, og ble utsatt for summen av alle ytre krefter som virker på systemet.

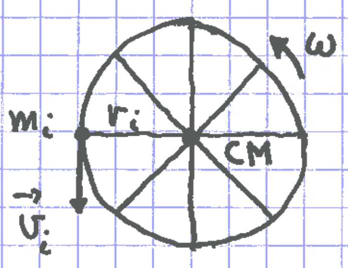
I tillegg: Rotasjon om CM.

Vibrasjon om CM.

ROTASJON [YF 9,10 ; LL 6 (5)]

Innledning :

- Roterende hjul

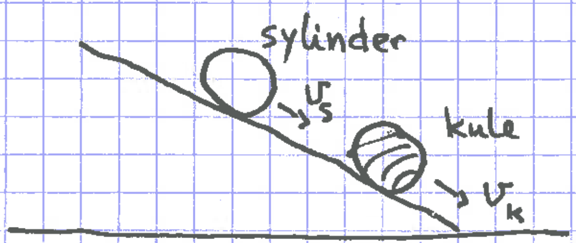


CM i ro $\Rightarrow$ $K_{trans} = 0$, men
$K_{rot} \neq 0$

Impuls : $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = 0$, men

<u>dreieimpuls</u> $\neq 0$

- Rulling



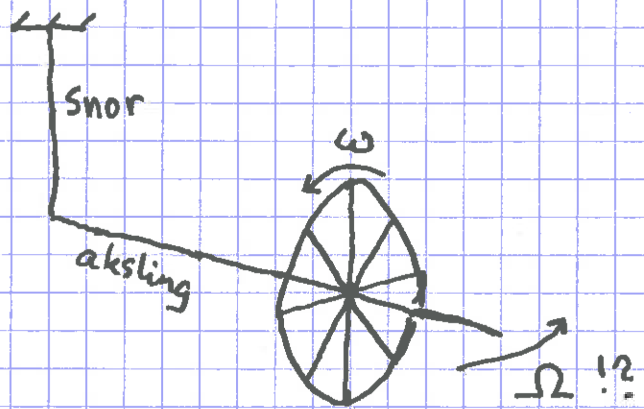
<u>Hvor</u> angriper kreftene?

<u>Dreiemoment</u>!

Hvorfor $v_k > v_s$?

Friksjonens rolle.

- Komplisert dynamikk



Presesjon.
Gyroskop.

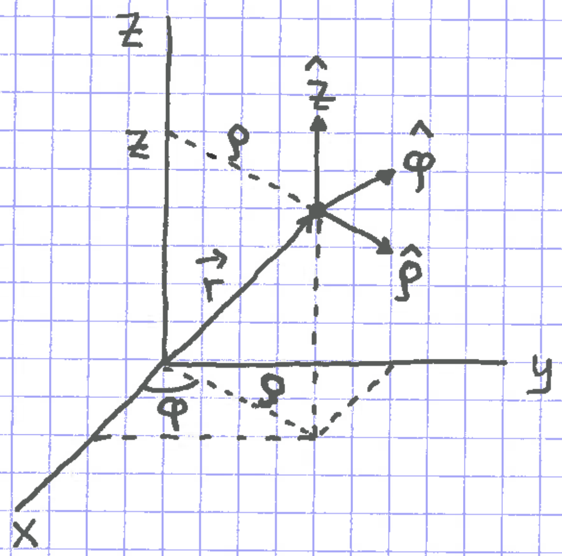
- Ser på <u>stive legemer</u> (= system med punktmasser i <u>fast</u> innbyrdes avstand)

Sirkelbevegelse [YF 9.1–9.3 ; LL 1.8]

(Repetisjon + generalisering)

Rotasjon om gitt akse, f.eks. z

$\Rightarrow$ Lurt med sylinderkoord. (= polarkoord. + z)



$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$

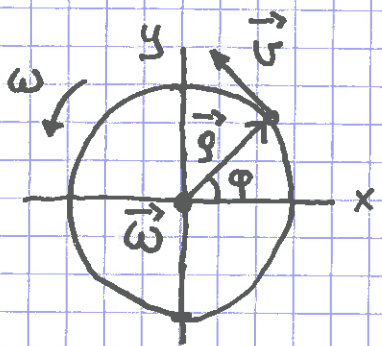
$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \tan\varphi = y/x$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\rho^2+z^2}$$

"Peker ut" rot. aksen med vinkelhastigheten:

$$\omega \longrightarrow \vec{\omega} = \omega\hat{z} \quad (= \omega\hat{\omega})$$



$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \rho\frac{d\varphi}{dt}\hat{\varphi} = \rho\omega\hat{\varphi}$$

$$\vec{\omega} = \omega\hat{z}, \quad \vec{\rho} = \rho\hat{\rho}$$

[Notasjon: $\bullet$ Vektor opp fra planet
$\times$ Vektor ned i planet]

Ser at kryssprodukt er skreddersydd:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{\rho}}$$

(Retning: $\hat{\varphi} = \hat{z}\times\hat{\rho}$; OK!
Abs.verdi: $v = \omega\rho$; OK!)