TFY4115 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2013.
Løsningsforslag til øving 1.

Oppgave 1.
La oss betegne bevegelsesretningen som x-retningen, med $x = 0$ som stedet der fallskjermhopperen treffer snøfonna. Med konstant akselerasjon $a = -50g$ i x-retningen har en for $t > 0$ konstant-akselerasjonsligningene

$$v(t) = v_0 + at; \qquad x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

Eliminer t mellom disse to ligningene for å finne $v(x)$ eller $x(v)$:

$$x = v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a\frac{(v - v_0)^2}{a^2} \qquad \Rightarrow \qquad 2ax = v^2 - v_0^2.$$

(Eller du kunne skrevet opp denne "tidløse" ligningen direkte.) Inntrengningsdybden x_i ved tida t_i er det punktet der $v(t_i) = 0$,

$$x_i = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{40^2}{2 \cdot 50 \cdot 9.8}\,\text{m} = \underline{1.6\,\text{m}}.$$

Fallet bremses ned til $v = 0$ i løpet av tida

$$t_i = -\frac{v_0 - 0}{a} = \frac{40}{50 \cdot 9.8}\,\text{s} = \underline{0.082\,\text{s}}.$$

Oppgave 2.
a. Når akselerasjonen er en gitt funksjon av hastigheten, gir det en differensialligning for $v(t)$. I vårt tilfelle:

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv^2 \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{dv}{v^2} = k\,dt$$

Integrerer fra start $(0, v_0)$ til vilkårlig tidspunkt (t, v):

$$-\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = k\int_0^t dt \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = k(t - 0) \qquad \Rightarrow \qquad \underline{v(t) = \frac{v_0}{1 + kv_0 t}}.$$

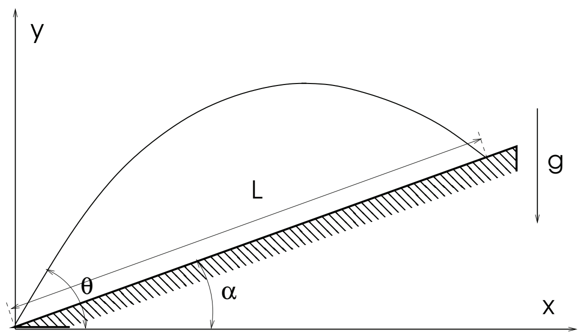
b. Hastighetens halveringstid T er derved gitt som

$$v(T) = \frac{v_0}{1 + kv_0 T} = \frac{1}{2}v_0 \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{1}{kv_0} = \frac{1}{3.0 \cdot 1.50}\,\text{s} = 0.22\,\text{s}.$$

Ved start er $x = 0$, og i løpet av halveringstida har kula beveget seg strekningen $x(T)$. Denne bestemmes fra $v = dx/dt$, eller $dx = v\,dt$, som gir

$$x(T) = \int_0^T v(t)\,dt = \int_0^T \frac{v_0}{1 + kv_0 t'}\,dt' = \frac{1}{k}\ln(1 + kv_0 T) = \frac{1}{3.0\,\text{m}^{-1}} \cdot \ln 2 = \underline{0.23\,\text{m}}.$$

Oppgave 3.



a. Situasjonen er skissert i figuren til venstre.

b. Vi velger utskytningsstedet som origo. Derved er begynnelsesbetingelsene

$$x(0) = 0 \qquad y(0) = 0,$$
$$v_x(0) = v_0 \cos\theta \qquad v_y(0) = v_0 \sin\theta.$$

I x-retningen er akselerasjonen lik null (når luftmotstanden neglisjeres), og derved er $x(t) = v_0 \cos\theta \cdot t$.
I y-retningen er akselerasjonen $-g$, slik at

$$y(t) = v_y(0)t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Når pila treffer bakken ved tida t_b, har den beveget seg $x(t_\mathrm{b})$ i x-retning og $y(t_\mathrm{b})$ i y-retning. Da må ifølge figuren $y(t_\mathrm{b})/x(t_\mathrm{b}) = \tan\alpha$. Derved kan t_b bestemmes:

$$\frac{v_0 \sin\theta \cdot t_\mathrm{b} - \frac{1}{2}gt_\mathrm{b}^2}{v_0 \cos\theta \cdot t_\mathrm{b}} = \tan\alpha \quad \Rightarrow \quad \underline{t_\mathrm{b} = \frac{2v_0}{g} \cdot (\sin\theta - \cos\theta \, \tan\alpha).}$$

Rekkevidden blir da (se figuren)

$$L = \frac{x(t_\mathrm{b})}{\cos\alpha} = \frac{v_0 \cos\theta \cdot t_\mathrm{b}}{\cos\alpha} = \frac{2v_0^2 \cdot (\cos\theta \, \sin\theta - \cos^2\theta \, \tan\alpha)}{g\cos\alpha} = \underline{\frac{2v_0^2 \cdot \cos^2\theta}{g \cdot \cos\alpha} \cdot (\tan\theta - \tan\alpha)} \qquad \text{Q.E.D.}$$

c. Vinkelen som gir størst rekkevidde $L(\theta)$ finnes ved å derivere mhp θ og sette den deriverte lik null.

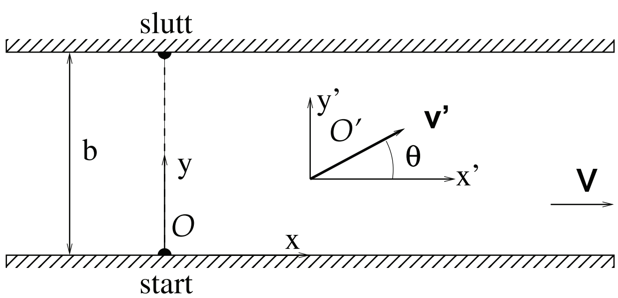
$$\begin{aligned}
\frac{dL}{d\theta} &= \frac{2v_0^2}{g\cos\alpha} \frac{d}{d\theta} \Big(\cos\theta \sin\theta - \cos^2\theta \tan\alpha\Big) \\
&= \frac{2v_0^2}{g\cos\alpha} \Big(-\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\cos\theta \sin\theta \, \tan\alpha\Big) \\
&= \frac{2v_0^2}{g\cos\alpha} \left(\cos 2\theta + \sin 2\theta \, \tan\alpha\right).
\end{aligned}$$

$\dfrac{dL}{d\theta} = 0$ og løst mhp θ gir resultatet

$$\tan 2\theta_\mathrm{maks} = -\cot\alpha = \tan(\alpha + \pi/2) \qquad \Rightarrow \qquad \theta_\mathrm{maks} = \underline{\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}}.$$

Dette innebærer at på flat mark ($\alpha = 0$), er $\theta_\mathrm{maks} = 45°$, i tråd med erfaringer.

Oppgave 4.



a. Legger inn et koordinatsystem med x langs elvebredden og y på tvers. I figuren til venstre er referansesystemet fast i elvebredden betegnet O, mens referansesystemet som følger elvestrømmen er betegnet O'.

Vannets hastighet $\boldsymbol{V} = V\hat{x}$ er gitt i system O. Båtens hastighet i system O' er som oppgitt

$$\boldsymbol{v}' = v_x'\hat{x} + v_y'\hat{y} = v' \cos\theta\hat{x} + v' \sin\theta\hat{y},$$

og båtens hastighet i system O er

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V} = (v'_x + V)\hat{x} + v'_y\hat{y} = (v'\cos\theta + V)\hat{x} + v'\sin\theta\hat{y},$$

Hastighetskomponentene er altså

$$\underline{v_x = v'\cos\theta + V}; \quad \underline{v_y = v'\sin\theta}.$$

b. Tida det tar å ro til den andre elvebredden er gitt av y-hastigheten: $t_{\mathrm{r}} = \dfrac{b}{v_y} = \dfrac{b}{v'\sin\theta}$. På denne tida vil båtens forskyvning langs elvebredden være gitt av hastigheten v_x:

$$x_{\mathrm{l}} = v_x t_{\mathrm{r}} = (v'\cos\theta + V)\frac{b}{v'\sin\theta}. \tag{1}$$

Tida det tar å gå tilbake til punktet rett overfor startpunktet er $t_{\mathrm{g}} = x_{\mathrm{l}}/v_{\mathrm{g}}$, vi har da (fornuftig nok) antatt $x_{\mathrm{l}} \geq 0$, dvs båten har drevet litt med elvestrømmen, evt treffer rett på. (Dersom $x_{\mathrm{l}} < 0$ vil $t_{\mathrm{g}} = -x_{\mathrm{l}}/v_{\mathrm{g}}$.) Til sammen blir dette

$$t(\theta) = t_{\mathrm{r}} + t_{\mathrm{g}} = \underline{\frac{b}{v'\sin\theta}\left[1 + \frac{v'}{v_{\mathrm{g}}}\cdot\cos\theta + \frac{V}{v_{\mathrm{g}}}\right]}. \tag{2}$$

c. Vi minimerer totaltiden med hensyn på roretningen:

$$\begin{aligned}
\frac{dt(\theta)}{d\theta} &= \frac{-b\cos\theta}{v'\sin^2\theta}[...] + \frac{b}{v'\sin\theta}\cdot\frac{v'(-\sin\theta)}{v_{\mathrm{g}}} \\
&= -\frac{b}{v'\sin^2\theta}\cdot\left[(1 + \frac{V}{v_{\mathrm{g}}})\cos\theta + \frac{v'}{v_{\mathrm{g}}}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\right] = 0.
\end{aligned}$$

Av dette følger at vinkelen som minimaliserer tida er gitt som

$$\cos\theta_{\mathrm{min}} = -\frac{v'/v_{\mathrm{g}}}{1 + V/v_{\mathrm{g}}} = \underline{-\frac{v'}{V + v_{\mathrm{g}}}}. \tag{3}$$

Med de oppgitte tallverdiene får en $\cos\theta_{\mathrm{min}} = -3/(2+5)$ som gir $\underline{\theta_{\mathrm{min}} = 115^\circ}$. Et ikke urimelig resultat!

d. Men dersom vi setter $V = 0$, gir uttrykket $\cos\theta_{\mathrm{min}} = -v'/v_{\mathrm{g}}$. Dette kan umulig være riktig! Dersom elva stopper opp (dersom vi rett og slett skal krysse stillestående vann) må det raskeste være å ro rett over! Altså: I dette tilfellet burde $\theta_{\mathrm{min}} = 90^\circ$ og $\cos\theta_{\mathrm{min}} = 0$. Men hvor resonnerte vi feil i pkt **b** eller **c**? Problemet ligger i forutsetningen $x_{\mathrm{l}} > 0$. Vi ser fra lign. (1) at dette gjelder bare dersom $v'\cos\theta + V > 0$ (siden b, v' og $\sin\theta$ alle er positive). Vi forutsetter altså $\cos\theta > -(V/v')$. Minimumsverdien $\cos\theta_{\mathrm{min}}$ i (3) er derfor bare gyldig dersom

$$-\frac{v'}{V + v_{\mathrm{g}}} > -\frac{V}{v'} \qquad \Rightarrow \qquad v'^2 < V(V + v_{\mathrm{g}}).$$

Hva skjer så dersom denne ulikheten for de oppgitte størrelsene ikke er oppfylt? For å forstå dette må vi gå tilbake til funksjonen $t(\theta)$ og ta høyde for at dette faktisk er *to* funksjoner. Den vi allerede har funnet, (2), er korrekt dersom vi lander *nedenfor* målpunktet, slik at $x_{\mathrm{l}} > 0$. Denne funksjonen kaller vi heretter $t^+(\theta)$. Men vi trenger også $t^-(\theta)$, som svarer til at båten lander *ovenfor* det endelige målet tvers over elva. Da er som nevnt ovenfor $t_{\mathrm{g}} = -x_{\mathrm{l}}/v_{\mathrm{g}}$ og $t^+(\theta)$ i lign. (2) blir erstattet av

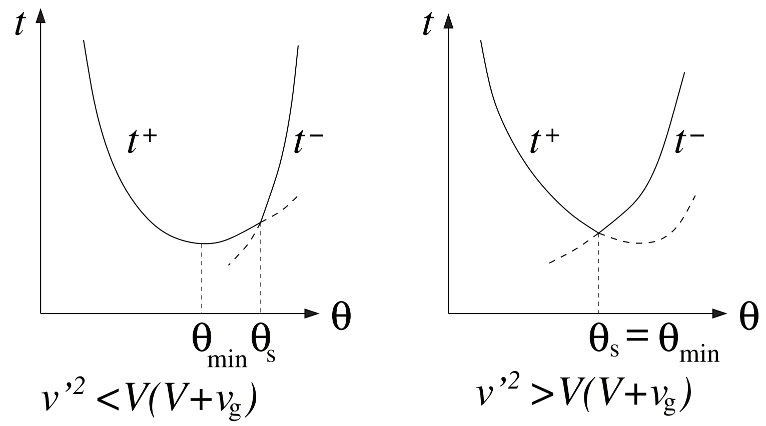
$$t^-(\theta) = t_{\mathrm{r}} + t_{\mathrm{g}} = \frac{b}{v'\sin\theta} - \frac{x_{\mathrm{l}}}{v_{\mathrm{g}}} = \frac{b}{v'\sin\theta}\left[1 - \frac{v'}{v_{\mathrm{g}}}\cdot\cos\theta - \frac{V}{v_{\mathrm{g}}}\right]. \tag{4}$$

De to funksjonene møtes der $x_{\mathrm{l}} = 0$, dvs for vinkelen θ_s gitt av $v'\cos\theta_s + V = 0$, altså for vinkelen

$$\cos\theta_s = -V/v'. \tag{5}$$

Skal dette ha mening, må $V < v'$. Dette har en åpenbar fysisk tolkning: Det er ikke mulig å havne rett over elva med en rofart som er mindre enn elvas strømningshastighet!

Figurene til høyre viser hva som skjer i de to parameterområdene.



Dersom $x_1 > 0$ og $v'^2 < V(V + v_\mathrm{g})$, er minimumstida gitt av minimum i funksjonen $t^+(\theta)$, med resultatet $\cos\theta_\mathrm{min} = -v'/(V + v_\mathrm{g})$ og $\theta_\mathrm{min} < \theta_s$. Minimum finnes på den konvensjonelle måten, ved å sette den deriverte lik null.

I parameterområdet der $v'^2 > V(V + v_\mathrm{g})$ er situasjonen kvalitativt annerledes. Der gir minimering av $t^+(\theta)$ et ufysikalsk resultat. Minimumstida er $t(\theta_s)$ der $t^+ = t^-$. Ingen av de to funksjonene som møtes i minimumspunktet har derivert lik null der.

Den fysikalske tolkningen av dette er at i *hele* parameterområdet $v'^2 > V(V + v_\mathrm{g})$ lønner det seg å ro rett over elva, direkte til målet, med vinkelen θ_s gitt av (5) mellom roretning og elvas strømretning.

Eksemplet viser at minimering kan være en mer sammensatt prosess enn den konvensjonelle. Det gjelder å bruke hodet, og sjekke resultatene mot sunn fornuft. Om det kan være til noen trøst: Flere årskull studenter og lærere overså fullstendig det vi her har diskutert, og tok for gitt at resultatet under pkt **c** var *hele* svaret. Men den enkle sjekken vi foretok avslørte umiddelbart at det ikke kunne være tilfelle.