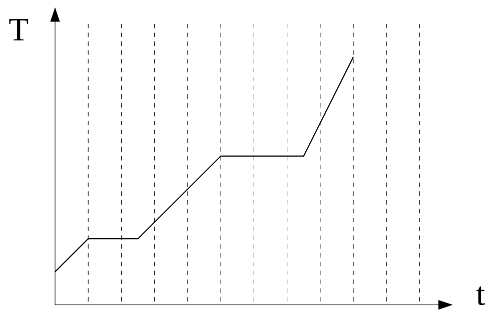
Eksamen FY1005/TFY4165 Termisk fysikk kl 15.00 - 19.00 torsdag 6. juni 2013

Oppgave 1. Ti flervalgsoppgaver. (Poeng: 2 pr oppgave)

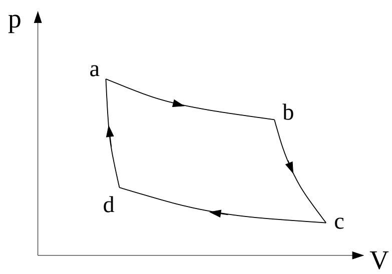
a.



Varme tilføres et rent stoff i en lukket beholder. Tilført varme pr tidsenhet er konstant. Figuren viser hvordan stoffets temperatur T endrer seg med tiden. Hva er forholdet mellom stoffets smeltevarme L_s og stoffets fordampningsvarme L_f?

A $L_s/L_f = 0.33$ B $L_s/L_f = 0.60$
C $L_s/L_f = 1.00$ D $L_s/L_f = 1.67$

b.



Figuren viser en reversibel kretsprosess der arbeidssubstansen er en gass. Hva er netto arbeid som utføres i kretsprosessen?

A Null.
B Arealet omsluttet av kurven abcda.
C Arealet under kurven abc.
D Arealet under kurven ab minus arealet under kurven dc.

c. Vedrørende ligningen $Q = \Delta U + W$, hvilken påstand er feil?

A Ligningen uttrykker energibevarelse.
B W er arbeidet gjort *av* systemet.
C Størrelsen Q kan være både positiv og negativ.
D Mens Q er en prosessvariabel, er både U og W tilstandsvariable.

d. Hvilken påstand om ulike termodynamiske prosesser er feil?

A I en isentropisk prosess er systemets indre energi konstant.
B I en isobar prosess er trykket konstant.
C I en adiabatisk prosess tilføres systemet ikke varme.
D I en isoterm prosess er temperaturen konstant.

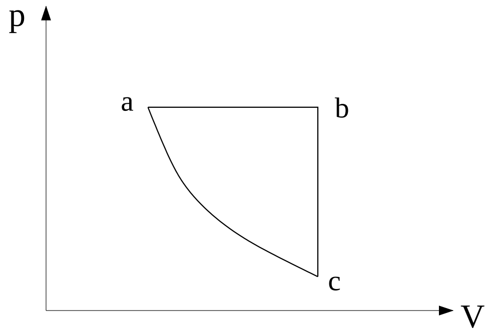
e. I en gitt mengde ideell gass som fyller en beholder med volum V, er trykket p og midlere molekylfart v. Hvis volum og trykk endres til hhv $2V$ og $2p$, hva blir da midlere molekylfart?

A $4v$ B $2v$ C v D $v/4$

f. Hva skjer med molekylenes midlere kinetiske energi når en ideell gass utvider seg ved konstant trykk?

A Den øker.
B Den endrer seg ikke.
C Den minker.
D Den kan øke eller minke, men flere opplysninger trengs for å avgjøre hva som skjer.

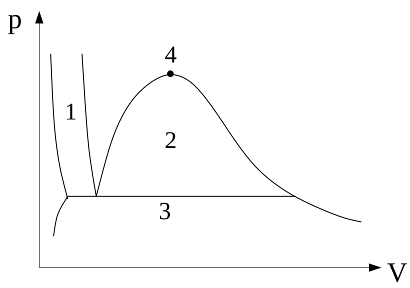
g.



Figuren viser en kretsprosess for en ideell gass, bestående av en isobar, en isokor og en adiabat. Ranger temperaturene i a, b og c.

A $T_b > T_a = T_c$.
B $T_c > T_b > T_a$.
C $T_b > T_a > T_c$.
D $T_c > T_a > T_b$.

h.



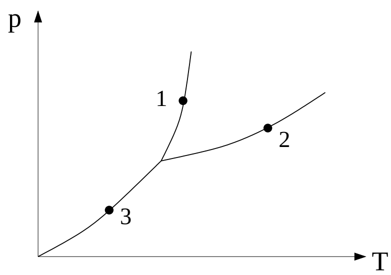
Med notasjonen g = gass, v = væske og f = fast stoff, hvilke faser opptrer i koeksistens i de ulike områdene?

A 1 = v + f, 2 = g + v, 3 = g + f
B 1 = g + v, 2 = g + f, 3 = v + f
C 1 = g + f, 2 = v + f, 3 = g + v
D 1 = g + f, 2 = g + v, 3 = v + f

i. Hva kalles punktet merket 4 i figuren i oppgave **h**?

A Kritisk punkt. B Trippelpunkt. C Kokepunkt. D Smeltepunkt.

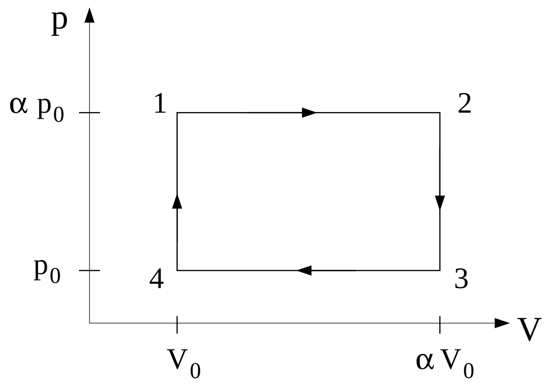
j.



Figuren viser koeksistenskurver i et pT-diagram. Hvilke prosesser foregår i tilstandene 1, 2 og 3?

A 1 = fordampning, 2 = smelting, 3 = sublimasjon
B 1 = sublimasjon, 2 = fordampning, 3 = smelting
C 1 = smelting, 2 = sublimasjon, 3 = fordampning
D 1 = smelting, 2 = fordampning, 3 = sublimasjon

Oppgave 2. Kretsprosess. (Poeng: 5+3+4+8)



Figuren viser en kretsprosess som består av to isobarer og to isokorer. Arbeidssubstansen er en toatomig ideell gass med N molekyler, og α er en positiv konstant, større enn 1. Trykket p_0 og volumet V_0 kan anses som kjent.

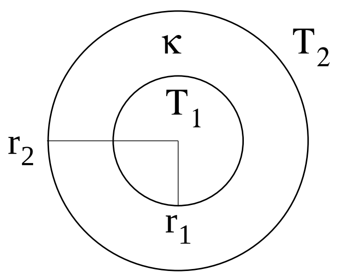
a. Bruk det klassiske ekvipartisjonsprinsippet til å begrunne at $C_V = 5Nk/2$ omkring romtemperatur. Hva er C_p omkring romtemperatur? Hva er C_V ved riktig høye temperaturer? Enn ved riktig lave temperaturer? Begrunn dine svar.

b. Hva er arbeidet W som gassen utfører på sine omgivelser pr syklus?

c. Bestem temperaturene T_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ i de fire avmerkede tilstandene i figuren.

d. Bestem kretsprosessens virkningsgrad $\eta(\alpha) = W/Q_{\text{inn}}$, der Q_{inn} er varmen som *tilføres* gassen pr syklus. Anta at hele syklusen foregår omkring romtemperatur, slik at C_V og C_p begge er konstante.

Oppgave 3. Varmeledning i gass med sylindersymmetri. (Poeng: 10+5)

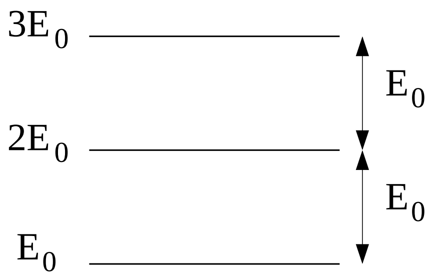


En fortynnet gass med atomer ("enatomige molekyler") fyller rommet mellom en indre sylinder med radius r_1 og et ytre sylinderskall med radius r_2, begge med så stor lengde L at vi kan se bort fra randeffekter og betrakte systemet som sylindersymmetrisk. Atomene har masse m og kan betraktes som harde kuler med radius a. Figuren til venstre viser et tverrsnitt av systemet.

a. Anta at atomenes midlere fri veilengde λ er liten sammenlignet med avstanden $r_2 - r_1$ mellom indre og ytre sylinder. Da er gassens varmeledningsevne uavhengig av partikkeltettheten $n = N/V$, og gitt ved $\kappa(T) = \beta\sqrt{T}$, med $\beta = 2c_V\sqrt{k}/(3\sigma\sqrt{\pi m})$. Anta stasjonære forhold, med konstant temperatur T_1 på indre sylinder og konstant temperatur $T_2 < T_1$ ved ytre sylinderskall, og bestem varmestrømmen pr lengdeenhet $\dot{Q}/L$ i den fortynnede gassen. (Tips: Bruk Fouriers lov og uttrykk svaret ved koeffisienten β samt de gitte temperaturene T_1 og T_2 og radiene r_1 og r_2. Med sylindersymmetri er $\nabla T = \hat{r}\ dT/dr$. Merk at κ ikke er konstant men avhenger av T. Vi ser bort fra varmeoverføring pga stråling.)

b. Anta at gassen er argon, med $m = 40\,u$ og $a = 0.71$ Å, at indre sylinder har radius 3.5 cm og ytre sylinderskall har radius 4.0 cm, og at $T_1 = 100°$C (kokende vann) og $T_2 = 20°$C (romtemperatur). Regn ut tallverdi for varmestrømmen pr lengdeenhet, $\dot{Q}/L$. Rund av til heltallig verdi i enheten W/m.

Oppgave 4. System med tre ekvidistante energinivåer. (Poeng: 5+5)



Et system med ikke-vekselvirkende partikler er i termisk likevekt med et varmereservoar som har temperatur T. En gitt partikkel befinner seg i en av tre mulige tilstander, og da med energi $E_j = j\,E_0$, der $j = 1, 2, 3$ nummererer de tre mulige tilstandene. E_0 er en konstant som angir energiforskjellen mellom "nabonivåer", dvs mellom nivå 1 og 2 og mellom nivå 2 og 3. Det er ingen begrensning på antall partikler som kan befinne seg i en gitt energitilstand.

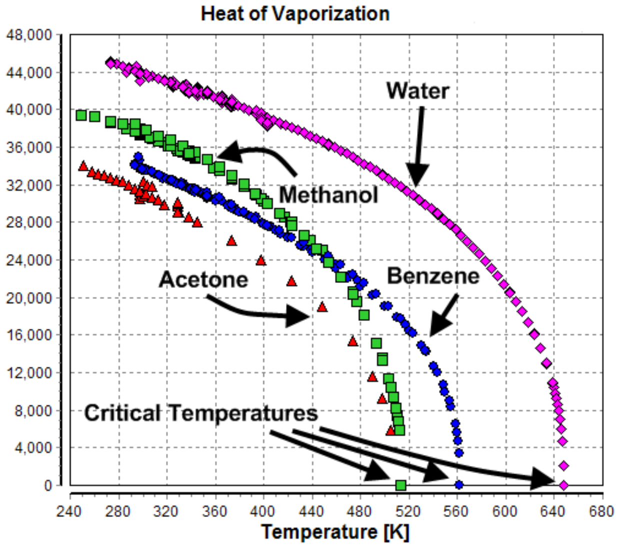
a. Bestem sannsynlighetene π_j ($j = 1, 2, 3$) for at en gitt partikkel befinner seg i tilstand j med energi E_j. Kontroller at verdien av $\sum_{j=1}^{3} \pi_j$ er som forventet. Hva blir de ulike π_j i grensene $kT \ll E_0$ (dvs $T \to 0$) og $kT \gg E_0$ (dvs $T \to \infty$)?

b. Bestem midlere energi pr partikkel, $\langle E \rangle$. Hva blir $\langle E \rangle$ i grensene $kT \ll E_0$ ($T \to 0$) og $kT \gg E_0$ ($T \to \infty$)?

Oppgave 5. Helmholtz fri energi. (Poeng: 5)

Naturlige variable for Helmholtz fri energi F er T og V. Vis dette ved å uttrykke dF ved dT og dV, og bestem dermed $(\partial F/\partial T)_V$ og $(\partial F/\partial V)_T$. Utled også Maxwell-relasjonen $(\partial p/\partial T)_V = (\partial S/\partial V)_T$.
(Tips: Benytt den termodynamiske identitet, med konstant partikkeltall N.)

Oppgave 6. Damptrykk. (Poeng: 4+8+8)



Figuren viser målte molare fordampningsvarmer som funksjon av temperaturen, $l_f(T)$ (kJ/mol), for vann og tre andre stoffer. Vi skal bruke kurven for vann ("Water") og Clausius-Clapeyrons ligning til å beregne metningstrykket for vanndamp, $p(T)$, heretter kalt damptrykket. Av figuren ser vi at en lineær tilnærmelse,

$$l_f(T) = \alpha - \beta T,$$

vil gi brukbar tilpasning til den målte fordampningsvarmen i temperaturområdet 280 K $< T <$ 440 K, med $l_f(280) = 45$ kJ/mol og $l_f(440) = 37$ kJ/mol.

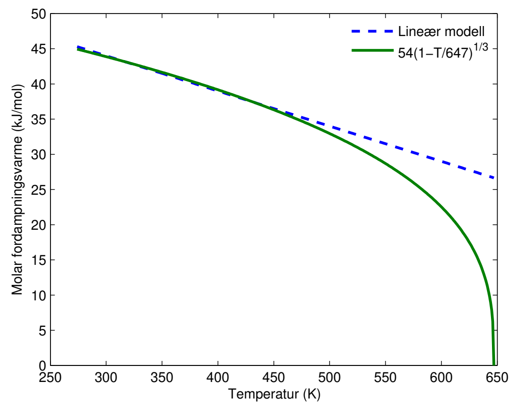
a. Bestem koeffisientene α og β i den lineære tilnærmelsen for $l_f(T)$. Angi enheter.

b. Finn et uttrykk for damptrykket $p(T)$, med utgangspunkt i Clausius-Clapeyrons ligning, som beskriver helningen til damptrykk-kurven, dvs dp/dT. Bruk vannets trippelpunkt som referanse, dvs $p_0 = 611$ Pa ved $T_0 = 273.16$ K, og bruk den lineære tilnærmelsen for vannets molare fordampningsvarme, slik at $p(T)$ uttrykkes ved p_0, T_0, α, β, R (gasskonstanten), og T. Anta at $\Delta V = V_g - V_v \simeq V_g$, og bruk ideell gass tilstandsligning for gassvolumet $V_g(p, T)$.

c. Den lineære tilnærmelsen for $l_f(T)$ blir gradvis dårligere for temperaturer over 440 K, men funksjonen

$$l_f(T) = l_f^0 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{1/3},$$

med $l_f^0 = 54$ kJ/mol og $T_c = 647$ K, viser seg å beskrive den målte fordampningsvarmen ganske bra helt opp til det kritiske punkt (se figuren til høyre). Vis hvordan damptrykket $p(T)$ nå kan beregnes *numerisk* med utgangspunkt i Clausius-Clapeyrons ligning, og med trippelpunktet (T_0, p_0) som startverdi for en enkel iterativ metode. Bruk de samme tilnærmelsene for ΔV som i punkt **b**. (Tips: Det er ikke nødvendig å skrive et *program*, men det skal framgå av besvarelsen hvordan $p(T_0 + \Delta T)$ bestemmes fra $p(T_0) = p_0$, og mer generelt hvordan $p[T_0 + (j+1)\Delta T]$ bestemmes fra $p[T_0 + j\Delta T]$.



Hvorfor blir tilnærmelsen $\Delta V \simeq V_g$ dårlig når vi nærmer oss det kritiske punkt?

FORMLER OG UTTRYKK.

Formlenes gyldighetsområde og symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk og betegnelser som i forelesningene. Vektorer med fete typer.

Utvidelseskoeffisienter, trykk-koeffisient, isoterm kompressibilitet:

$$\alpha_L = \frac{1}{L}\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_p \qquad \alpha_V = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \qquad \alpha_p = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \qquad \kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

Syklisk regel:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

Første hovedsetning:

$$đQ = dU + đW$$

Varmekapasitet:

$$C = \frac{đQ}{dT}$$

$$C_p - C_V = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p .$$

Termodynamiske potensialer:

$$H = U + pV \qquad F = U - TS \qquad G = H - TS \qquad G = \sum_j \mu_j N_j$$

Den termodynamiske identitet:

$$TdS = dU + pdV - \sum_j \mu_j dN_j$$

Ideell gass tilstandsligning:

$$pV = NkT = nRT$$

van der Waals tilstandsligning:

$$p = \frac{NkT}{V - Nb} - \frac{aN^2}{V^2}$$

Adiabatisk prosess:

$$đQ = 0$$

Joule-Thomson-koeffisienten:

$$\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H$$

PCH 4.18:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

Virkningsgrad for varmekraftmaskin:

$$\eta = \frac{W}{Q_{\text{inn}}}$$

Virkningsgrad for Carnot-maskin:

$$\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Maxwells hastighetsfordeling:

$$g(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-mv_x^2/2kT} \qquad F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} \qquad f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

Gauss-integraler:

$$I_0(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$I_2(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{d}{d\alpha} I_0(\alpha) \quad \text{etc}$$

Det klassiske ekvipartisjonsprinsippet:
Hver frihetsgrad som inngår kvadratisk i energifunksjonen E bidrar med $kT/2$ til midlere energi.

Partisjonsfunksjon:

$$Z = \sum_j e^{-E_j/kT} = e^{-\beta F} \qquad (\beta = 1/kT)$$

Kjøleskap, virkningsgrad (effektfaktor):

$$\varepsilon_K = \left| \frac{Q_{\rm ut}}{W} \right|$$

Varmepumpe, virkningsgrad (effektfaktor):

$$\varepsilon_V = \left| \frac{Q_{\rm inn}}{W} \right|$$

Entropi og Clausius' ulikhet:

$$dS = \frac{đQ_{\rm rev}}{T} \qquad \oint dS = 0 \qquad \oint \frac{đQ}{T} \leq 0$$

Boltzmanns prinsipp:

$$S = k \ln W$$

Stirlings formel:

$$N! = \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N} \qquad (N \to \infty)$$

Eksergi:

$$W_{\rm max} = -\Delta G \quad \text{med} \quad G = U - T_0 S + p_0 V$$

Kjemisk potensial:

$$\mu_j = \left(\frac{\partial G}{\partial N_j}\right)_{p,T,N_{i\neq j}}$$

Ideell blanding:

$$\Delta S_{\rm mix} = -k \sum_j N_j \ln x_j \qquad \mu_j = \mu_j^0 + kT \ln x_j$$

Clausius-Clapeyrons ligning:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta S}{\Delta V}$$

Strålingshulrom, frekvensfordeling:

$$\frac{du}{df} = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{f^3}{\exp(hf/kT) - 1}$$

Stefan-Boltzmanns lov:

$$I(T) = \frac{c}{4} u(T) = \sigma T^4 \qquad (\sigma = 2\pi^5 k^4 / 15 h^3 c^2)$$

Fouriers lov:

$$\boldsymbol{j} = -\kappa \nabla T \quad ; \quad j = \dot{Q}/A$$

Varmeledningsligningen:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \nabla^2 T$$

Ficks lov:

$$\boldsymbol{j} = -D \nabla n$$

Diffusjonsligningen:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \nabla^2 n$$

U-verdi:

$$j = U \Delta T$$

Midlere fri veilengde, fortynnet gass:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma}$$

Varmeledningsevne, fortynnet gass:

$$\kappa = \frac{2c_V}{3\sigma} \sqrt{\frac{kT}{\pi m}}$$

Diffusjonskonstant, fortynnet gass:

$$D = \frac{\kappa}{n c_V}$$

Fysiske konstanter:

$$\begin{aligned}
k &= 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \\
R &= 8.314 \text{ J/mol K} \\
N_A &= 6.02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \\
h &= 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \\
e &= 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\
m_e &= 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\
u &= 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\
c &= 3.00 \cdot 10^{8} \text{ m/s} \\
\sigma &= 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4
\end{aligned}$$

Omregningsfaktorer:

$$\begin{aligned}
1 \text{ eV} &= 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\
1 \text{ Å} &= 10^{-10} \text{ m} \\
1 \text{ cal} &= 4.184 \text{ J} \\
1 \text{ bar} &= 10^{5} \text{ Pa} \\
1 \text{ atm} &= 1.013 \cdot 10^{5} \text{ Pa}
\end{aligned}$$

GOD SOMMER!