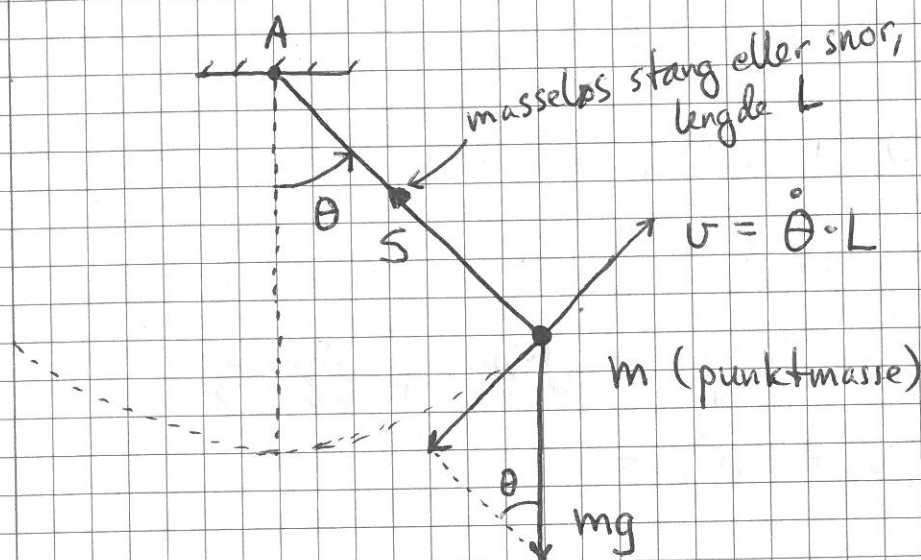


Matematisk pendel [YF 14.5; LL 9.6]

(63)



Er her interessant i beregelsen // sirkelbanen:

$$\left. \begin{aligned} F_{||} &= -mg \sin \theta \\ a_{||} &= \ddot{v} = L \ddot{\theta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -mg \sin \theta = mL \ddot{\theta}$$

↓

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

Hvis vi hele tiden har små utsving, $|\theta| \ll 1$, er $\sin \theta \approx \theta$,
og vi har en enkel harmonisk oscillator:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{g/L}$$

Med større utsving må $\theta(t)$ bestemmes numerisk.

Anta $\theta(0) = \theta_0$ og $v(0) = v_0$.

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{L} \Rightarrow d\theta = \frac{v}{L} dt \Rightarrow \Delta\theta \approx \frac{v}{L} \Delta t$$

$$\frac{dv}{dt} = a_{||} \Rightarrow dv = a_{||} dt \Rightarrow \Delta v = a_{||} \Delta t = -g \sin \theta \cdot \Delta t$$

Dermed:

$$\theta(0) = \theta_0, \quad v(0) = v_0$$

$$\theta(\Delta t) \approx \theta(0) + \frac{v(0)}{L} \Delta t; \quad v(\Delta t) \approx v(0) - g \sin \theta(0) \cdot \Delta t$$

$$\theta(2\Delta t) \approx \theta(\Delta t) + \frac{v(\Delta t)}{L} \Delta t; \quad v(2\Delta t) \approx v(\Delta t) - g \sin \theta(\Delta t) \cdot \Delta t$$

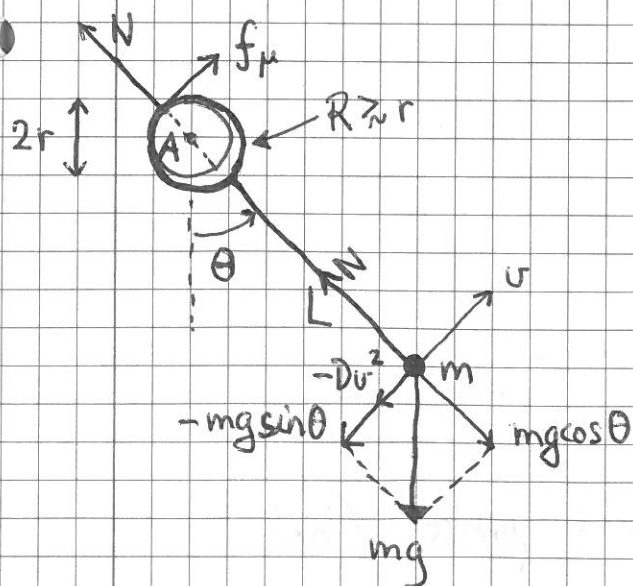
osv.

Dette er Eulermetoden ("Forward Euler"). "Rett linje" fra $\theta_n (= \theta(n \cdot \Delta t))$ til θ_{n+1} og fra v_n til v_{n+1}

⇒ må typisk bruke et lite tidssteg Δt .

Numerisk obligatorisk øving (skisse)

- Tilnærmet matematisk pendel, masse m , lengde L
- Startbetingelser $v(0) = v_0$ og (f.eks.) $\theta(0) = \theta_0 = 0$
- Luftmotstand: $f_D = -Dv^2$ ($D \sim 10^{-3} - 10^{-4} \text{ kg/m}$)
- Tynn pendelstang svinger rundt horisontal stang med radius r :



Friksjon mellom "pendelring" (radius $R \approx r$) og horisontal stang (radius r):

$$f_\mu = \mu N$$

↑ kinetisk friksjonskoeff

$N \perp$ sirkelbanen i

$$N - mg \cos \theta = m a_\perp = m v^2 / L$$

$$\Rightarrow N = m(g \cos \theta + v^2 / L)$$

$$\Rightarrow f_\mu = \mu m(g \cos \theta + v^2 / L)$$

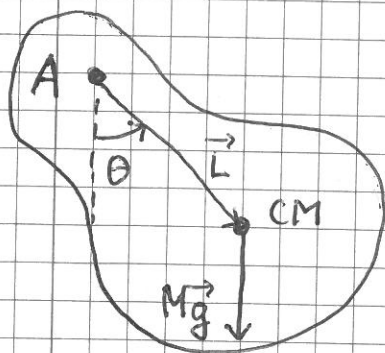
N2, rotasjon om A: $\tau = I_A \ddot{\theta} = mL^2 \ddot{\theta}$; $\tau = -mgL \sin \theta - D \frac{v^3 L}{L^2} - f_\mu r$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta + \frac{Dv^2}{mL} + \frac{\mu r}{L^2} (g \cos \theta + v^2 / L) = 0$$

Fysisk pendel

[YF 14.6 ; LL 9.6]

(65)



Stivt legeme, masse M . Anta friksjonsfri svingning om akse gjennom A .

I = treghetsmoment mhp rot.aksen

$\vec{R}_{cm} = \vec{L}$; $\hat{A}$ = enhetsvektor ut av planet

Ytre krefter:

$\vec{F}_A$ = kraft fra aksling på legemet ; null arm mhp A
 $\Rightarrow$ null dreiemoment mhp rot.aksen

$M\vec{g}$ = tyngdekraften, angriper i CM , arm $\vec{L}$ mhp rot.aksen
 $\Rightarrow \vec{\tau} = \vec{L} \times M\vec{g} \Rightarrow \tau = -MgL \sin\theta \hat{A}$

N2 for rot. om A gir nå $(\tau = I\ddot{\theta})$

$$-MgL \sin\theta = I\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{MgL}{I} \sin\theta = 0}$$

Med små utsving: $\sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 ; \omega_0 = \sqrt{\frac{MgL}{I}}}$$

Fysisk pendel,
små utsving

Steiners sats: $I = I_0 + ML^2$; I_0 = tregh.mom. mhp CM

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MgL}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + ML^2}{MgL}}$$

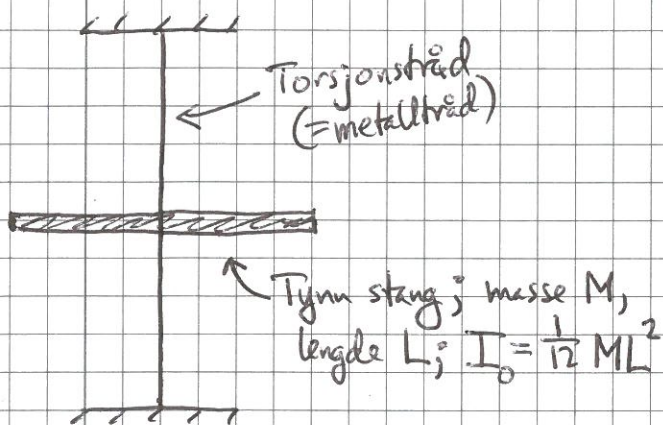
• Ser at $T \rightarrow \infty$ når $L \rightarrow 0$, som ventet

• Matem. pendel: $I_0 = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{g/L}$; OK!

Torsjonspendel

[YF 14.4; LL 9.6]

66



Hookes lov: Tråden motvirker
vridning og virker på pendelen
med dreiemoment prop.
med vridn.vinkelen:

$$\tau = -\kappa \theta$$

der κ = torsjonsstivheten
(LL: $\tau = -\Gamma' \theta$)

N2 for rot. om trådens akse: $\tau = I_0 \ddot{\theta}$

$$\Rightarrow -\kappa \theta = I_0 \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 ; \quad \omega_0 = \sqrt{\kappa / I_0}$$

$$\text{Svingeperiode: } T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{I_0 / \kappa}$$

$$\text{Enheter: } [\kappa] = [\tau] = \text{Nm} = \text{kg m}^2 / \text{s}^2$$

$$[I_0] = \text{kg m}^2$$

$$\Rightarrow [\sqrt{I_0 / \kappa}] = \text{s} ; \quad \text{OK}$$

Exp: Mål M , L og T og beregn κ !

$$\kappa = 4\pi^2 I_0 / T^2 = \frac{\pi^2 M L^2}{3 T^2}$$

Tallverdier: $M = 50\text{g}$; $L = 11\text{cm}$; $T = 0.8\text{s}$

$$\Rightarrow \kappa \approx \underline{\underline{3 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}}}$$

[NB: Oppgave for ~~den~~ L på forelesning !!]