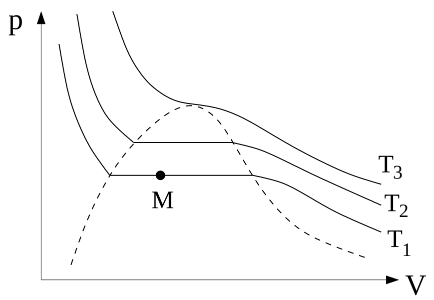
Eksamen FY1005/TFY4165 Termisk fysikk kl 09.00 - 13.00 mandag 12. august 2013

Oppgave 1. Ti flervalgsoppgaver. (Poeng: 2 pr oppgave)

a. For van der Waals tilstandsligning, $(p + aN^2/V^2)(V - Nb) = NkT$, hvilket utsagn er korrekt?

A Leddet aN^2/V^2 tar hensyn til at ikke alle gassmolekylene befinner seg ved samme trykk.
B Leddet aN^2/V^2 tar hensyn til at molekylene frastøter hverandre.
C Leddet Nb tar hensyn til at molekylene har et visst volum, og at de ikke er punktpartikler.
D Denne tilstandsligningen gjelder for faste stoffer, men ikke for væsker og gasser.

b.



Figuren viser et typisk pV-diagram for en ikke-ideell gass. Hvilken påstand er korrekt?

A De heltrukne kurvene er isobarer.
B Stoffets kokepunkt er T_3.
C I tilstanden merket M er stoffet en blanding av væske og gass.
D $T_3 < T_2 < T_1$.

c.
I kinetisk gassteori, hvordan går man fram for å bestemme trykket i en ideell gass?

A Ved å innse at det ikke strømmer noe varme ut av et isolert system.
B Ved å bestemme molekylenes akselerasjon, og deretter benytte Newtons 2. lov, $F = ma$.
C Ved å bestemme hvor mange molekyler som støter mot en vegg pr tidsenhet samt impulsendringen pr støt, og deretter benytte Newtons 2. lov, $F = dp/dt$.
D Ved å bestemme gassens kinetiske energi før og etter at den har utført et arbeid ved å flytte en av beholderens vegger en lengde Δx.

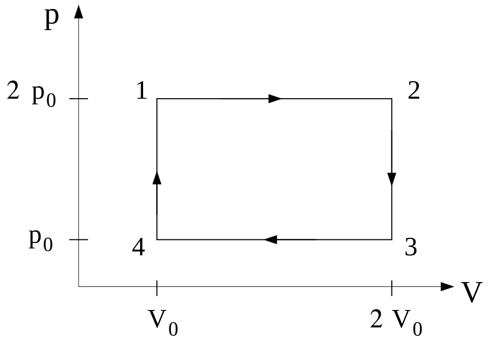
d. Hvilken påstand er korrekt?

A 2. hovedsetning er en direkte konsekvens av 1. hovedsetning.
B Det er ikke mulig å overføre varme fra et kaldt legeme til et varmere legeme.
C Det er ikke mulig å omdanne varme i sin helhet til arbeid.
D Det er ikke mulig å omdanne arbeid i sin helhet til varme.

e. Hvilken påstand er feil?

A Entropi er et kvantitativt mål for uorden.
B Total entropiendring i en syklus i en Carnot-prosess er null.
C Entropien i et lukket system er bevart.
D Entropi kan måles i enheten J/K.

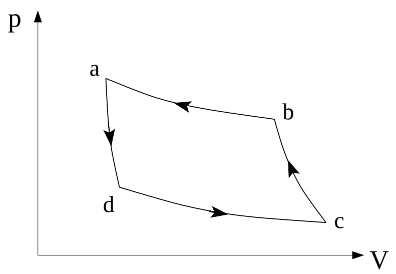
f.



Figuren viser en kretsprosess for en ideell gass, med $p_0 = 8$ atm og $V_0 = 7$ liter. Hvor stort arbeid utfører gassen pr syklus?

A 5.7 kJ
B 56 J
C 2.8 kJ
D 28 J

g.



Figuren viser en reversibel kretsprosess der arbeidssubstansen er en gass. Hva kan du si om netto varme som tilføres arbeidssubstansen pr syklus (fra omgivelsene) i denne kretsprosessen?

A Det er lik null.
B Det er negativt.
C Det er positivt.
D Intet kan sies ut fra en slik figur.

h. Hva skjer med molekylenes midlere kinetiske energi når en ideell gass komprimeres ved konstant temperatur?

A Den øker.
B Den endrer seg ikke.
C Den minker.
D Den kan øke eller minke, men flere opplysninger trengs for å avgjøre hva som skjer.

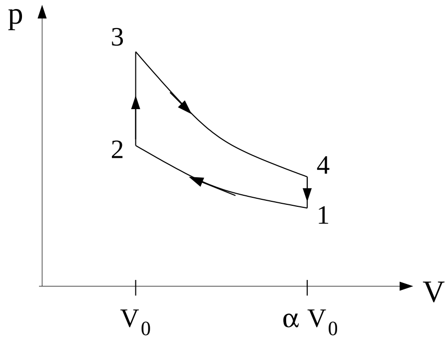
i. I en gitt mengde ideell gass som fyller en beholder med volum V, er trykket p og midlere molekylfart v. Hvis volum og trykk endres til hhv $V/2$ og $4p$, hva blir da midlere molekylfart?

A $2\,v$ B $\sqrt{2}\,v$ C $v/\sqrt{2}$ D $v/2$

j. I en ideell gass ved normale betingelser er varmekapasiteten pr partikkel av størrelsesorden

A R B k C $\hbar$ D N_A

Oppgave 2. Kretsprosess. (Poeng: 5+5+5+5)



Figuren viser en kvalitativ skisse av den såkalte Otto-prosessen, en reversibel idealisering av prosessen i en bensinmotor, bestående av to adiabater og to isokorer. Arbeidssubstansen er en fleratomig ideell gass. Faktoren $\alpha > 1$ angir det såkalte kompresjonsforholdet.

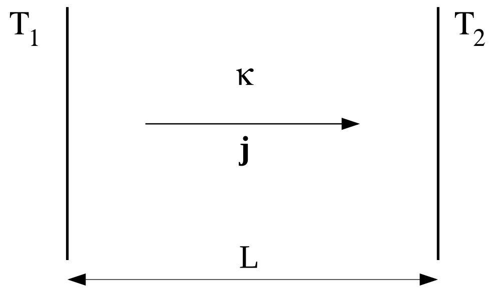
a. Begrunn hvorfor adiabatkonstanten $\gamma = C_p/C_V$ har verdien 4/3 for en fleratomig gass. (Anta at molekylene ikke er lineære, og at molekylenes indre vibrasjonsfrihetsgrader ikke er eksitert ved de aktuelle temperaturer.)

b. Utled adiabatligningen for en ideell gass i TV-planet, $TV^{\gamma-1}$ = konstant. Tips: Anta konstante (dvs temperaturuavhengige) varmekapasiteter, samt "$p\,dV$-arbeid". Ta utgangspunkt i 1. hovedsetning. Du kan få bruk for å erstatte Nk med $C_p - C_V$.

c. Vis at Otto-prosessens virkningsgrad er $\eta = 1 - \alpha^{1-\gamma}$.

d. Man vil unngå antenning av gassblandingen i løpet av den adiabatiske kompresjonen ($1 \to 2$ i figuren), som starter ved "normale betingelser", dvs atmosfæretrykk og romtemperatur ($p_1 = 1$ atm, $T_1 = 293$ K). Hvor stort kompresjonsforhold $\alpha_{\max}$ kan vi da tillate, dersom gassblandingen antennes ved 400 grader celsius?

Oppgave 3. Varmetransport. (Poeng: 5+5+5)



En fortynnet gass med enatomige molekyler fyller rommet mellom to store parallelle plater (som f.eks et dobbeltvindu). Atomene har masse m og kan betraktes som harde kuler med radius a. Anta at atomenes midlere fri veilengde λ er liten sammenlignet med avstanden L mellom platene. Da er gassens varmeledningsevne uavhengig av partikkeltettheten $n = N/V$, og gitt ved $\kappa = \beta\sqrt{T}$, med $\beta = k\sqrt{k}/(4\pi a^2\sqrt{\pi m})$.

a. Anta stasjonære forhold, med konstant temperatur T_1 på venstre plate og konstant temperatur $T_2 < T_1$ på høyre plate, og bestem varmestrømmen pr flateenhet $j_\kappa = \dot{Q}_\kappa/A$ i den fortynnede gassen. (Tips: Bruk Fouriers lov og uttrykk svaret ved koeffisienten β samt de gitte temperaturene T_1 og T_2 og plateavstanden L.

b. Varmeoverføring pga stråling vil komme i tillegg til varmeledningsbidraget beregnet i punkt **a**. Bestem netto varmestrøm pr flateenhet, $j_{\text{rad}} = \dot{Q}_{\text{rad}}/A$, pga stråling mellom platene. Du kan anta at begge plater er perfekt svarte legemer, med konstante temperaturer T_1 og T_2 som i punkt **a**.

c. Anta at gassen er argon, med $m = 40u$ og $a = 0.71$ Å, at plateavstanden er $L = 1.5$ cm, og at $T_1 = 20$°C (innetemperatur) og $T_2 = -20$°C (utetemperatur, vinter). Bestem de to bidragene til varmestrømmen pr flateenhet, hhv j_κ og j_{rad}. Bruk enheten W/m^2.

<u>Oppgave 4.</u> Ideell paramagnet. (Poeng: 5+5+5)

Et elektron har kvantisert magnetisk moment

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{m_e}\,\boldsymbol{S}.$$

Her er $-e$, m_e og $\boldsymbol{S}$ hhv ladningen, massen og spinnet til elektronet. I et ytre magnetfelt $\boldsymbol{B} = B\,\hat{z}$ vil elektronspinnets komponent S_z i magnetfeltets retning kun ha to mulige verdier, $\pm\hbar/2$, slik at den potensielle energien $-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}$ (jf grunnleggende magnetostatikk) kun kan ha verdien $E_- = -\mu_B B$ eller $E_+ = \mu_B B$, svarende til at $\boldsymbol{\mu}$ peker i hhv samme retning som $\boldsymbol{B}$ eller motsatt retning av $\boldsymbol{B}$. Her er $\mu_B = e\hbar/2m_e$ en såkalt Bohr-magneton.

I termisk likevekt er sannsynligheten $p(s)$ for at elektronet befinner seg i den ene eller den andre av de to mulige tilstandene (med $s = \pm 1$ svarende til $E_\pm$)

$$p(s) = C\,e^{-sx},$$

dvs proporsjonal med *Boltzmannfaktoren.* Her er C en normeringskonstant, og $x = \mu_B B/kT$ er en dimensjonsløs størrelse som angir spinnets potensielle energi i magnetfeltet relativt den tilgjengelige termiske energien kT.

<u>a</u>. Beregn normeringskonstanten C. Vis at partisjonsfunksjonen (pr partikkel) blir $z = 2\cosh x$.

<u>b</u>. Vis at elektronets midlere magnetiske moment m, gjort dimensjonsløst ved å dividere med μ_B, er gitt ved

$$m = \frac{\langle\mu\rangle}{\mu_B} = \tanh x.$$

Vis at dette resultatet er i samsvar med Curies lov, $m \sim 1/T$, for høye temperaturer.

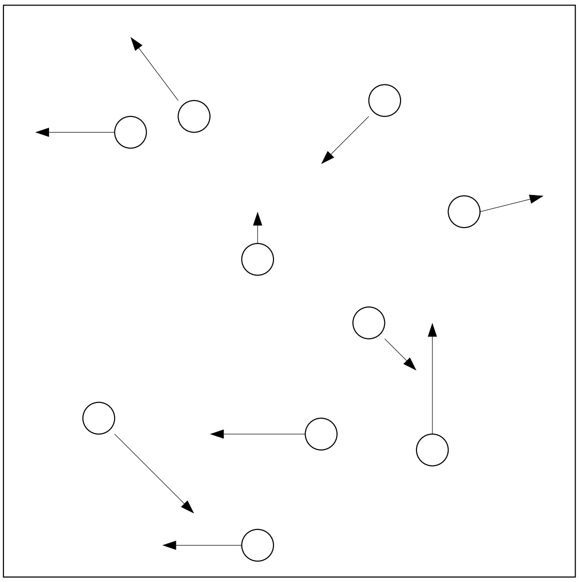
Entropien σ pr partikkel kan nå bestemmes fra partisjonsfunksjonen med formelen $\sigma = k\,\partial\,(T\ln z)\,/\partial T$, og blir, uttrykt ved midlere magnetiske moment,

$$\sigma(m) = k\left[\ln 2 - \frac{1}{2}(1+m)\ln(1+m) - \frac{1}{2}(1-m)\ln(1-m)\right].$$

<u>c</u>. Hva blir (til ledende orden) m og σ dersom magnetfeltet er meget sterkt, dvs $x \gg 1$? Hva blir m og σ dersom magnetfeltet skrus av, dvs $x = 0$? Vurder om σ i disse to grensetilfellene er som forventet, i lys av Boltzmanns prinsipp (se formelvedlegget).

Oppgitt:
$\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$, $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$, $\tanh x = \sinh x/\cosh x$
$x\ln x \to 0$ når $x \to 0$

Oppgave 5. Maxwells hastighetsfordeling. (Poeng: 5+5+10)



Under forutsetning av (i) at ingen retninger er spesielt foretrukne, og (ii) at de ulike komponentene av hastigheten er statistisk uavhengige, så vil lette, runde plastskiver som svever på et luftputebord (og som reflekteres ved luftputebordets vegger) ha hastigheter som oppfyller Maxwellfordelingen. Med andre ord, sannsynligheten for at en gitt skive har hastighetskomponent i x-retning mellom v_x og $v_x + dv_x$ er

$$g(v_x)\, dv_x = \sqrt{\frac{B}{\pi}} e^{-B\, v_x^2}\, dv_x,$$

og sannsynligheten for at en gitt skive har hastighetskomponent i y-retning mellom v_y og $v_y + dv_y$ er

$$g(v_y)\, dv_y = \sqrt{\frac{B}{\pi}} e^{-B\, v_y^2}\, dv_y.$$

a. Hva blir sannsynligheten $F(\boldsymbol{v})\, d^2v$ for at en gitt skive har hastighetsvektor mellom $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ og $\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v} = (v_x + dv_x, v_y + dv_y)$? Hva blir sannsynligheten $f(v)\, dv$ for at en gitt skive har fart (dvs $|\boldsymbol{v}|$) mellom v og $v + dv$? (Tips: I kartesiske koordinater: $d^2v = dv_x\, dv_y$. I polarkoordinater: $d^2v = v\, d\phi\, dv$.)

b. Vis at midlere kvadratiske hastighet er $\langle v^2 \rangle = 1/B$.

c. Anta at du har "filmet" bevegelsen til 10 identiske plastskiver på et luftputebord over et tidsrom på 10 sekunder med et hurtigkamera som tar 20 bilder pr sekund. Du har dermed 10 datafiler til rådighet, en fil pr plastskive, der hver fil inneholder 200 rader a 3 tall, t, x og y, dvs hhv tidspunkt, x-posisjon og y-posisjon for den gitte skiven.
Forklar hvordan du vil gå fram for å undersøke om disse 10 plastskivene faktisk har hastigheter som oppfyller Maxwellfordelingen. Direkte programmering er ikke nødvendig. Bruk ordinær tekst og eventuelt litt "pseudokode". Det skal gå fram hvordan du bestemmer en skives hastighet langs dens bane, og dessuten hvordan du vil velge å framstille fordelingen av hastigheter. Inntil ca en A4-side bør være tilstrekkelig.

FORMLER OG UTTRYKK.

Formlenes gyldighetsområde og symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk og betegnelser som i forelesningene. Vektorer med fete typer.

Utvidelseskoeffisienter, trykk-koeffisient, isoterm kompressibilitet:

$$\alpha_L = \frac{1}{L}\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_p \qquad \alpha_V = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \qquad \alpha_p = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \qquad \kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

Syklisk regel:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

Første hovedsetning:

$$đQ = dU + đW$$

Varmekapasitet:

$$C = \frac{đQ}{dT}$$

$$C_p - C_V = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$$

Termodynamiske potensialer:

$$H = U + pV \qquad F = U - TS \qquad G = H - TS \qquad G = \sum_j \mu_j N_j$$

Den termodynamiske identitet:

$$TdS = dU + pdV - \sum_j \mu_j dN_j$$

Ideell gass tilstandsligning:

$$pV = NkT = nRT$$

van der Waals tilstandsligning:

$$p = \frac{NkT}{V - Nb} - \frac{aN^2}{V^2}$$

Adiabatisk prosess:

$$đQ = 0$$

Joule-Thomson-koeffisienten:

$$\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H$$

PCH 4.18:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$$

Virkningsgrad for varmekraftmaskin:

$$\eta = \frac{W}{Q_{\text{inn}}}$$

Virkningsgrad for Carnot-maskin:

$$\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Maxwells hastighetsfordeling:

$$g(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-mv_x^2/2kT} \qquad F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} \qquad f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

Gauss-integraler:

$$I_0(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$I_2(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{d}{d\alpha} I_0(\alpha) \quad \text{etc}$$

Det klassiske ekvipartisjonsprinsippet:
Hver frihetsgrad som inngår kvadratisk i energifunksjonen E bidrar med $kT/2$ til midlere energi.

Partisjonsfunksjon:

$$Z = \sum_j e^{-E_j/kT} = e^{-\beta F} \qquad (\beta = 1/kT)$$

Kjøleskap, virkningsgrad (effektfaktor):

$$\varepsilon_K = \left|\frac{Q_{\text{ut}}}{W}\right|$$

Varmepumpe, virkningsgrad (effektfaktor):

$$\varepsilon_V = \left|\frac{Q_{\text{inn}}}{W}\right|$$

Entropi og Clausius' ulikhet:

$$dS = \frac{đQ_{\text{rev}}}{T} \qquad \oint dS = 0 \qquad \oint \frac{đQ}{T} \leq 0$$

Boltzmanns prinsipp:

$$S = k \ln W$$

Stirlings formel:

$$N! = \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N} \qquad (N \to \infty)$$

Eksergi:

$$W_{\max} = -\Delta G \quad \text{med} \quad G = U - T_0 S + p_0 V$$

Kjemisk potensial:

$$\mu_j = \left(\frac{\partial G}{\partial N_j}\right)_{p,T,N_{i\neq j}}$$

Ideell blanding:

$$\Delta S_{\text{mix}} = -k \sum_j N_j \ln x_j \qquad \mu_j = \mu_j^0 + kT \ln x_j$$

Clausius-Clapeyrons ligning:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta S}{\Delta V}$$

Strålingshulrom, frekvensfordeling:

$$\frac{du}{df} = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{f^3}{\exp(hf/kT) - 1}$$

Stefan-Boltzmanns lov:

$$I(T) = \frac{c}{4} u(T) = \sigma T^4 \qquad (\sigma = 2\pi^5 k^4 / 15 h^3 c^2)$$

Fouriers lov:

$$\boldsymbol{j} = -\kappa \nabla T \quad ; \quad j = \dot{Q}/A$$

Varmeledningsligningen:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \nabla^2 T$$

Ficks lov:

$$\boldsymbol{j} = -D \nabla n$$

Diffusjonsligningen:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \nabla^2 n$$

U-verdi:

$$j = U \Delta T$$

Midlere fri veilengde, fortynnet gass:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} n \sigma}$$

Varmeledningsevne, fortynnet gass:

$$\kappa = \frac{2c_V}{3\sigma} \sqrt{\frac{kT}{\pi m}}$$

Diffusjonskonstant, fortynnet gass:

$$D = \frac{\kappa}{n c_V}$$

Fysiske konstanter:

$$\begin{aligned}
k &= 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \\
R &= 8.31 \text{ J/molK} \\
N_A &= 6.02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \\
h &= 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \\
e &= 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\
m_e &= 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\
u &= 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\
c &= 3.00 \cdot 10^{8} \text{ m/s} \\
\sigma &= 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4
\end{aligned}$$

Omregningsfaktorer:

$$\begin{aligned}
1 \text{ eV} &= 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\
1 \text{ Å} &= 10^{-10} \text{ m} \\
1 \text{ cal} &= 4.184 \text{ J} \\
1 \text{ bar} &= 10^{5} \text{ Pa} \\
1 \text{ atm} &= 1.013 \cdot 10^{5} \text{ Pa}
\end{aligned}$$