## Clapeyrons ligning for koeksistenslinjene [LHL 17.10]

$$\boxed{\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T \cdot \Delta V}}$$

$\Delta V$ = volumendringen (f.eks. $V_g - V_v$)
$L$ = latent varme (f.eks. $L_f$)

Både $L$ og $\Delta V$ er prop. med $N$ (dvs stoffmengden)
$\Rightarrow$ $L / T \cdot \Delta V$ blir uavh. av stoffmengden, OK.

[Ligningen kan utledes fra termodynamikkens 1. og 2. lov.]

## Luftfuktighet:

$p = p_{N_2} + p_{O_2} + p_{CO_2} + p_{H_2O} + \ldots$ = sum av partialtrykk

Luft mettet med vanndamp:

$p_{H_2O} = p_d$ = damptrykket på $v+g$ koeks.linjen
= max partialtrykk av $H_2O$ i luft ved gitt $T$

$p_{H_2O} > p_d$ : Ikke likevekt. Vi får kondensasjon

$p_{H_2O} < p_d$ : Da er relativ luftfuktighet $\phi < 100\,\%$

$$\boxed{\phi = \frac{p_{H_2O}}{p_d} \cdot 100\,\%}$$

# Damptrykk-kurven

Med vanndamp (g) som den ene fasen er

$$\Delta V = V_g - V \approx V_g \overset{\text{ideell gass}}{=} nRT/p_d \qquad (V = V_f \text{ evt } V_v)$$

Antar at $L = n \cdot \ell$ er uavhengig av $T$; $\ell$ = molar latent varme

Dermed kan $p_d(T)$ bestemmes fra Clapeyrons ligning:

$$\frac{dp_d}{dT} = \frac{L}{T \cdot \Delta V} = \frac{n \cdot \ell}{T \cdot nRT/p_d} = \frac{\ell\, p_d}{RT^2}$$

$$\Rightarrow \int_{p_d(T_0)}^{p_d(T)} \frac{dp_d}{p_d} = \frac{\ell}{R} \int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T^2}$$

med $T_0$, $p_d(T_0)$ valgt ref. punkt på koeks. linjen

$$\Rightarrow \ln\left\{\frac{p_d(T)}{p_d(T_0)}\right\} = -\frac{\ell}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{p_d(T) = p_d(T_0)\exp\left\{\frac{\ell}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right\}}$$

Damptrykk-kurven

Med trippelpunktet som referanse:

$$T_0 = T_t = 273.16\,\text{K}, \quad p_d(T_0) = 612\,\text{Pa}$$

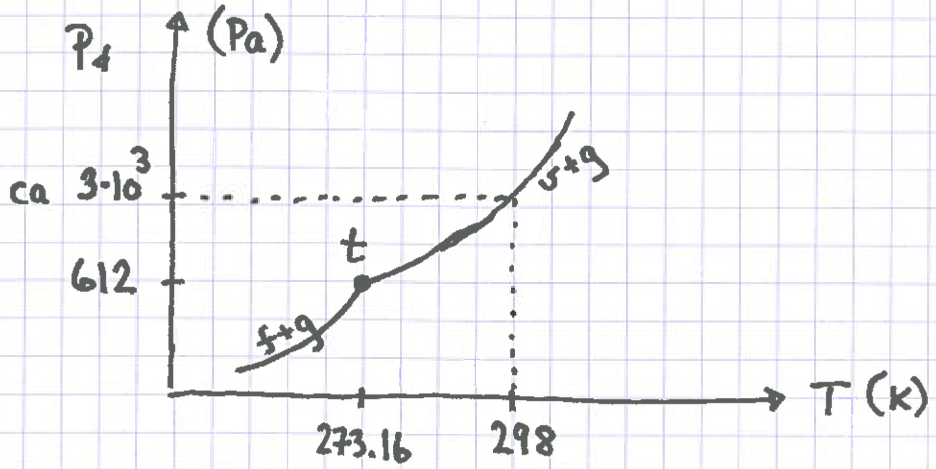
$$\ell_f = 598\,\frac{\text{cal}}{\text{g}} = \frac{598}{1000}\,\frac{\text{kcal}}{\text{g}} \cdot 4{,}184\,\frac{\text{kJ}}{\text{kcal}} \cdot 18\,\frac{\text{g}}{\text{mol}} \approx 45\ \text{kJ/mol}$$

$$\ell_{sub} = 678\,\frac{\text{cal}}{\text{g}} = \frac{678}{1000}\,\frac{\text{kcal}}{\text{g}} \cdot \text{———} \,''\, \text{———} \approx 51\ \text{kJ/mol}$$

$$\Rightarrow p_d(T > T_t) = 612\,\text{Pa} \cdot \exp\left\{19.8 - \frac{5413}{T}\right\}$$

$$p_d(T < T_t) = 612\,\text{Pa} \cdot \exp\left\{22.5 - \frac{6134}{T}\right\}$$

(med $T$ i enheten K)




Smeltelinjen for $H_2O$ ($f+v$ koeksistens):

$$\Delta V_{sm} = V_v - V_f < 0$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dT} < 0 \Rightarrow$$ peker (svakt) mot <u>venstre</u> (som s. 95)

Eks: Tørr vinterluft.
Anta $T_{ute} = -10°C$ og $\phi_{ute} = 100\%$. Hva blir $\phi_{inne}$ hvis vi fyller stua med slik luft?

Løsn: $\phi_{inne} = 100\% \cdot p_{H_2O} / p_d(T_{inne}) = 100\% \cdot p_d(263\,K)/p_d(293\,K)$

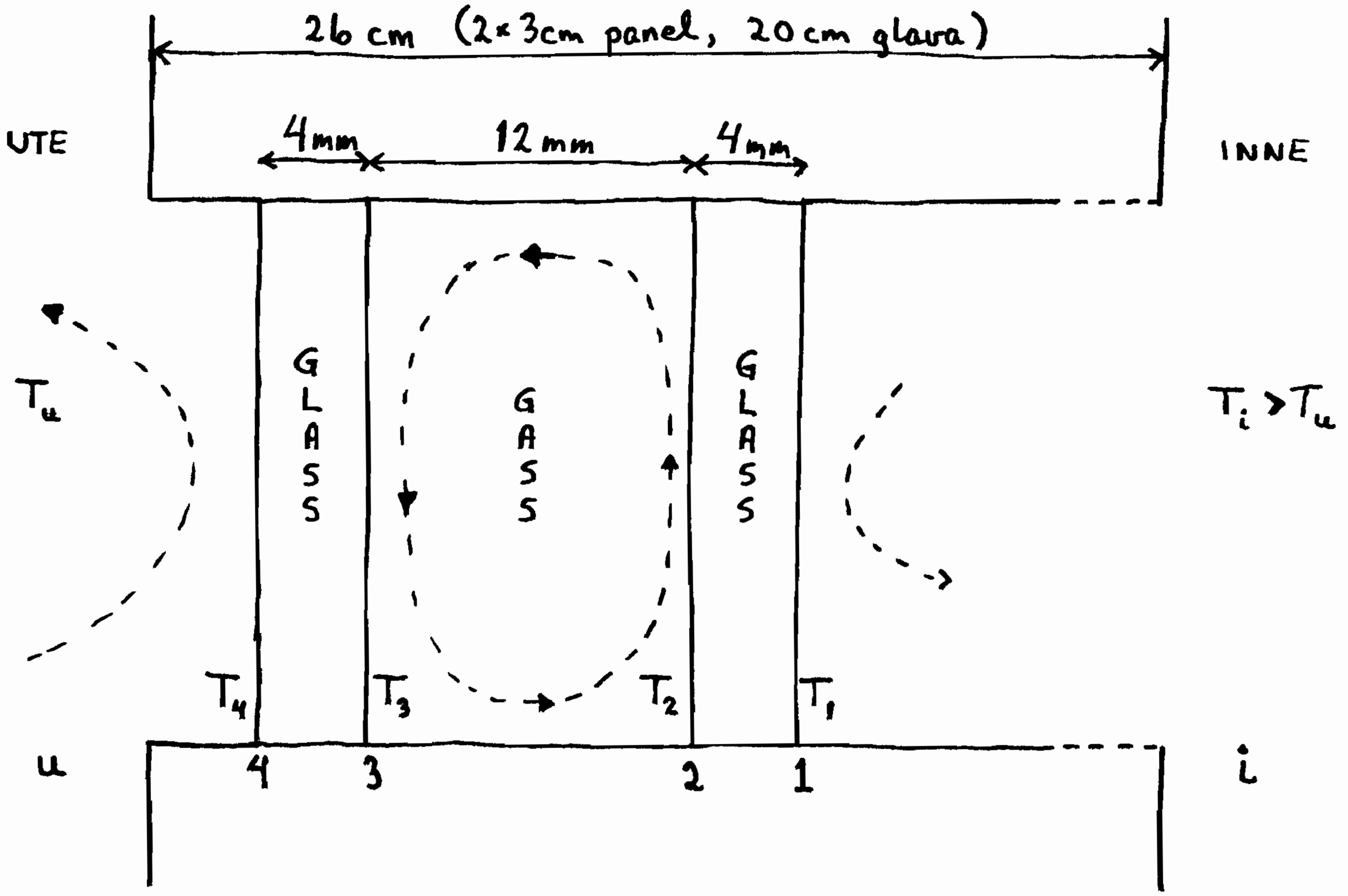
$$= 100\% \cdot \exp\{22.5 - 6134/263\} / \exp\{19.8 - 5413/293\}$$

$$\approx 12\% \ll \phi_{komfort} \gtrsim 50\%$$

Avhjelpes med pusting, svetting, matlaging....

# Varmetransport [YF 17; LHL 18]

Tre mekanismer (med dobbeltvindu som eksempel):




## Konveksjon og varmeovergangstall [YF 17.7; LHL 18.2]

$T_2 > T_3$ ⇒ gassen varmes opp ved 2, utvider seg og stiger; gassen avkjøles ved 3, trekker seg sammen og faller.

Nettoeffekt: Sirkulasjon og varmeoverføring fra 2 til 3

Vind ⇒ økt varmeoverføring fra 4 til u
og (i mindre grad!) fra i til 1

Varmeoverføring pga konveksjon (strømning) er vanskelig å regne på. Men grovt sett kan vi anta at varme overført, pr tids- og flateenhet, er prop. med temp. forskjellen.

$j$ = overført varme pr tids- og flateenhet
= —"— effekt pr flateenhet

$$[j] = \frac{J}{s \cdot m^2} = \frac{W}{m^2}$$

[Dvs essensielt samme fysiske størrelse som intensiteten $I$, som vi brukte for å karakterisere energitransport i bølger.]

Dermed:

Ute: $j_u = \alpha_u \cdot (T_4 - T_u)$

Inne: $j_i = \alpha_i \cdot (T_i - T_1)$

Byggeforskriftene anslår:

$\alpha_u = 25 \ W/m^2K$

$\alpha_i = 7.5 \ W/m^2K$

$\alpha_u, \alpha_i$ : varmeovergangstall (med vind, uten vind)
(5-6 m/s i middel)

Eks: Hvis du trives i 25°C på en stille gråværsdag, i bikini/badebukse, hva bør temperaturen være med vind (slik byggeforskriftene regner med)? Anta at din overflatetemp. er 30 °C.

Løsn:

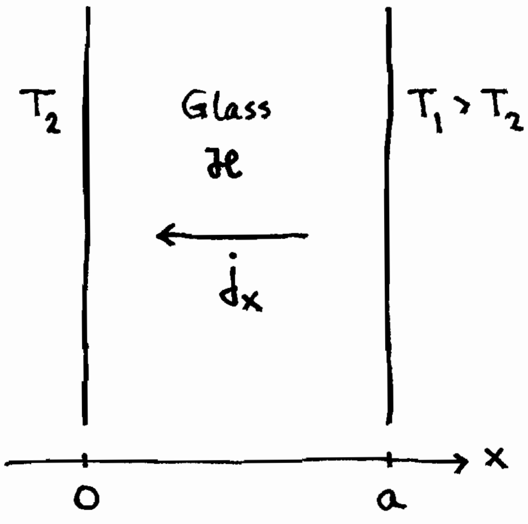
Varmetapet i stille vær: $j = \alpha_i \cdot \Delta T = 7.5 \frac{W}{m^2K} \cdot 5K = 37.5 \frac{W}{m^2}$

Samme varmetap i vind krever lufttemp. $T$ slik at

$$37.5 \frac{W}{m^2} = \alpha_u \cdot (30 - T)$$

$$\Rightarrow T = 30 - 37.5/25 \approx \underline{\underline{28.5 \ °C}}$$

## Varmeledning [YF 17.7 ; LHL 18.1]




Eksperimentelt finnes (som ventet?) at $j_x$ er proporsjonal med $\Delta T = T_1 - T_2$, motsatt rettet $\Delta T$, og omvendt prop. med tykkelsen a:

$$j_x = -\mathcal{H} \cdot \Delta T / a$$

$\mathcal{H}$ = varmeledningsevne $\left(\frac{W}{m \cdot K}\right)$

Vi ser kun på stasjonære (tidsuavhengige) forhold.
Da er $j_x$ uavhengig av $x$: Hvis ikke, blir strøm inn i ulik strøm ut av ei tynn skive mellom $x$ og $x+dx$, dvs tilstanden er ikke stasjonær!

[Dette er nøyaktig samme argument som vi brukte s. 80-81 for intensiteten $I$ i ulike bølgetyper. Det fysiske prinsippet er også her kravet om energibevarelse.]

Med $j_x$ uavh. av $x$, dvs $\Delta T/a$ uavh. av $x$, har vi

$$\boxed{j_x = -\mathcal{H} \cdot \frac{dT}{dx}}$$

som er Fouriers lov for endimensjonal varmeledning.

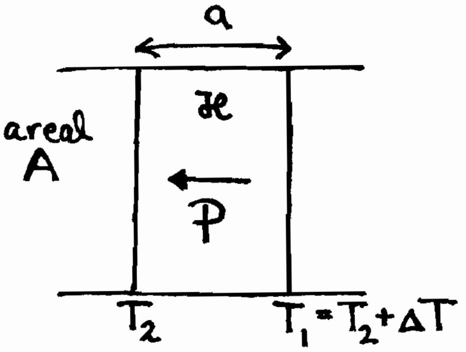
Generalisering til 3D: $\vec{j} = -\mathcal{H}\, \nabla T$

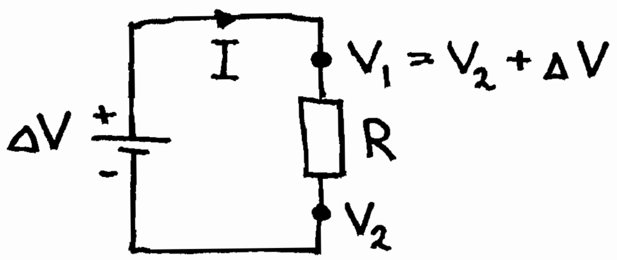
$\nabla T$ = gradienten til $T$ = $\hat{x}\, \partial T/\partial x + \hat{y}\, \partial T/\partial y + \hat{z}\, \partial T/\partial z$

= vektor som peker i den retningen som $T$ øker raskest (mest)

| Stoff | Luft | Glava | Vann | Is | Glass | Stål | Tre |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varkappa$ (W/m·K) | 0.026 | 0.035 | 0.61 | 2.2 | 0.7–1.1 | 43 | 0.1–0.2 |

Analogi mellom Fouriers lov og Ohms lov:




Energistrøm (Effekt):

$$P = j \cdot A = -\frac{\varkappa A}{a} \cdot \Delta T$$

Elektrisk strøm:

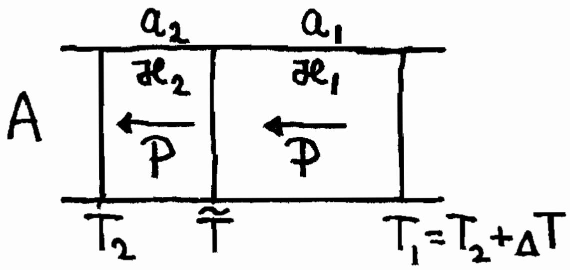
$$I = \frac{1}{R} \cdot \Delta V$$

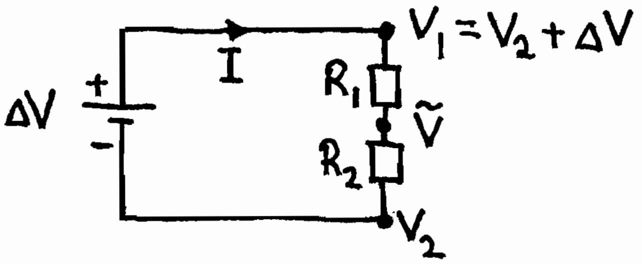
"Analogitabell":

| Fysisk størrelse | Fouriers lov | Ohms lov |
|---|---|---|
| "drivkraft" | $\Delta T$ [K] | $\Delta V$ [V] (volt) |
| strøm | $P$ [J/s = W] | $I$ [C/s = A] (ampere) |
| resistans (motstand) | $a/\varkappa A$ [K/W] | $R$ [V/A = $\Omega$] (ohm) |
| konduktans | $\varkappa A/a$ [W/K] | $G = R^{-1}$ [S = $\Omega^{-1}$] (siemens) |

Kommentar: Varmeledningsevnen $\varkappa$ er en materialspesifikk parameter. En motstand med lengde $a$ og tverrsnitt $A$ har resistans $R$ som er prop. med $a$ og omv. prop. med $A$, $R = a/\sigma A$, med elektrisk ledningsevne $\sigma$, som også er en materialspesifikk størrelse, med enhet A/m·V, evt. 1/m·$\Omega$, evt. S/m. Med andre ord: Analogien er komplett!! :-)

## Seriekobling av varmemotstander og elektriske motstander:




$$T_1 - \tilde{T} = -\frac{a_1}{\varkappa_1 A}\cdot P$$

$$\tilde{T} - T_2 = -\frac{a_2}{\varkappa_2 A}\cdot P$$

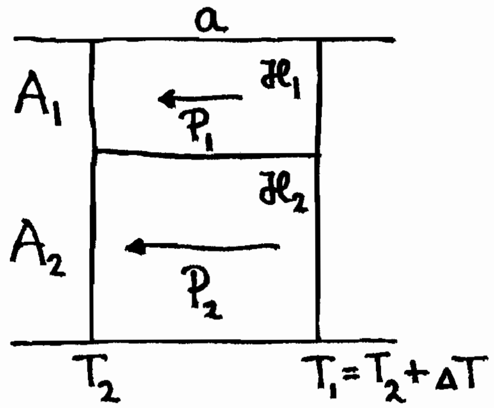
$$\Delta T = T_1 - T_2 = (T_1 - \tilde{T}) + (\tilde{T} - T_2)$$
$$= -\left(\frac{a_1}{\varkappa_1 A} + \frac{a_2}{\varkappa_2 A}\right)\cdot P$$

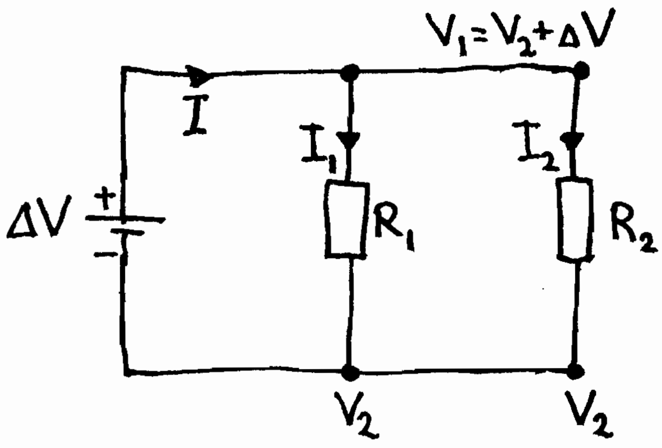
$$V_1 - \tilde{V} = R_1 \cdot I$$

$$\tilde{V} - V_2 = R_2 \cdot I$$

$$\Delta V = V_1 - V_2 = (V_1 - \tilde{V}) + (\tilde{V} - V_2)$$
$$= (R_1 + R_2)\cdot I$$

## Parallellkobling av varmemotstander og elektriske motstander:




$$\Delta T = -\frac{a_1}{\varkappa_1 A_1}\cdot P_1$$
$$= -\frac{a_2}{\varkappa_2 A_2}\cdot P_2$$

$$P = P_1 + P_2$$
$$= -\left[\left(\frac{a_1}{\varkappa_1 A_1}\right)^{-1} + \left(\frac{a_2}{\varkappa_2 A_2}\right)^{-1}\right]\cdot \Delta T$$
$$= -\left[\frac{\varkappa_1 A_1}{a_1} + \frac{\varkappa_2 A_2}{a_2}\right]\cdot \Delta T$$

$$\Delta V = R_1 I_1 = R_2 I_2$$

$$I = I_1 + I_2$$
$$= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\cdot \Delta V$$
$$= (G_1 + G_2)\cdot \Delta V$$

Eks: Bestem varmetap pr $m^2$ gjennom vegg med 3 cm ytter- og innerpanel av grantre ($\kappa_t = 0.12$ W/m·K) og 20 cm glava ($\kappa_g = 0.035$ W/m·K), med $T_i = 20$ °C og $T_u = -10$ °C. Se bort fra "wind-chill factor" (konveksjon; s 100–101). Bestem og plott temperaturprofilen gjennom veggen. Var det OK å anta "perfekt kobling" mellom utelufta og utsiden av ytterpanelet, og mellom innelufta og innsiden av innerpanelet?

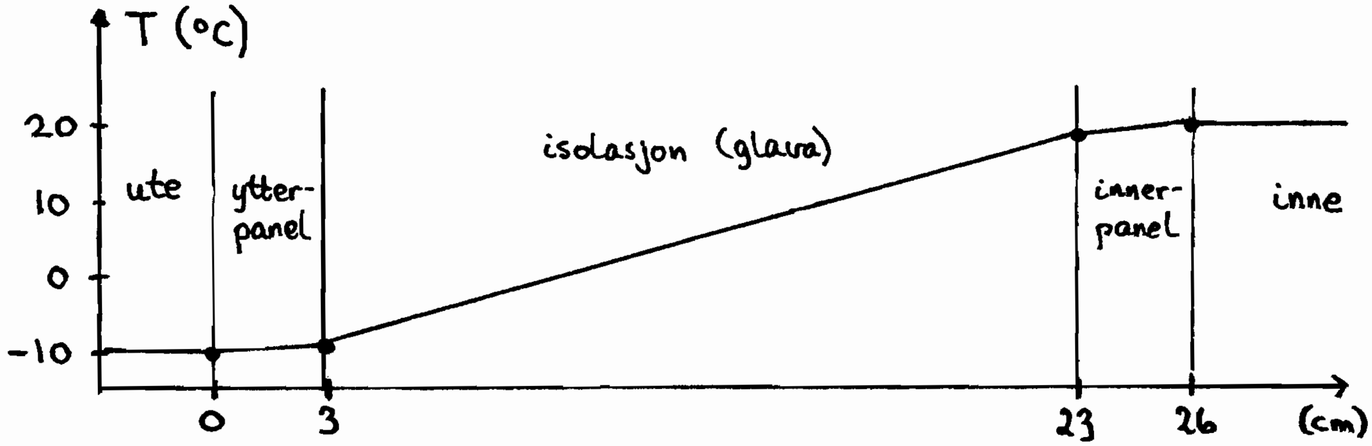
Løsn: Total varmemotstand er $2 \cdot \frac{a_t}{\kappa_t A} + \frac{a_g}{\kappa_g A} = 6.21$ K/W (med $A = 1\,\mathrm{m}^2$, $a_t = 0.03$ m og $a_g = 0.20$ m). Med $\Delta T = 30$ K gir det et varmetap (effekttap) $P = [6.21\ \mathrm{K/W}]^{-1} \cdot 30\,\mathrm{K} = \underline{\underline{4.83\,\mathrm{W}}}$.

Temperaturfall gjennom 3 cm granpanel:

$$\Delta T_t = P \cdot a_t / \kappa_t A = 4.83\,\mathrm{W} \cdot 0.03\,\mathrm{m} / (0.12 \tfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m \cdot K}} \cdot 1\,\mathrm{m}^2) = 1.2\,\mathrm{K}$$

Gjennom 20 cm glava (= steinull, glassull, glassvatt ...):

$$\Delta T_g = P \cdot a_g / \kappa_g A = 4.83\,\mathrm{W} \cdot 0.20\,\mathrm{m} / (0.035 \tfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m \cdot K}} \cdot 1\,\mathrm{m}^2) = 27.6\,\mathrm{K}$$




Merk: Størst temperaturgradient, $dT/dx = P/\kappa A$, gjennom materialet som isolerer best (minst $\kappa$)!

Fra s. 101: $j_u = \alpha_u \cdot (T(0) - T_u)$, $j_i = \alpha_i \cdot (T_i - T(26\,\mathrm{cm}))$

Her er $j_u = j_i = P/A = 4.83\ \mathrm{W/m^2}$, og vi har antatt $T(0) = T_u$ og $T(26\,\mathrm{cm}) = T_i$, m.a.o. $\alpha_u = \alpha_i = \infty$ ("perfekt kobling").
Med $\alpha_u = 25\ \mathrm{W/m^2K}$ blir $T(0) - T_u = 4.83/25\ \mathrm{K} \approx 0.2\,\mathrm{K}$, og med $\alpha_i = 7.5$ blir $T_i - T(26\,\mathrm{cm}) = 4.83/7.5\ \mathrm{K} \approx 0.6\,\mathrm{K}$. OK å neglisjere disse!

## Stråling [YF 17.7; LHL 18.4]



Et legeme med temp. $T$ består av atomer / molekyler som oscillerer omkring sine likevektsposisjoner, omtrent som en harmonisk oscillator (s. 56–58). Da har vi akselererte elektriske ladninger, som i følge klassisk elektrodynamikk (James Clerk Maxwell, 1831–1879) sender ut (emitterer) elektromagnetiske bølger, dvs stråling, med bølgefart $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. Emittert stråling fra ett legeme kan absorberes, reflekteres eller transmitteres av et annet legeme, med andeler hhv $a$, $r$ og $t$, slik at $a + r + t = 1$.

Et svart legeme defineres ved at $a = 1$. (Dvs $r = t = 0$)
I termisk likevekt (dvs konstant $T$) må et legeme emittere og absorbere like mye strålingsenergi (for enhver bølgelengde), dvs $e(\lambda) = a(\lambda)$, der $e$ = legemets emissivitet ($e \leq 1$).

Stefan–Boltzmanns lov:
Josef Stefan, 1879, analyse av exp. data: $j \sim T^4$
Ludwig Boltzmann, 1884, termodyn. teori:

$$\boxed{j = \sigma T^4 \ ; \quad \sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}}$$

For svart legeme, $e = a = 1$.

Reelle legemer: $j = e \cdot \sigma T^4$ ; $e < 1$ ($e = e(\lambda)$)

$\sigma = 2\pi^5 k_B^4 / 15 h^3 c^2$ ($h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Js = Plancks konstant)

Plancks fordelingslov:

For gitt $T$, hvor mye bidrar ulike frekvenser $f$, evt. bølgelengder $\lambda$, til total emittert stråling $j(T)$?

Kvantemekanikk og statistisk mekanikk gir [M. Planck, 1900]:

Frekvensfordelingen:

$$j(T) = \int_0^\infty \frac{dj}{df} \cdot df \; ; \quad \frac{dj}{df} = \frac{2\pi h f^3/c^2}{\exp[hf/k_B T] - 1} \quad \left[\frac{W}{m^2 \cdot Hz}\right]$$

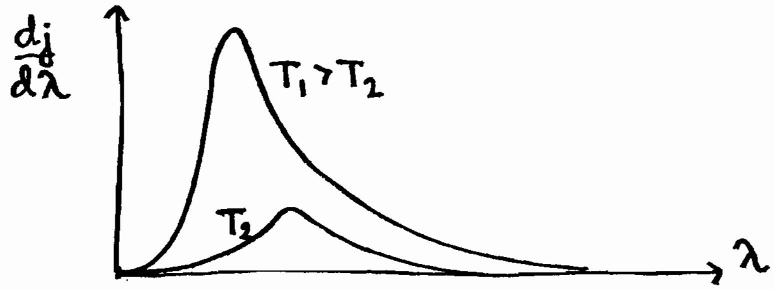
Bølgelengdefordelingen: $(c = \lambda \cdot f)$

$$j(T) = \int_0^\infty \frac{dj}{d\lambda} \cdot d\lambda \; ; \quad \frac{dj}{d\lambda} = \frac{2\pi h c^2/\lambda^5}{\exp[hc/\lambda k_B T] - 1} \quad \left[\frac{W}{m^3}\right]$$

$\frac{dj}{df}$ har max verdi for $\frac{f}{T} = 5.\cancel{88} \cdot 10^{10}\ \frac{Hz}{K}$

$\frac{dj}{d\lambda}$ ——— " ——— $\lambda T = 2.90 \cdot 10^{-3}\ m \cdot K$

(Wiens forskyvningslov)




Eks: Sola, $T \approx 6 \cdot 10^3$ K, max for $\lambda \approx 480$ nm (blågrønt)

(Synlig lys: 400 nm (blått) $\lesssim \lambda \lesssim$ 700 nm (rødt))

Kroppen (overflaten), $T \approx 303$ K, max for $\lambda \approx 10\ \mu m$ (IR)

Kaffebål, $T \approx 1500$ K, max for $\lambda \approx 1.9\ \mu m$ (IR!)