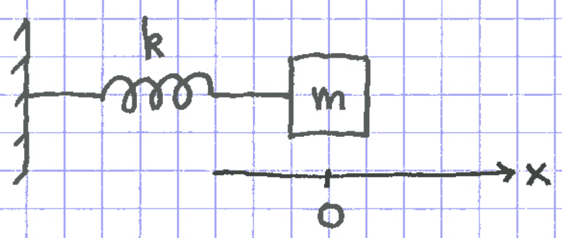
SVINGNINGER [YF 14 ; LL 9]

= oscillasjoner

= periodisk oppførsel omkring likevekt

Eks: masse/fjær, pendel, gitarstreng, luft i orgelpipe, atomer i molekyler og krystaller ......

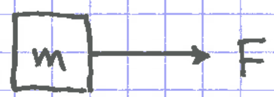
Harmonisk oscillator [YF 14.2 ; LL 9.1-9.3]



Likevekt $(F=0)$ med m i $x=0$ (evt. CM i $x=0$)

Strukket fjær, $x>0$:

Sammenpresset fjær, $x<0$:

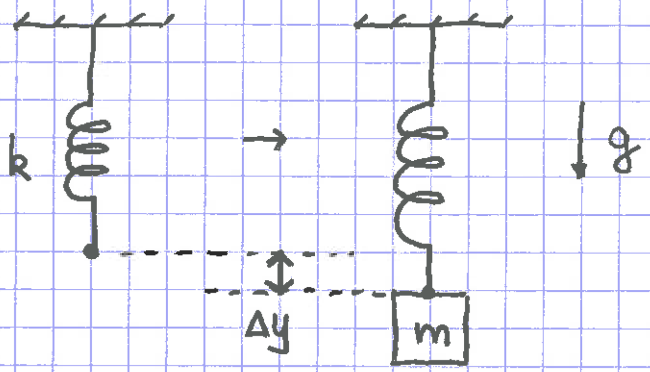


Hookes lov (ideell fjær): $|F| \sim |x|$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = -kx\hat{x}}$$

Fjærkonstanten : k $\quad [k] = N/m$

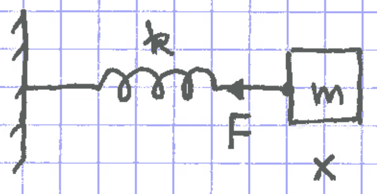
Vertikalt i tyngdefeltet:



Likevekt:

$$k \cdot \Delta y = mg$$

$$\Rightarrow \quad \Delta y = mg/k$$



N2: $-kx = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

Innfør $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Bevegelsesligning for enkel harmonisk oscillator, i en dimensjon

Løsning [TMA4110, øving 3]: Frie svingn. uten demping.

$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ evt. $x(t) = B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t$

der A og φ, evt. B og C, festlegges via

2 initialbetingelser, f.eks. $x(0) = x_0$ og $\dot{x}(0) = v_0$

[Bruk $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ til å finne sammenhengen mellom A, φ og B, C!]

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

A = amplitude = max utsving fra likevekt; $[A] = [x]$

ω_0 = vinkelfrekvens ; $[\omega_0] = s^{-1}$

$T = 2\pi/\omega_0$ = periode = tid pr svingning ; $[T] = s$

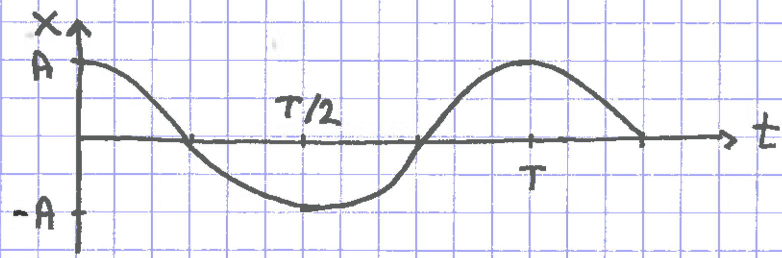
$f = 1/T$ = frekvens = antall svingninger pr tidsenhet ; $[f] = Hz = s^{-1}$

$\omega_0 t + \varphi$ = svingningens fase

φ = fasekonstant ; $[\varphi] = 1$

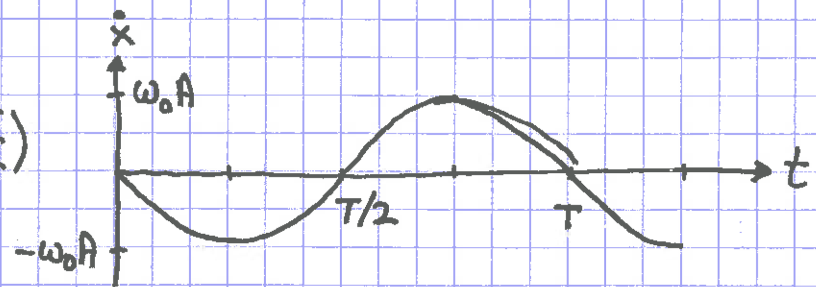
Anta $\varphi = 0$, $A > 0$:

$x(t) = A\cos\omega_0 t$



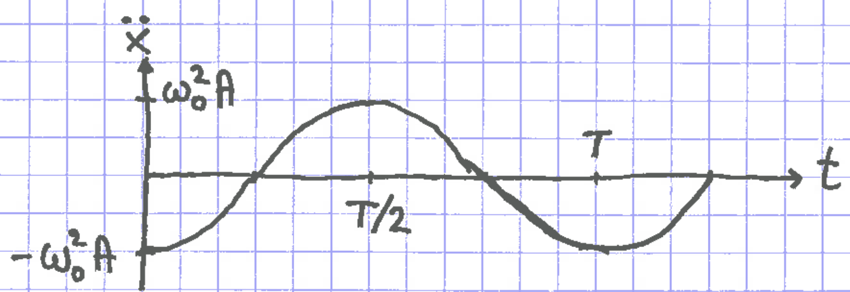
$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin\omega_0 t$

$= \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$



$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 A\cos\omega_0 t$

$= \omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \pi)$



Energi i harmonisk oscillator [YF 14.3; LL 9.4]

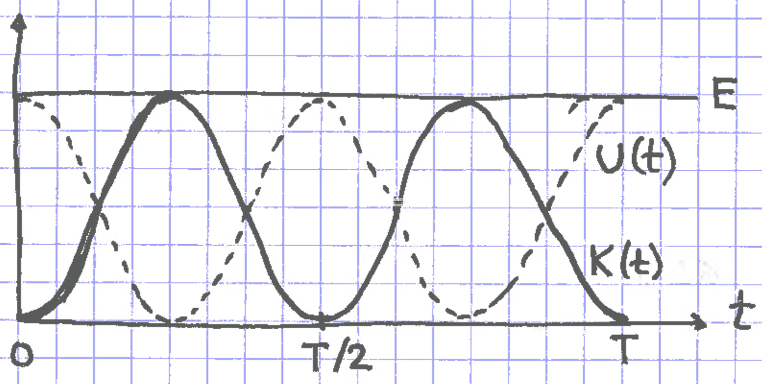
$$K(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 \omega_0 t$$

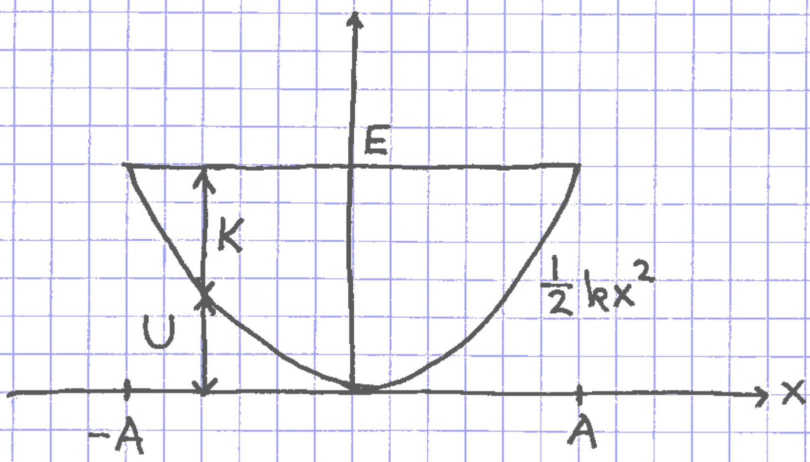
$$U(t) = -\int_0^x F[x(t)]\,dx = -\int_0^x [-kx(t)]\,dx = \frac{1}{2} k x(t)^2$$

$$= \frac{1}{2} k A^2 \cos^2 \omega_0 t$$

$$\Rightarrow E = K + U = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 = \text{konstant}$$

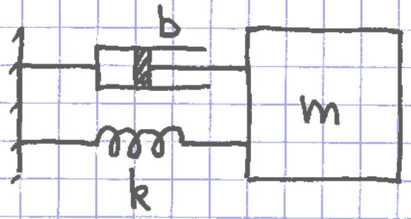
Dvs: Konservativt system (mek. energi E er bevart)





Dempet fri svingning [YF 14.7 ; LL 9.7]

Anta friksjon som for langsom bevegelse i fluid (s. 12):



$$f = -b\dot{x}$$

Netto kraft på m: $-kx - b\dot{x}$

N2: $-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$

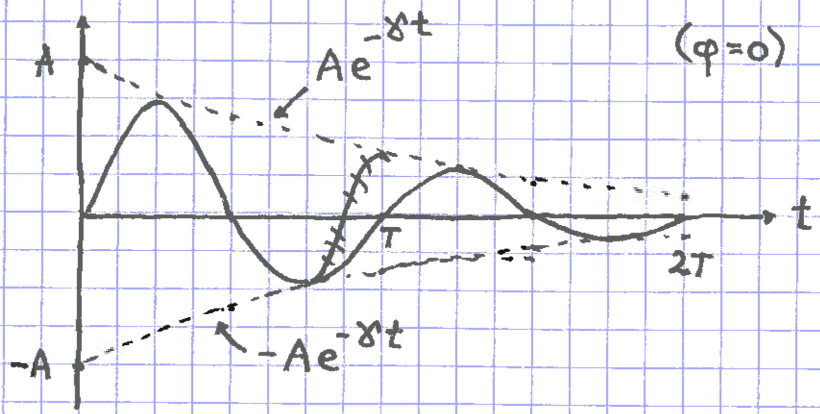
$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad ; \quad \gamma = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$[\gamma] = [\omega_0] = s^{-1}$$

Løsning [TMA 4110, øving 3]:

Underkritisk demping, $\gamma < \omega_0$ $\quad (b < 2\sqrt{k \cdot m})$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) \quad ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$$

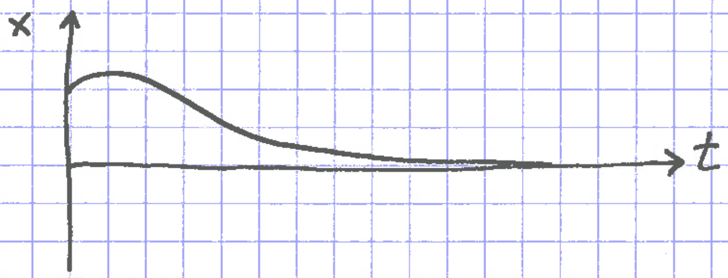


Amplituden $Ae^{-\gamma t}$ avtar eksponentielt med t

Overkritisk demping, $\gamma > \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t}$$

$$\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \,, \qquad \alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

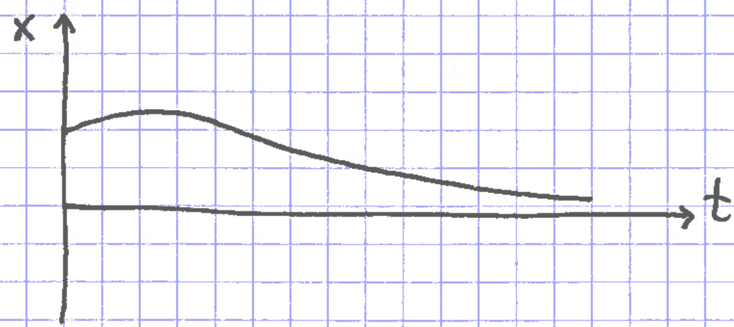


Ingen svingninger

Kritisk demping, $\gamma = \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} + B t e^{-\gamma t}$$

("Dobbel rot", $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma$)

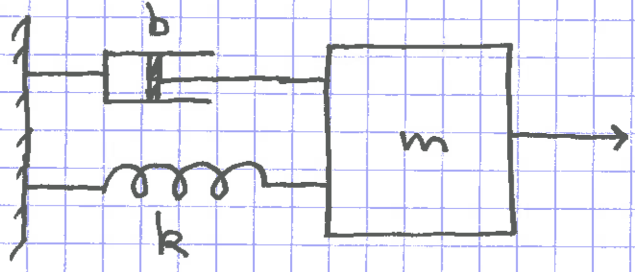


Eks: Støtdempere i bil.

Mest behagelig på humpete veier.

Tvungen svingning. Resonans   [YF 14.8 ; LL 9.9]

02.10.14



$F_y(t) = F_0 \cos \omega t$
$= $ ytre kraft, antas harmonisk

N2: $-kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

Løsning:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

der homogen løsn. x_h oppfyller $\ddot{x}_h + 2\gamma \dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$

og partikulærløsn. x_p oppfyller $\ddot{x}_p + 2\gamma \dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$

I starten (før $e^{-\gamma t} \ll 1$) bidrar både x_h og x_p til innsvingningsforløpet.

Etter hvert blir $\gamma t \gg 1$, $e^{-\gamma t} \approx 0$ og $x_h(t) \to 0$, slik at $x(t) = x_p(t)$.

Gjetter: $x_p(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \varphi)$

Innsetting av x_p, $\dot{x}_p$ og $\ddot{x}_p$ resulterer i:

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \quad ; \quad \varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right)$$

(med $\omega_0^2 = k/m$, $2\gamma = b/m$)

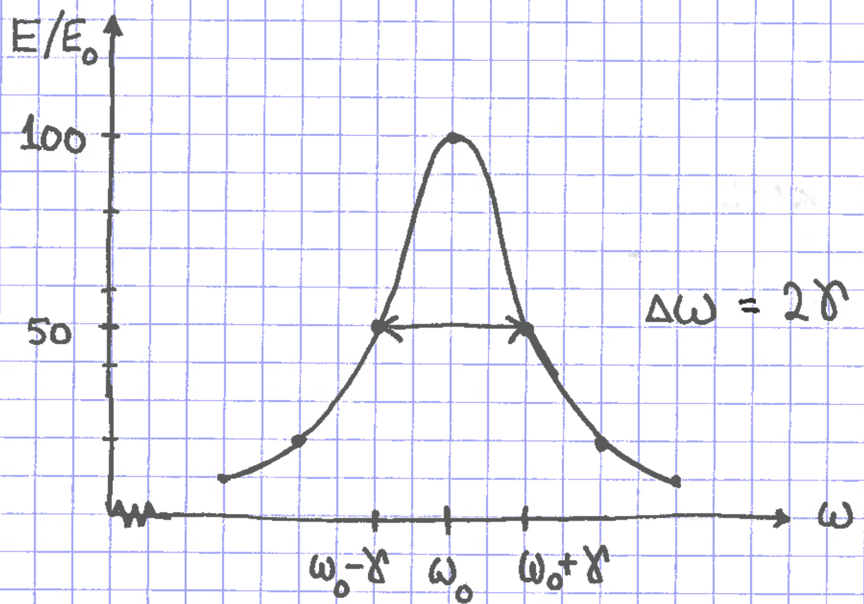
Resonans: Anta svak demping, $\gamma \ll \omega_0$. Ser da at amplituden A blir stor hvis ytre kraft har frekvens $\omega = \omega_0 = \sqrt{k/m}$ = systemets egenfrekvens (evt. resonansfrekvens): $A \to \infty$ når $\gamma \to 0$ og $\omega \to \omega_0$

La oss plotte oscillatorens energi (se s. 59):

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k \frac{F_0^2}{m^2} \cdot \frac{1}{\omega_0^4} \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$$

$$= \underbrace{\frac{F_0^2}{2k}}_{E_0} \cdot \underbrace{\frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}_{\text{dimensjonsløs størrelse}}$$

[OK for ω nær ω_0]



Anta $\gamma = 0{,}05\,\omega_0$

$\Delta\omega = 2\gamma$ = halvverdibredden

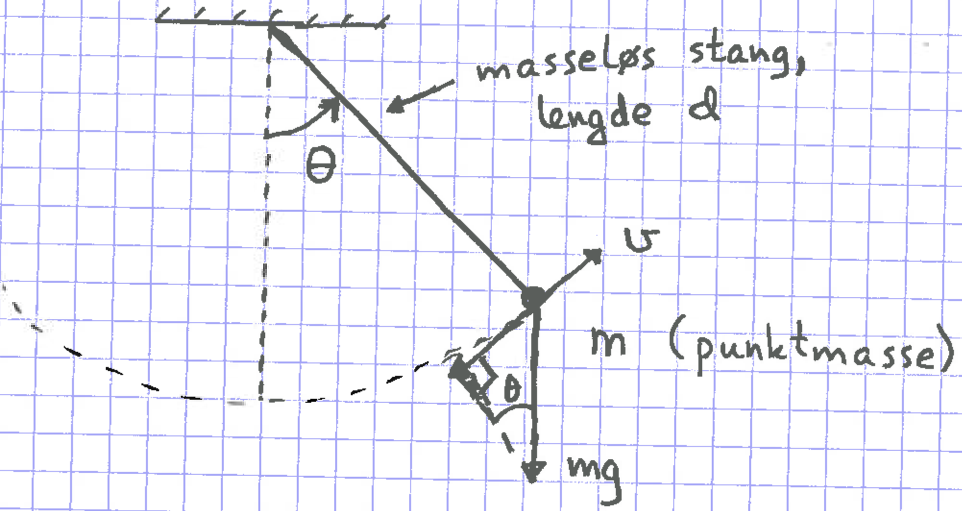
Q-faktor: Mål for resonanstoppens grad av "skarphet"

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

Jo mindre demping, jo større verdi for Q.

(Q for "quality"!) Her: $Q = 10$

Matematisk pendel [YF 14.5 ; LL 9.6]



N2 ∥ sirkelbuen :

$$-mg \sin\theta = m a_{\parallel} = m \frac{dv}{dt} = m d \frac{d\omega}{dt} = m d \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{d} \sin\theta = 0$$

Hvis vi hele tiden har <u>små</u> utsving, $|\theta| \ll 1$,
er $\sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{g/d}$$

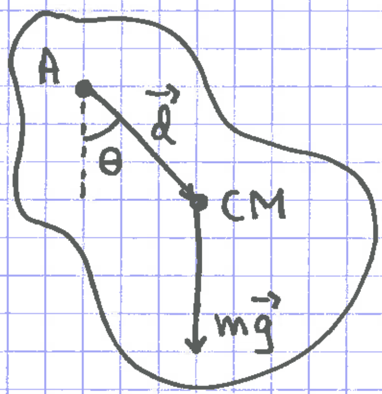
$$\Rightarrow \quad \theta(t) = \theta_0 \cos \omega_0 t$$

Dvs enkel harmonisk oscillator, med
svingeperiode $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{d/g}$

[Øving 7: Numerisk løsning av $\ddot{\theta} + \frac{g}{d}\sin\theta = 0$. Obligatorisk!]

Fysisk pendel

[YF 14.6; LL 9.6]



Stivt legeme, masse m, svinger om akse gjennom A, treghets-moment I mhp rot. aksen, $\vec{d} = \vec{R}_{CM}$ med A som ref. punkt

N2 for rotasjon om fast akse gjennom A:

$$\tau = I\dot{\omega} = I\ddot{\theta} \quad \text{med} \quad \tau = -d \cdot mg \cdot \sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{mgd}{I}\sin\theta = 0$$

Hvis små utsving: $\sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0 \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

[Sjekk for punktmasse m i CM, masseløs stang med lengde d: $I = m \cdot d^2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{g/d}$, som s. 64, OK!]

Steiners sats: $I = I_0 + md^2$; I_0 er tregh.mom mhp akse gjennom CM

$$\Rightarrow T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + md^2}{mgd}}$$

[$\Rightarrow$ T blir stor når $d \to 0$, som ventet]