TFY4115 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2013.
Øving 5. Veiledning: 24. september. Innleveringsfrist: 27. september kl 14.

Oppgave 1: Saturn V, trinn 1

Rakett-typen som blant annet sørget for å bringe Apollo 11 fra jorda til månen i juli 1969 kalles Saturn V. I det første av i alt tre rakett-trinn ble 13.2 tonn drivstoff forbrent pr sekund (dvs $dm/dt = -13.2 \cdot 10^3$ kg/s) og blåst ut bakover med en hastighet $|u| = 2.58$ km/s relativt raketten. Etter 2.5 minutter var alt drivstoff i trinn 1 brukt opp. Oppskytingen startet med raketten i ro på bakken, der tyngdens akselerasjon er $g = 9.81$ m/s^2. Total masse før avreise var $3.04 \cdot 10^6$ kg.

a) Bruk "rakettligningen" (som vi utledet i forelesningene)

$$ma = F_{\text{ytre}} + F_{\text{skyv}}$$

til å vise at rakettens hastighet etter en tid t blir

$$v(t) = -u \ln \frac{m_0}{m} - gt.$$

Her er m_0 startmassen, mens $m = m(t)$ er gjenværende masse ved tidspunktet t. Vi har valgt positiv retning oppover, slik at ytre kraft på raketten er $-mg$. Skyvkraften er $u \cdot \beta$, der u er eksosens hastighet relativt raketten og $\beta = dm/dt$ angir forbrent drivstoffmasse pr tidsenhet. Her er både u og β negative størrelser, og vi antar at de begge er konstante, som antydet innledningsvis. Vi antar også at tyngdens akselerasjon g kan regnes som konstant, en antagelse som vi skal komme tilbake til i punkt *e*) nedenfor.

b) Hvor stor må skyvkraften minst være for at raketten i det hele tatt skal ta av fra bakken? Sjekk at dette var tilfelle for Saturn V. Regn ut drivstoffmassen m_d ved avreise, $t = 0$, og rakettens sluttmasse m_f ved tidspunktet t_f, dvs idet alt drivstoff er brukt opp.

c) Vis at rakettens akselerasjon kan skrives som

$$a(t) = \frac{u\beta}{m_0 + \beta t} - g.$$

Bestem akselerasjonen ved $t = 0$. Bestem også akselerasjon og hastighet ved slutten av trinn 1, dvs ved $t = t_f$.

d) Det oppgis at dersom $|x| \ll 1$, er det en god tilnærmelse å erstatte brøken $1/(1 + x)$ med polynomet $1 - x$. (Prøv for eksempel med $x = -0.01$.) Bruk Rottmann til å verifisere at $1/(1 + x) \simeq 1 - x$ når $|x| \ll 1$. Bruk deretter denne opplysningen til å vise at

$$a_{\text{lin}}(t) = a(0) - \frac{u\beta^2}{m_0^2}\, t$$

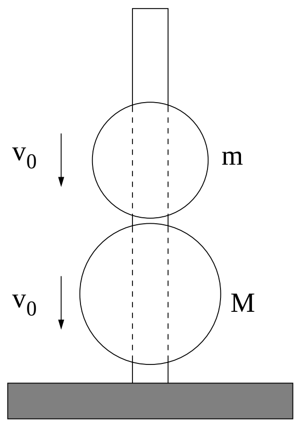
er en god tilnærmelse for $a(t)$ så lenge $t \ll m_0/(-\beta)$. Ta utgangspunkt i MATLAB-programmet rakett.m og modifiser linjene 25 og 48, eller PYTHON-programmet rakett.py og modifiser linjene 36 og 56, slik at du får plottet $a(t)$ og $a_{\text{lin}}(t)$ i samme figur, for $0 < t < t_f$. Anslå på øyemål ved hvilket tidspunkt $a_{\text{lin}}(t)$ begynner å bli en "mindre god" tilnærmelse for $a(t)$. Modifiser videre linje 27 i rakett.m, eller linje 38 i rakett.py, slik at du får plottet $v(t)$ i en annen figur. (For innlevering, lagre figurene i pdf-format og send som vedlegg pr epost til din studass.)

e) (Utfordring!) Hvor høyt, h_f, kommer raketten i løpet av dette første oppskytingstrinnet? Raketten trekkes mot jorda med gravitasjonskraften

$$F_G = \frac{GMm}{r^2},$$

der G er gravitasjonskonstanten, M er jordmassen, m er rakettmassen og r er avstanden mellom raketten og jordas sentrum. Anta at jorda er kuleformet med radius $R = 6.37 \cdot 10^3$ km. Hvis du har regnet riktig, har du kommet fram til at h_f er i underkant av 60 km. Bruk disse verdiene til å anslå hvor stor feil du har gjort underveis i dine regninger ved å bruke den konstante verdien 9.81 m/s^2 for tyngdens akselerasjon.

Oppgave 2: Sprettballer

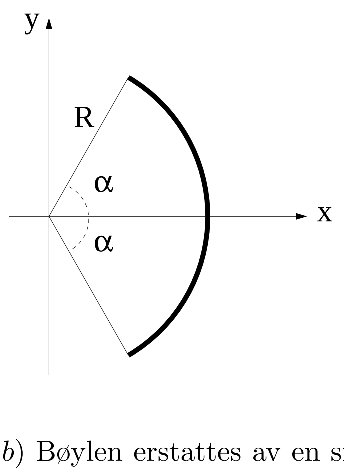


To baller, begge med hull gjennom sentrum, kan gli friksjonsfritt nedover en stang. Den nederste ballen har masse M og den øverste har masse m. Ballene slippes, med null starthastighet, fra en høyde h over bakken. Alle kollisjoner er i denne oppgaven fullstendig *elastiske* og har neglisjerbar varighet.

a) Bestem ballenes hastighet v_0 rett før den nederste ballen støter mot bakken. Hva er den nederste ballens hastighet rett *etter* støtet mot bakken? (Vi antar at støtet mot bakken er fullført før de to ballene kolliderer med hverandre.)

b) Som sagt, umiddelbart etter at nederste ball har fullført støtet mot bakken kolliderer de to ballene med hverandre. Bestem den øverste ballens hastighet v rett etter kollisjonen. Finn også ut hvor høyt, y, den vil sprette. Uttrykk v og y ved h og masseforholdet $\alpha = M/m$. Hvor stor blir y i grensetilfellet $M \gg m$, samt spesialtilfellet $M = m$? (Dvs: $\alpha \gg 1$ og $\alpha = 1$.)

Oppgave 3: Tyngdepunkt



a) En tynn, jevntykk bøyle er en del av en sirkel og har sektorvinkel 2α, som vist i figuren. Sirkelradien er R. Vis at tyngdepunktet er

$$X = R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Hva blir resultatet for $\alpha = \pi$ og $\alpha \to 0$? Er svarene rimelige?

b) Bøylen erstattes av en sirkelsektor (dvs ei tynn, jevntykk skive) med samme åpningsvinkel 2α og radius R. Vis at tyngdepunktet er

$$X = \frac{2}{3}R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Hva blir resultatet for $\alpha = \pi$ og $\alpha \to 0$? Er svarene rimelige?