

BØLGER[YF 15, (11.4) ; LL 10 (7.2)]
16Innledning

Bølge = forplantning av forstyrrelse fra likevekt
(f.eks. en swingning)

Energi (og impuls) forplanter seg med bølgen.

Partikler svinger, men forplanter seg ikke.

Transversale bølger: partikler svinger $\perp$ forplantningsretn.

Longitudinale — " — : — " — || — " —

Eksempler:

<u>Bølgetype</u>	<u>Hva svinger?</u>	<u>Transv./Longit.?</u>
Bølger på streng	Strenglementer	T
Bølger i fjær	Fjær — " —	T eller L
Lydbølger	Molekyler i mediet (gass, væske, fast stoff)	L

Ikke i TFY4106:

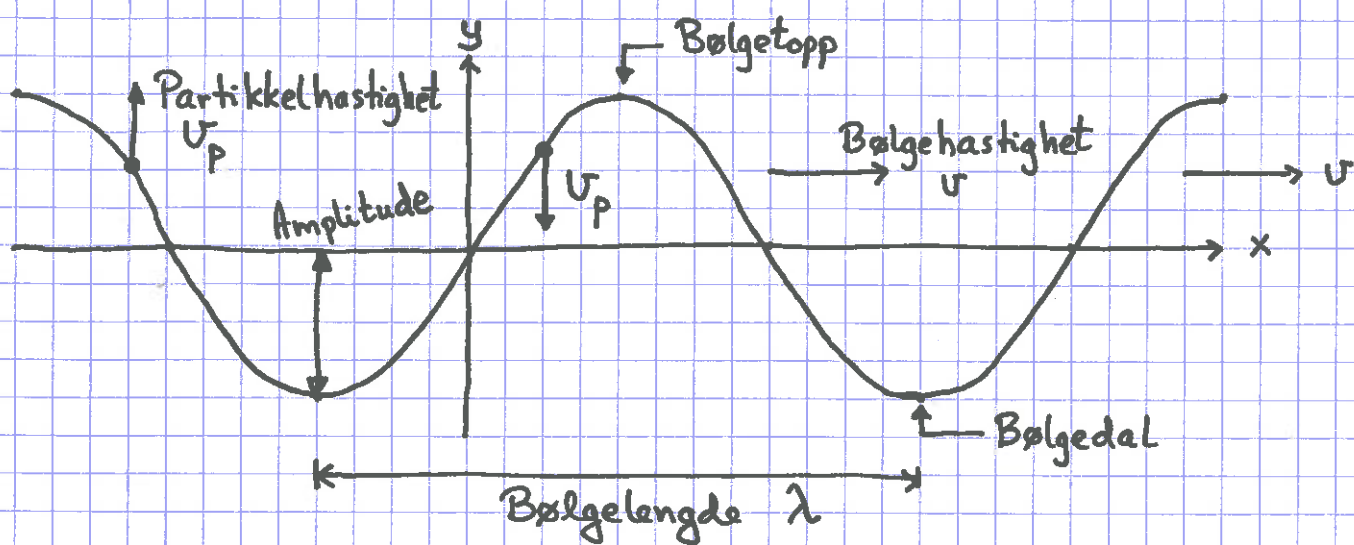
Overflatebølger (på f.eks vann)	Vannet	T og L (kombinert; sirkelbevegelse)
Elektromagnetiske bølger	Elektrisk felt $\vec{E}$ og magnetfelt $\vec{B}$	T

Harmonisk bølge

[YF 15.2, 15.3; LL 10.2]

(67)

Ser på transv. bølge på (uendelig lang) streng;
 $y(x, t)$ = utsving fra likevekt ($y=0$) av strengen
i posisjon x ved tid t



T = periode = tid for bølgemønstret å bevege seg
en bølgelengde λ

$\Rightarrow$ Bølgehastighet: $v = \lambda / T$ (Kalles også fasehastighet)

f = frekvens = antall svingninger (for gitt strengeløp)
pr tidsenhet

$\Rightarrow f = 1/T$

ω = vinkel frekvens = bølgens faseendring (for gitt
strengeløp) pr tidsenhet

$\Rightarrow \omega = 2\pi f = 2\pi / T$

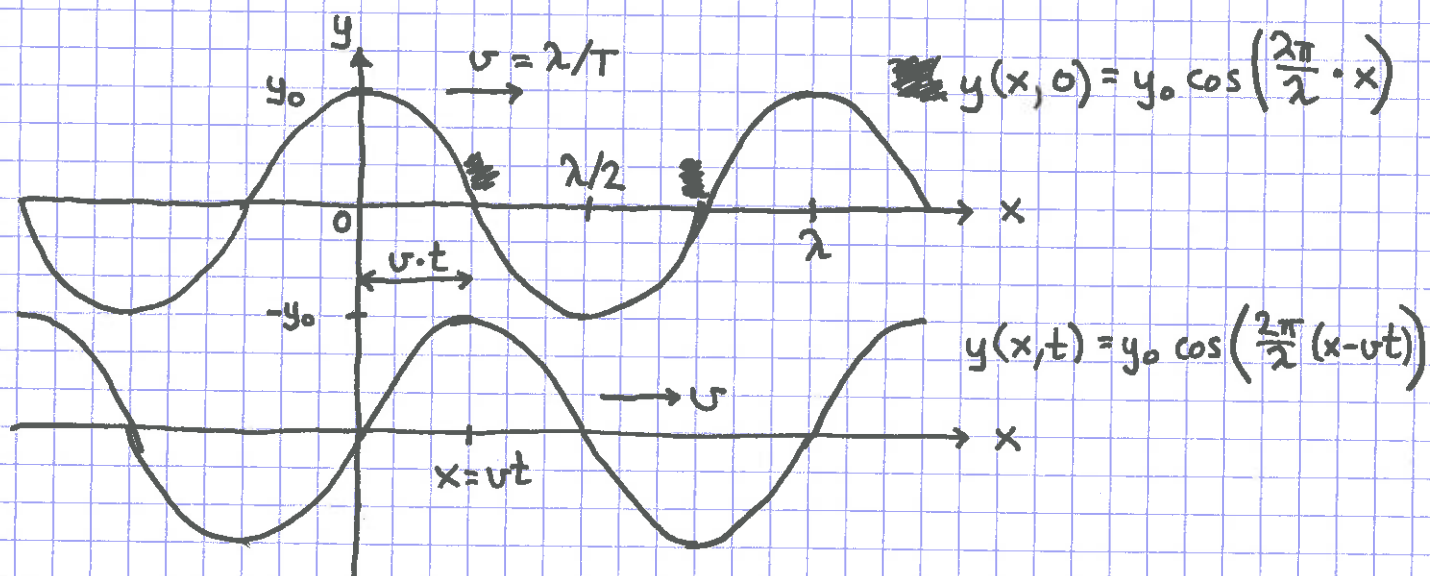
(faseendring 2π pr svingning)

Partikkelhastighet: $v_p = dy/dt$

(68)

[Med longit. bølge er $v_p = dx/dt$]

Matematisk form på $y(x, t)$:



$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \cdot v = \omega$$

Innfører bølgetallet: $k \stackrel{\text{def.}}{=} 2\pi/\lambda$ $[k] = m^{-1}$

$$\Rightarrow \boxed{y(x, t) = y_0 \cos(kx - \omega t)}$$

Harm. bølge som forpl. seg i positiv x -retning
med hastighet $v = \lambda/T = \omega/k$

Tilsv. for forpl. i negativ x -retn: $\boxed{y(x, t) = y_0 \cos(kx + \omega t)}$

Mer generelt:

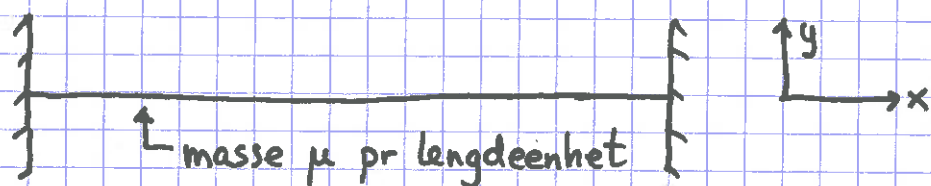
Harm. transv. bølge: $\vec{D}(x, t) = \hat{y} D_0 \cos(kx \pm \omega t + \varphi)$

Harm. longit. bølge: $\vec{D}(x, t) = \hat{x} D_0 \cos(kx \pm \omega t + \varphi)$

Forpl. i $\begin{smallmatrix} \text{neg.} \\ \text{pos.} \end{smallmatrix}$ x -retn. ($\varphi = \text{fasekonst.}$)

Transversal bølge på streng [YF 15.4; LL 10.1] (69)

Likerekt: Horizontal strukket streng, utsving $y=0$ overalt, strekk-kraft $S \gg$ strengens tyngde (som neglisjeres)

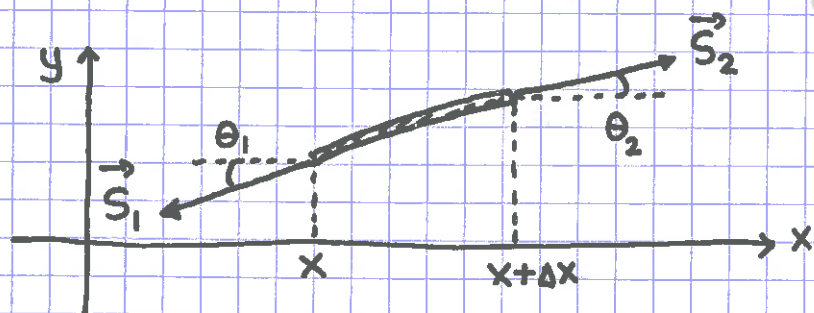


Hvordan forplanter en forstyrrelse fra likerekt seg?

Antar små utsving $y(x, t)$ og ingen horisontal bevegelse

$\Rightarrow$ konstant horisontal strekk-kraft $S_x = S$ overalt

Bruker N2 på lite strengeløp mellom x og $x+\Delta x$, med masse $\Delta m = \mu \cdot \Delta x$:



$$\vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \Delta m \cdot \vec{a}$$

$$\left. \begin{array}{l} S_{1x} = -S_1 \cos \theta_1 = -S \\ S_{2x} = S_2 \cos \theta_2 = S \end{array} \right\} \Rightarrow S_{1x} + S_{2x} = 0 \quad (\text{OK})$$

$$\left. \begin{array}{l} S_{1y} = -S_1 \sin \theta_1 \\ S_{2y} = S_2 \sin \theta_2 \end{array} \right\} \Rightarrow S_2 \sin \theta_2 - S_1 \sin \theta_1 = \Delta m \cdot \ddot{y}$$
$$S_{1y} + S_{2y} = \Delta m \cdot \ddot{y}$$

Divisjon med hvor $S = S_2 \cos \theta_2$, $S = S_1 \cos \theta_1$ og S gir: (70)

$$\underbrace{\frac{S_2 \sin \theta_2}{S_2 \cos \theta_2}}_{\tan \theta_2} - \underbrace{\frac{S_1 \sin \theta_1}{S_1 \cos \theta_1}}_{\tan \theta_1} = \frac{\Delta m}{S} \cdot \ddot{y} = \frac{\mu}{S} \cdot \Delta x \cdot \ddot{y}$$

Vi ser at $\tan \theta = \frac{\partial y}{\partial x} =$ strengens helning

$$\Rightarrow \frac{1}{\Delta x} \left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x \right\} = \frac{\mu}{S} \cdot \ddot{y}$$

Når $\Delta x \rightarrow 0$, er venstre side, pr def, lik $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

Dermed:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{S} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

$\Rightarrow$ Bølgehast: $v = \sqrt{S/\mu}$

Bølgelign. for transv. utsving $y(x,t)$
på streng strukket med kraft S ,
og med masse μ pr lengdeenhet

Lineær, 2.ordens partiell diff. ligning; beskriver også
forplantning av lyd (som vi skal se) og lys etc.

Generell løsning: $\boxed{y(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)}$

[Superposisjonsprinsippet!]

[der f og g er to ganger deriverbare funksjoner]

Bevis: Innfør $z = x \pm vt$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}; & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}; & \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= \dots = \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = -v \frac{\partial f}{\partial z}; & \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= -v \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial z} = -v \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = (-v)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}; & \\ \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} &= \dots = (+v)^2 \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} & \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}; & \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \quad \boxed{QED} \end{aligned}$$

Elastisitet [YF 11.4 ; LL 7.2]

(71)

09.10.14

Hookes lov ("linear respons"):

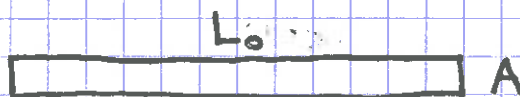
Resulterende deformasjon (dvs relativ lengde- eller volumendring) er proporsjonal med mekanisk spenning (dvs kraft pr flateenhet).

$$\text{Elastisk modul} = \frac{\text{Mek. spenning}}{\text{Relativ deformasjon}}$$

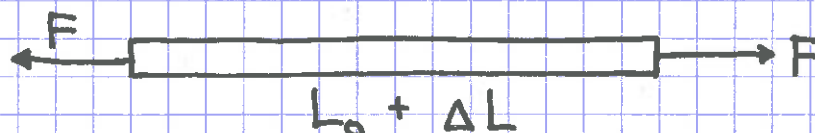
$$[\text{Elastic modulus} = \frac{\text{Stress}}{\text{Strain}}]$$

Strek (evt. sammenpressing) av tynn stang:

Likerekt:



Med strekk:



Hookes lov:

$$E = \frac{F/A}{\Delta L/L_0}$$

$$E = \text{elastisitetsmodulen}; [E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa} \quad (\text{pascal})$$

(evt. som i YF: Youngs modul Y)

Betraktet som ideell fjær:

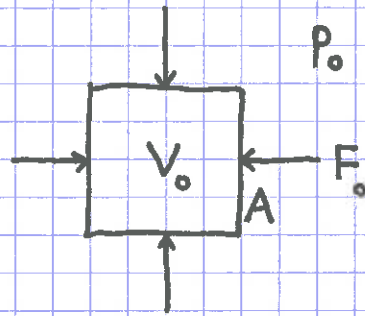
$$F = k \cdot \Delta L, \quad \text{med } k = E \cdot A / L_0$$

Eks: Stål, $E \approx 200 \text{ GPa}$ ($= 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$); Grafen, $E \approx 1050 \text{ GPa}$

Volumkompressibilitet:

(72)

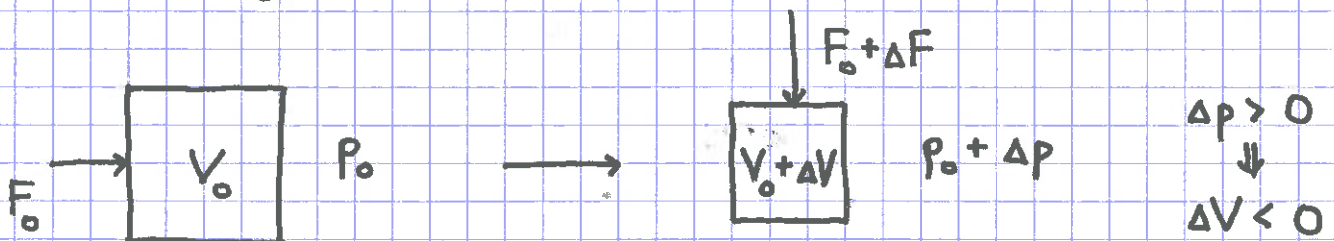
Likerekt:



$$P_0 = F_0 / A = \text{likerektstrykket (isotropt i fluid)}$$

F_0 = nettokraft på arealet A fra omgivelsene

Trykkøkning $\Rightarrow$ Volumreduksjon:



"Hookes lov":
$$B = - \frac{\Delta F / A}{\Delta V / V_0} = - \frac{\Delta p}{\Delta V / V_0}$$

B = bulkmodulen (B^{-1} = kompressibiliteten)

$$[B] = \text{N/m}^2 = \text{Pa}$$

Eks: Stål, $B \approx 160 \text{ GPa}$

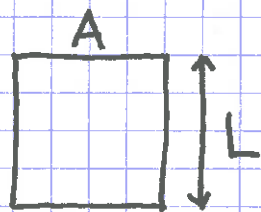
Vann, $B \approx 2 \text{ GPa}$

Luft, $B \approx 0.0001 \text{ GPa}$

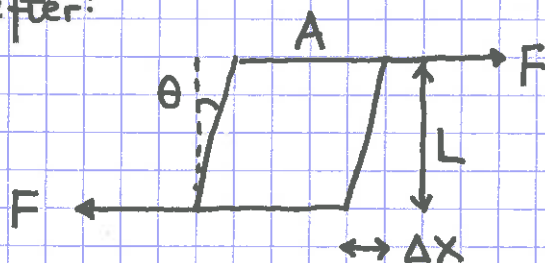
Dvs, $B_{\text{gass}} \ll B_{\text{væske}} < B_{\text{fast stoff}}$

Skjærmodul:

Likerekt:



Med skjærkrefter:



"Hookes lov":

$$G = \frac{F/A}{\Delta x/L} \quad \left(= \frac{F/A}{\tan \theta} \right)$$

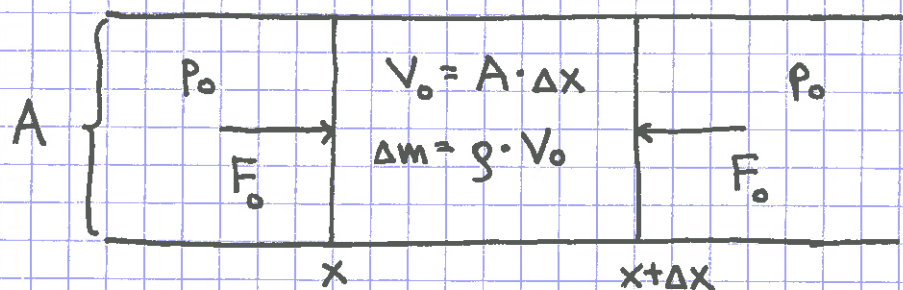
$$G = \text{skjærmodulen} ; [G] = \text{Pa}$$

Eks: Stål, $G \approx 79 \text{ GPa}$ Dvs, $E \sim B > G$ (for de fleste faste stoffer)

Longitudinale mekaniske bølger. Lyd

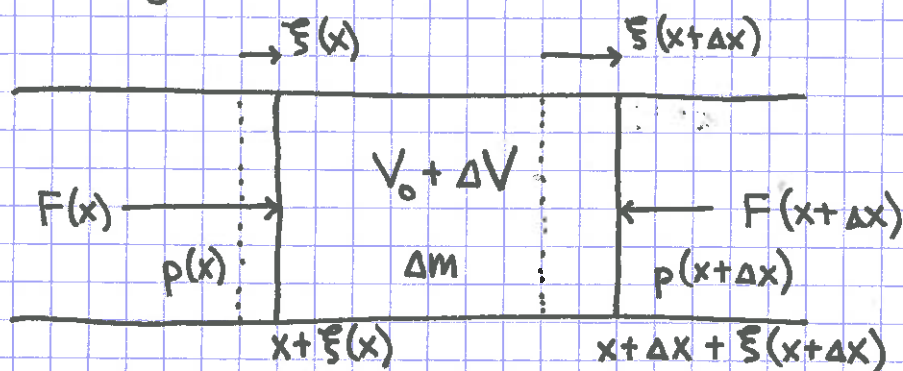
[YF 16.1, 16.2; LL 10.6]

Ser på cylinder med fluid:



Likerekt;
 ρ = masse pr
 volumenhet

Med forstyrrelse: [Egentlig $\xi(x, t)$; underslår tidsafhængigheden i udtrykkene indtil videre]



$$p(x) = p_0 + \Delta p(x), \quad p(x + \Delta x) = p_0 + \Delta p(x + \Delta x)$$

$$\Delta V = [\xi(x + \Delta x) - \xi(x)] \cdot A = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \Delta x \cdot A$$

$$\Delta p(x) = \frac{F(x) - F_0}{A}, \quad \Delta p(x + \Delta x) = \frac{F(x + \Delta x) - F_0}{A}$$

Fra s. 72: $\Delta p = -B \Delta V / V_0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta p(x) &= -B \cdot (\partial \xi / \partial x)_x \cdot \Delta x \cdot A / \Delta x \cdot A \\ &= -B \cdot (\partial \xi / \partial x)_x \end{aligned}$$

N2 for massen Δm :

$$\begin{aligned}\Delta m \cdot \ddot{\xi} &= F(x) - F(x + \Delta x) \\ &= [\Delta p(x) - \Delta p(x + \Delta x)] \cdot A \\ &= -B \cdot \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x + \Delta x} \right] \cdot A \\ &= B \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \cdot \Delta x \cdot A\end{aligned}$$

$$\Delta m = \rho \cdot A \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow \rho \cdot \ddot{\xi} = B \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Dermed:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{med} \quad v = \sqrt{B/\rho}}$$

Eks: Luft: $\sqrt{1.42 \cdot 10^5 \text{ Pa} / 1.29 \text{ kg/m}^3} = 332 \text{ m/s}$
Vann: $\sqrt{2.2 \cdot 10^9 \text{ Pa} / 1000 \text{ kg/m}^3} = 1483 \text{ m/s}$
Stål: $\sqrt{2.65 \cdot 10^{11} \text{ Pa} / 7800 \text{ kg/m}^3} = 5832 \text{ m/s}$ $[v = \sqrt{(B + \frac{4}{3}G)/\rho}]$

Hvis tynn stang (fast stoff): E erstatter B

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{med} \quad v = \sqrt{E/\rho}$$

Seismiske bølger:

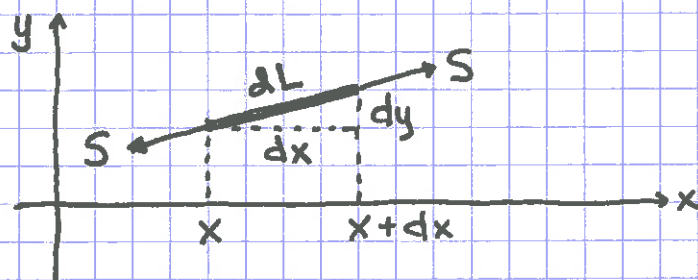
Både transv. og longit. bølger, såkalte S-bølger ("sekundære") og P-bølger ("primære").

$$v_s = \sqrt{G/\rho}, \quad v_p = \sqrt{(B + 4G/3)/\rho} > v_s$$

$\Rightarrow$ P-bølgene ankommer først ved jordskjelv

Energi transportert med bølge [YF 15.5; LL 10.5] (76)

Ser på transv. bølge på streng:



Strengeløst med lengde dL , masse $dm = \mu dx$, strekk-kraft S .

Kin. energi: $dK = \frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu dx \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$

Pot. energi: $dU = S \cdot (dL - dx)$

forlengelsen av strengeløstet

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx (1 + (dy/dx)^2)^{1/2}$$

$$\approx dx \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (\text{sidan } dy \ll dx ; \text{ små utsving})$$

$$\Rightarrow dU = \frac{1}{2} S dx \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

$\Rightarrow$ Mek. energi pr lengdeenhet:

$$\varepsilon = dE/dx = dK/dx + dU/dx$$

$$= \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} S \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

$$\text{Sidan } y(x, t) = y(x \pm vt) \text{ er } \frac{\partial y}{\partial t} = \pm v \frac{\partial y}{\partial x};$$

dessuten er $S = \mu v^2$. Dermed:

$$\varepsilon = \mu v^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \pm \mu v \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial x}$$

Enhet: J/m