TFY4115 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2013.
Løsningsforslag til øving 3.

Oppgave 1.

ϕ	S/g (g)	μ
0	185	
$\pi/2$	240	0.166
π	300	0.154
$3\pi/2$	440	0.184
2π	600	0.187
$5\pi/2$	800	0.186
3π	1000	0.179
$7\pi/2$	1100	0.162
4π	1400	0.161

Tabell: Maksimal snorkraft S og statisk friksjonskoeffisient μ, med snor surret en vinkel ϕ rundt plastrøret.

Fra det oppgitte uttrykket for $S(\phi)$ har vi

$$\mu = \frac{1}{\phi} \ln \frac{S(\phi)}{S(0)}$$

når $S(\phi)$ er største tillatte snorkraft for å holde loddet med masse $m = S(0)/g$ i likevekt (dvs i ro). Middelverdien av μ blir

$$\overline{\mu} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{8} \mu_i \simeq 0.1724,$$

standardavviket blir

$$\Delta\mu = \sqrt{\frac{1}{7} \sum_{i=1}^{8} (\mu_i - \overline{\mu})^2} \simeq 0.0132,$$

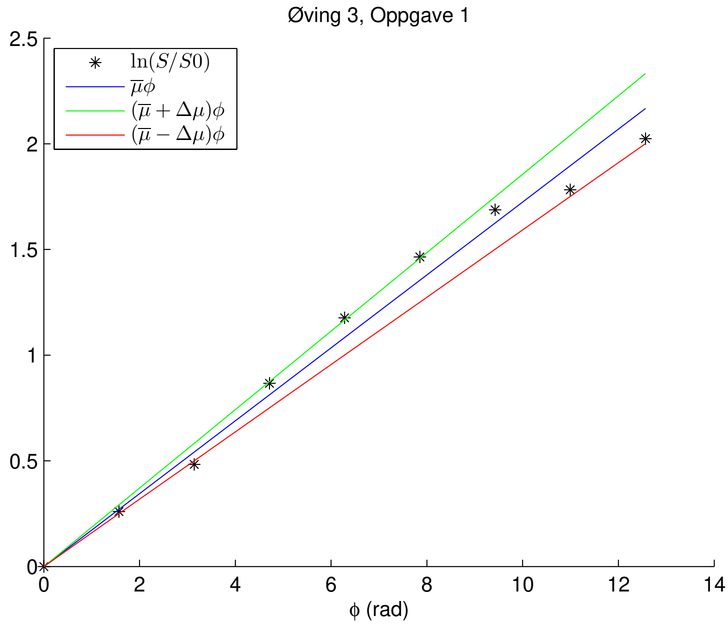
mens standardfeilen blir

$$\Delta\overline{\mu} = \frac{\Delta\mu}{\sqrt{8}} \simeq 0.0047.$$

Dermed:

$$\mu = 0.172 \pm 0.005.$$

Vi plotter målepunktene for $\ln[S/S(0)]$ sammen med de rette linjene $\mu\phi$, for $\mu = \overline{\mu}$ samt $\mu = \overline{\mu} \pm \Delta\mu$:



Matlabprogrammet friksjon.m regner ut $\overline{\mu}$, $\Delta\mu$ og $\Delta\overline{\mu}$, og lager figuren ovenfor. Pythonprogrammet friksjon.py gjør essensielt det samme. Vi ser at 3 av de 8 målepunktene (37%) ligger utenfor intervallet $[\overline{\mu} - \Delta\mu, \overline{\mu} + \Delta\mu]$, dvs 63% ligger innenfor. Dette er omtrent som forventet (ca 68%).

Oppgave 2.

a. Normalkraften er $N = mg\cos\theta$, og dermed er friksjonskraften når klossen har begynt å gli

$$f = \mu_k mg\cos\theta = 0.40 \cdot 1.00\,\text{kg} \cdot 9.81\,\text{m/s}^2 \cdot 0.866 = 3.398\,\text{N} = \underline{3.4\,\text{N}}\,.$$

Parallellkraften nedover langs skråplanet er

$$F_{||} = mg\sin\theta = 1.00\,\text{kg} \cdot 9.81\,\text{m/s}^2 \cdot 0.50 = 4.905\,\text{N},$$

og dermed blir akselerasjonen nedover skråplanet

$$a = \frac{F_{||} - f}{m} = \frac{4.905\,\text{N} - 3.398\,\text{N}}{1.00\,\text{kg}} = \underline{1.51\,\text{m/s}^2}\,.$$

b. Vi må først finne ut hvilken retning friksjonskraften har. Friksjonskraften er alltid rettet mot bevegelsen som vi ville ha fått dersom det ikke var friksjon, slik at vi må finne ut hvilken retning klossen ville bevege seg med alle ytre krefter på plass, men *uten* friksjon. Uten friksjon ville netto akselererende kraft nedover skråplanet vært

$$F_{\text{aks}} = mg\sin\theta - F = 1.00\,\text{kg} \cdot 9.81\,\text{m/s}^2 \cdot 0.50 - 1.00\,\text{N} = 3.905\,\text{N}\,.$$

Positiv, altså rettet nedover. Friksjonskraften er da rettet oppover, med verdi $\underline{f = 3.4\,\text{N}}$ som funnet ovenfor. Friksjonskraften er mindre enn F_{aks}, og dermed akselererer klossen nedover med

$$a = \frac{F_{\text{aks}} - f}{m} = \frac{3.905\,\text{N} - 3.398\,\text{N}}{1.00\,\text{kg}} = \frac{0.507\,\text{N}}{1.00\,\text{kg}} = \underline{0.51\,\text{m/s}^2}\,.$$

Vi burde også sjekke om F_{aks} er stor nok til å sette klossen i gang. Den maksimale statiske friksjonskraften er

$$f_{\text{max}} = \mu_s mg\cos\theta = 0.43 \cdot 1.00\,\text{kg} \cdot 9.81\,\text{m/s}^2 \cdot 0.866 = 3.653\,\text{N}\,,$$

altså mindre enn $F_{\text{aks}} = 3.905$ N, så klossen vil starte å gli.

c. Med $F = 2.00$ N er netto akselererende kraft nedover $F_{\text{aks}} = 2.905\,\text{N}$, slik at friksjonskraften også nå virker oppover. Størrelsen er avhengig av om klossen glir eller ligger i ro. Da F_{aks} nå er mindre enn den maksimale statiske friksjonskraften $f_{\text{max}} = 3.653$ N, vil klossen forbli i ro ($\underline{a = 0}$), summen av krefter er lik null, og $\underline{f = F_{\text{aks}} = 2.91\,\text{N}}$.

Oppgave 3.

a. Vi antar at Hookes lov, $F = kx$, gjelder for fjæra. Newtons andre lov gir da

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

eller

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

med $\omega^2 = k/m$. Ligningen har løsning $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, som gitt i oppgaveteksten. Klossen svinger altså med vinkelfrekvens $\omega = \sqrt{k/m}$.

Amplituden A og fasekonstanten ϕ fastlegger vi ved å bruke de oppgitte initialbetingelsene $x(0) = x_0$ og $v(0) = \dot{x}(0) = v_0$. Vi har

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$

slik at

$$x_0 = A\cos\phi$$

og

$$v_0 = -\omega A \sin\phi$$

Herfra er det flere mulige veier å gå. Vi kan for eksempel dele disse to ligningene med hverandre, som gir

$$\phi = -\arctan\frac{v_0}{x_0\omega}$$

og

$$A = \frac{x_0}{\cos\arctan v_0/x_0\omega}$$

Alternativt kan vi kvadrere de to ligningene og legge dem sammen:

$$1 = \sin^2\phi + \cos^2\phi = \frac{v_0^2}{\omega^2 A^2} + \frac{x_0^2}{A^2}$$

som gir

$$A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2} = x_0\sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2}$$

og deretter

$$\phi = \arccos\frac{x_0}{A} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2}}$$

b. Siden vi ikke har noe demping i systemet, er den totale energien E bevart. (Dvs: Vi har et *konservativt* system.) Da kan vi beregne energien ved et hvilket som helst tidspunkt, for eksempel ved maksimalt utsving, der $x = x_{\max} = A$ og $v = 0$:

$$E = E_p^{\max} = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}k\left(x_0^2 + mv_0^2/k\right) = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2$$

Det endelige svaret her gjenkjenner vi som summen av potensiell og kinetisk energi ved $t = 0$, $E_{p0} + E_{k0}$, hvilket jo også må tilsvare den totale energien.

c. Skriver vi løsningen på formen $x(t) = B\cos\omega t + C\sin\omega t$, har vi

$$\dot{x}(t) = -\omega B\sin\omega t + \omega C\cos\omega t$$

og dermed, ved hjelp av $x(0) = x_0$ og $\dot{x}(0) = v_0$,

$$B = x_0 \quad \text{og} \quad C = v_0/\omega$$

d. Maksimalt utsving:

$$x_{\max} = A = x_0\sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2} = x_0\sqrt{1 + E_{k0}/E_{p0}}$$

Maksimal hastighet:

$$v_{\max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}\left(x_0^2 + mv_0^2/k\right)} = v_0\sqrt{1 + kx_0^2/mv_0^2} = v_0\sqrt{1 + E_{p0}/E_{k0}}$$

Med oppgitte tallverdier:

$$E_{p0} = 0.5 \cdot 10 \cdot 0.010^2 = \frac{1}{2000} \quad , \quad E_{k0} = 0.5 \cdot 0.100 \cdot 0.10^2 = \frac{1}{2000}$$

begge i enheten J, ettersom vi kun har brukt SI–enheter underveis. Følgelig er $x_{\max} = \sqrt{2}x_0 \simeq 1.4$ cm og $v_{\max} = \sqrt{2}v_0 \simeq 14$ cm/s.

Oppgave 4.

Bevegelsesligning for klossen:

$$m\ddot{x} = -kx + mg$$

Her har vi valgt positiv x-retning nedover. Uten tyngdefelt til stede ($g = 0$) er klossens likevektsposisjon $x = 0$. I tyngdefeltet bestemmes den nye likevektsposisjonen Δx ved å sette total kraft lik null, følgelig

$$\begin{aligned} -k\Delta x + mg &= 0 \\ \Delta x &= mg/k \end{aligned}$$

Med ny posisjonsvariabel

$$y = x - \Delta x$$

får vi bevegelsesligningen

$$m\ddot{y} = -k(y + \Delta x) + mg = -ky$$

som betyr at klossen vil svinge harmonisk med vinkelfrekvens $\omega = \sqrt{k/m}$ omkring likevektsposisjonen $y = 0$, dvs $x = \Delta x = mg/k$. Med tallverdiene fra oppgave 1 har vi

$$\Delta x = 0.100 \cdot 9.8/10 = 9.8\,\mathrm{cm}$$