

$$y(x,t) = y(x \pm vt) \Rightarrow \epsilon(x,t) = \epsilon(x \pm vt)$$

13.10.14

Dvs: energitetheten ϵ oppfyller bølgeligningen,

$$\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2},$$

som betyr at energien forplanter seg med hastighet v (her: $v = \sqrt{S/\mu}$) i bølgens forplantningsretning.

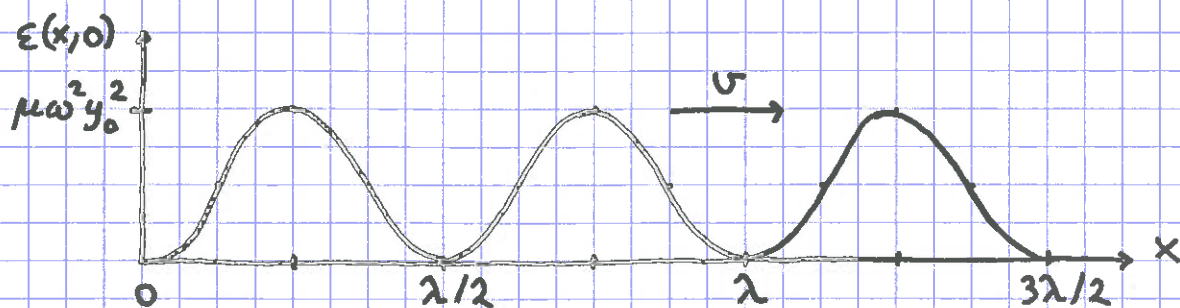
Eks: Harmonisk bølge

$$y(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t) \quad (k = 2\pi/\lambda, \omega = 2\pi/T, v = \frac{\omega}{k})$$

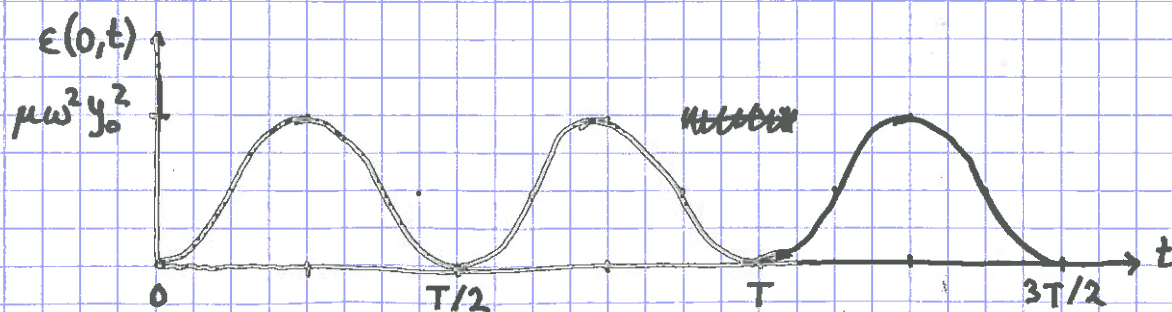
$$\partial y / \partial x = -k y_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \epsilon(x,t) &= \mu v^2 k^2 y_0^2 \sin^2(kx - \omega t) \\ &= \mu \omega^2 y_0^2 \sin^2(kx - \omega t) \end{aligned}$$

Øyeblikksbilde ($t=0$): $\epsilon(x,0) = \mu \omega^2 y_0^2 \sin^2 kx$



Fast posisjon ($x=0$): $\epsilon(0,t) = \mu \omega^2 y_0^2 \sin^2 \omega t$



Med plan longitudinal bølge, dvs lydbølge:

1D $\rightarrow$ 3D, $\mu \rightarrow \rho$ = masse pr volumenhet,

$\epsilon = dE/dx \rightarrow dE/dV$ = energi pr volumenhet

$y \rightarrow \xi$ = molekylernes (midlere) utsving fra likevekt

$$\Rightarrow \epsilon(x,t) = \rho v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = \rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = \pm \rho v \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Enhet: J/m³

Midlere energitetthet i harmonisk bølge:

Ser fra figuren for $\epsilon(x,0)$ på s. 77 at

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2 \quad (\text{romlig middelverdi})$$

og fra fig. for $\epsilon(0,t)$ at

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2 \quad (\text{tidsmiddel})$$

Formelt:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int_0^\lambda \epsilon(x,t) dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \epsilon(x,t) dx$$

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\int_0^T \epsilon(x,t) dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T} \int_0^T \epsilon(x,t) dt$$

Siden $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, og middelveiden av = (79)
 $\sin^2 \varphi$ og $\cos^2 \varphi$ må være like store, følger det at

$$\langle \sin^2 \varphi \rangle = \langle \cos^2 \varphi \rangle = \frac{1}{2},$$

$$\text{evt } \overline{\sin^2 \varphi} = \overline{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{2},$$

altså, enten vi midler over en periode T for gitt posisjon
eller vi midler over en bølgelengde λ for gitt tidspunkt.

Tilsvarende for plan harmonisk lydbølge:

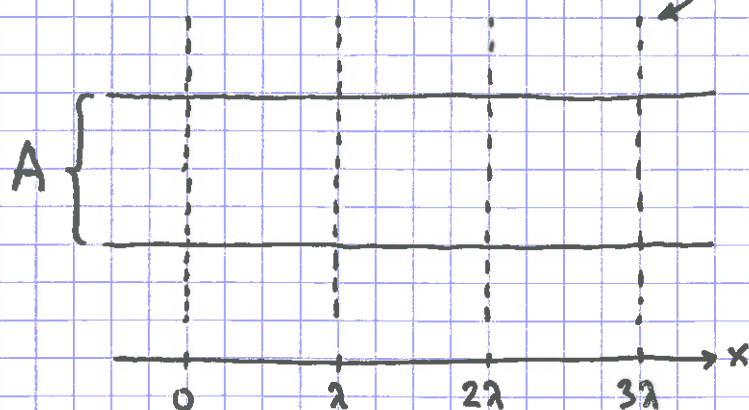
$$\bar{\epsilon} = \langle \epsilon \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2$$

Bølgens intensitet I [YF 16.3 ; LL 10.5]

I = overført energi pr tidsenhet og pr flateenhet
= overført effekt pr flateenhet

Enhet: $[I] = \text{W/m}^2$

Plan harmonisk lydbølge: Bølgetopper (f.eks)



Energi mellom $x=0$ og $x=\lambda$:

$$\bar{\epsilon} \cdot A \cdot \lambda$$

Passerer $x=\lambda$ i løpet av
tiden T . Dermed:

$$I = \frac{\bar{P}}{A} = \frac{\bar{\epsilon} A \lambda / T}{A} = \bar{\epsilon} \cdot v$$

$$(v = \lambda / T)$$

Desibel (dB)

(80)

Såriddt hørbar lyd: $I = I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ (Standard referanse)

Smertegrense: $I = 1 \text{ W/m}^2$

Stort spenn $\Rightarrow$ Hensiktsmessig med logaritmisk skala:

$$\boxed{\# \text{ dB} \stackrel{\text{def}}{=} 10 \log \frac{I}{I_0}} \quad (= \text{lydtrykksnivået})$$

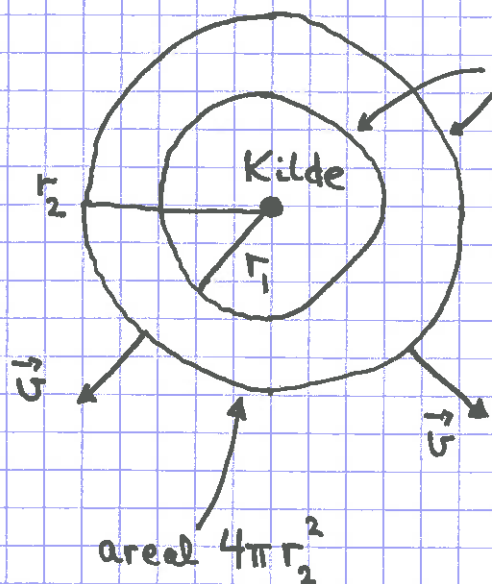
Høregrensen: $10 \log (10^{-12}/10^{-12}) = 10 \log 1 = \underline{0 \text{ dB}}$

Normal samtale: $10 \log (10^{-6}/10^{-12}) = 10 \log 10^6 = \underline{60 \text{ dB}}$

Smertegrensen: $10 \log (1/10^{-12}) = 10 \log 10^{12} = \underline{120 \text{ dB}}$

Kulebølger

Kuleformet bølgekilde $\Rightarrow$ Forplantning av bølge med lik intensitet i alle retninger:



Kuleformede bølgefronter, dvs flater med konstant fase, forplanter seg radielt utover.

Pga energibevarelse må like mye energi, og dermed like mye effekt passere en vilkårlig valgt kuleflate.

Dermed: $\langle P_1 \rangle = \langle P_2 \rangle$

(81)

$$\Rightarrow 4\pi r_1^2 \cdot I_1 = 4\pi r_2^2 \cdot I_2$$

$$\Rightarrow I_2 / I_1 = r_1^2 / r_2^2$$

$$\Rightarrow I(r) \sim 1/r^2 \quad \text{for } \underline{\text{kulebølger}}$$

Eks: Kuleformet (evt. halvkuleformet) høytaler
læger lyd med intensitet (lydtrykksnivå)

100 dB i afstand 1 m. Hva er intensiteten
10 m fra høytaleren?

Løsn:

$$100 \text{ (dB)} = 10 \log(I(1)/I_0) \Rightarrow \frac{I(1)}{I_0} = 10^{10}$$

$$\Rightarrow I(10) = I(1) \cdot (1/10)^2 = I(1)/100 = I_0 \cdot 10^8$$

$$\Rightarrow 10 \log 10^8 = \underline{\underline{80 \text{ dB}}} \quad \text{i afstand 10 m fra høytaleren}$$

Lang sylinderformet bølgekilde $\Rightarrow$ Sylinderformede
bølgefronter med areal prop. med avstanden r
fra kilden $\Rightarrow I(r) \sim 1/r$ for sylinderbølger

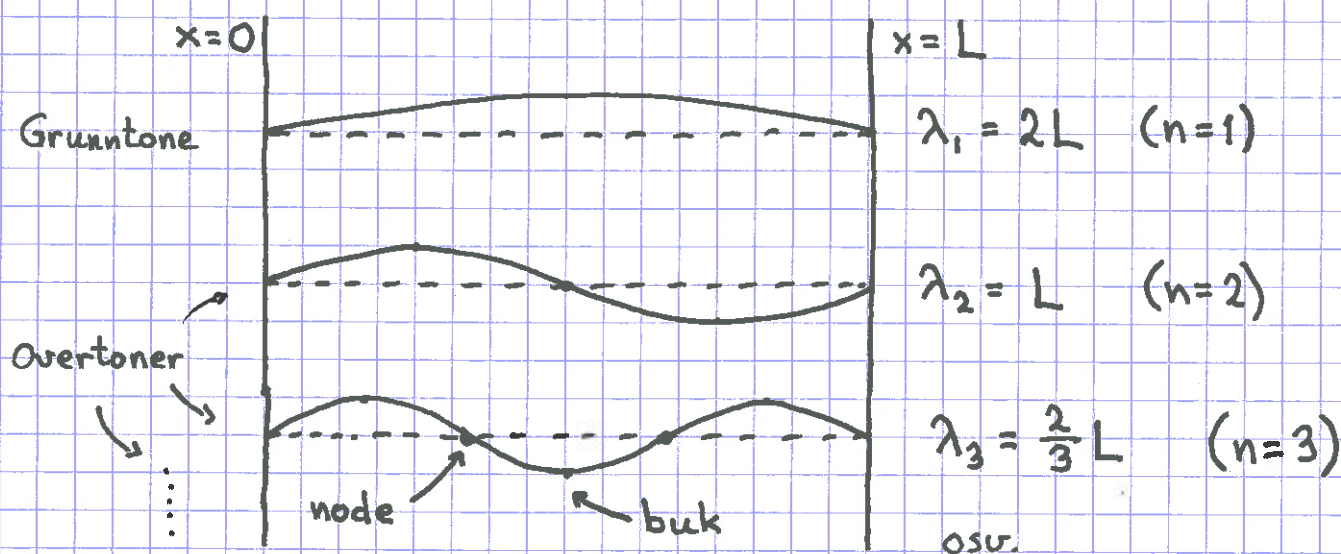
Stor plan bølgekilde $\Rightarrow$ Plane bølgefronter med
areal uavhengig av avstanden fra kilden

$$\Rightarrow I = \text{konst. (uavh. av } r) \quad \text{for } \underline{\text{plane bølger.}}$$

Stående bølger [YF 15.7, 15.8, 16.4; LL 10.3] (82)

16.10.14

Vi innser at en ren harmonisk bølge på en streng med lengde L , fastspent i begge ender, må ha bølgelengde λ slik at $L = n \cdot \lambda / 2$:



For gitt $\lambda = 2\pi/k$ og $T = 2\pi/\omega$ er generell løsning av bølgeligningen: $y(x,t) = y_1 \sin(kx - \omega t) + y_2 \sin(kx + \omega t)$.
 $y(0,t) = 0 \Rightarrow -y_1 \sin \omega t + y_2 \sin \omega t = 0 \Rightarrow y_2 = y_1 = y_0$.

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\Rightarrow y(x,t) = y_0 \{ \sin kx \cos \omega t - \cos kx \sin \omega t + \sin kx \cos \omega t + \cos kx \sin \omega t \}$$
$$= 2y_0 \sin kx \cos \omega t$$

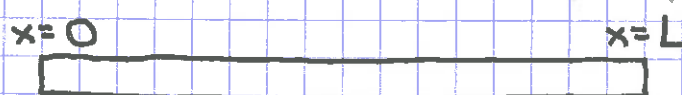
Dette er en svingning med posisjonsavhengig amplitude $2y_0 \sin kx$. Vi kaller det gjerne en stående bølge.

Siden $y(L,t) = 0$, må vi ha $\sin kL = 0$, dvs $k \cdot L = n \cdot \pi$, som gir mulige bølgelengder $\lambda_n = 2L/n$ ($n=1,2,3,\dots$).

Bølgehastigheten er $v = \sqrt{S/\mu}$, med S = strekk-kraft og μ = masse pr lengdeenhet. Mulige frekvenser for stående bølger på streng med lengde L og fast i begge ender er da:

$$f_n = v/\lambda_n = \sqrt{S/\mu} \cdot n/2L \quad (n=1,2,3,\dots)$$

Helt tilsvarende med et rør med lengde L , lukket i begge ender, og (f.eks.) fylt med luft:



Luftmolekylene kan ikke ha utsving fra likevekt der det står en vegg $\Rightarrow \xi(0,t) = \xi(L,t) = 0$.

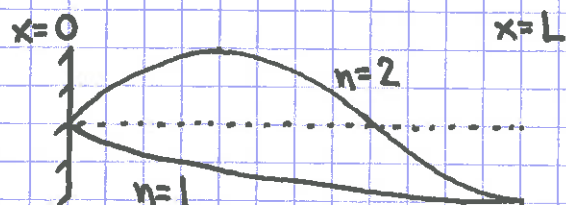
En ren harmonisk bølge må også her bli en stående bølge, $\xi(x,t) = 2\xi_0 \sin kx \cos \omega t$, med tillatte bølgelengder $\lambda_n = 2L/n$, og dermed frekvenser

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{\sqrt{B/\rho} \cdot n}{2L} \quad (n=1,2,3,\dots)$$

B = mediets bulkmodul, ρ = mediets massetetthet

Streng med fri ende; rør med åpen ende:

Buk (max amplitude) i stedet for node (null amplitude) i den frie/åpne enden. Dermed, med en fri/åpen ende:



$$\lambda_1 = 4L, \lambda_2 = 4L/3, \lambda_3 = 4L/5 \dots$$

$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{4L}{2n-1} \quad (n=1,2,3,\dots)$$

To åpne/frie ender gir $\lambda_n = 2L/n$, som med to faste/lukkede.

Trykkbølgen (s. 74): $\Delta p(x,t) = -B \partial \xi / \partial x = -2kB\xi_0 \cos kx \cos \omega t$

(med to lukkede ender)

$\Rightarrow$ Max amplitude for Δp
der utsvinget ξ har node,
og omvendt.

Eks: C-streng på cello. Hva må strekk-kraften S være for å gi en grunntone på 65.4 Hz, med lengde 695 mm og materiale slik at $\mu = 18.2 \text{ g/m}^2$ (84)

Løsn: $f_1 = v/\lambda_1 = \sqrt{S/\mu} / 2L$ Overtoner $f_2, f_3, \dots = ?$

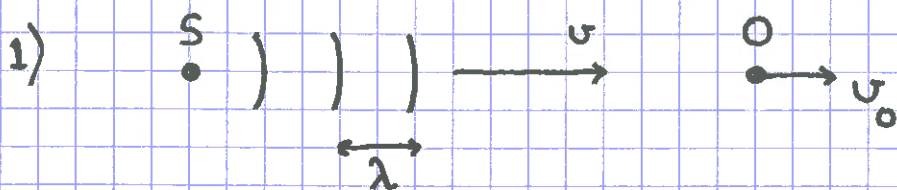
$$\Rightarrow S = 4L^2 f_1^2 \mu = 4 \cdot 0.695^2 \cdot 65.4^2 \cdot 18.2 \cdot 10^{-3} \underbrace{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^{-1}}_{= \text{N}} = \underline{\underline{150.4 \text{ N}}}$$

Overtoner: $f_n = n \cdot f_1 \Rightarrow f_2 = 130.8 \text{ Hz}, f_3 = 196.2 \text{ Hz}, \dots$

Dopplereffekten [YF 16.8; LL 10.8]

[Her: For lydbølger. Har også Dopplereffekt for E.M. bølger]

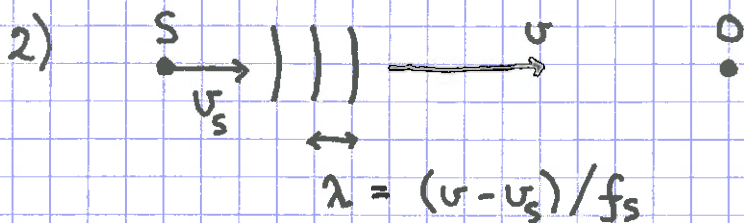
Hvis lydkilden S ("source") og observatøren O er i relativ bevegelse, vil O måle en frekvens f_o som er forskjellig fra frekvensen f_s sendt ut av S .



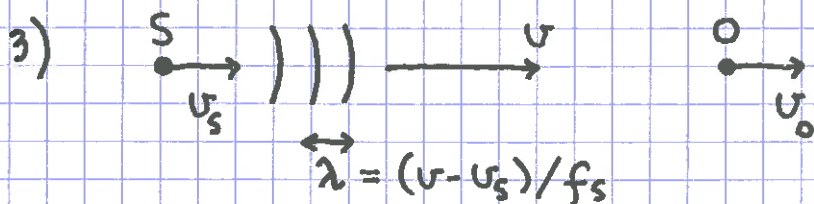
Bølgehastighet relativt O : $v - v_o$

$$\Rightarrow \text{Frekvens målt av } O: f_o = \frac{v - v_o}{\lambda} = \frac{v - v_o}{v} \cdot f_s$$

Dvs: $f_o < f_s$ når $v_o > 0$ (og omvendt)



$\Rightarrow$ Frekvens målt av O: $f_o = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{v - v_s} \cdot f_s$

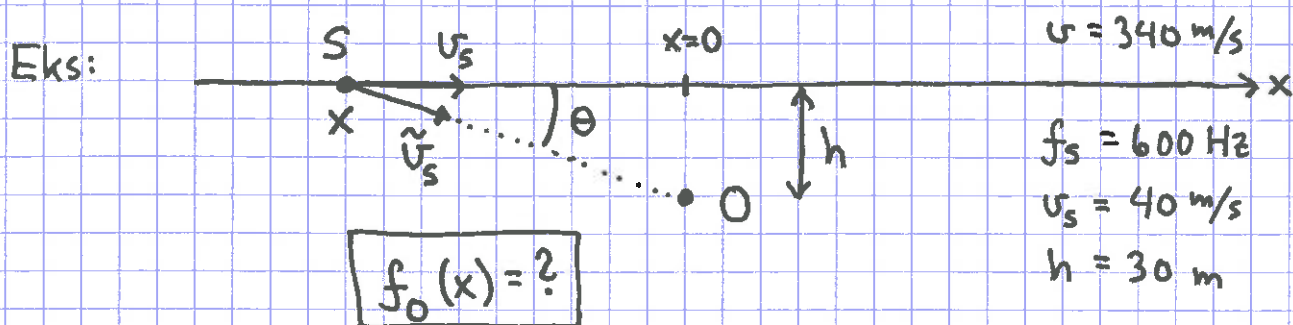


$\Rightarrow f_o = \frac{v - v_o}{\lambda} = \frac{v - v_o}{v - v_s} \cdot f_s$

4) Vind; v_m = mediets (luftas) hastighet

Bølgehastighet relativt bakken: $v + v_m$

$\Rightarrow f_o = \frac{v + v_m - v_o}{v + v_m - v_s} \cdot f_s$



Løsn: $f_o = \frac{v}{v - \tilde{v}_s} \cdot f_s$; $\tilde{v}_s = v_s \cos \theta = -v_s \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}$

$\Rightarrow f_o(x) = f_s \cdot \left\{ 1 + \frac{v_s x}{v \sqrt{x^2 + h^2}} \right\}^{-1} = 600 \text{ Hz} \cdot \left\{ 1 + \frac{40 \cdot x}{340 \cdot \sqrt{x^2 + 900}} \right\}^{-1}$

