FY1005/TFY4165 Termisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Våren 2013.

Løsningsforslag til øving 1

Oppgave 1

a) Vi deriverer på begge sider og finner

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial p}\right)_T &= \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial T}\right) = \frac{1}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial p\partial T} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial V}{\partial p}\frac{\partial V}{\partial T}\\ -\left(\frac{\partial\kappa_T}{\partial T}\right)_p &= \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}\right) = \frac{1}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial T\partial p} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial p}\end{aligned}$$

Følgelig er

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial\kappa_T}{\partial T}\right)_p.$$

b) Diameteren øker ved oppvarming fra minus ti til ca pluss tjue grader, og den lineære utvidelseskoeffisienten avgjør med hvor mye:

$$d(20) = d(-10)\cdot(1 + 0.000013\cdot 30) = 10.004\,\text{cm}.$$

Ikke all verden ..

Oppgave 2

a) Trykket i 1 mol ideell gass ved 20°C og volum 24.0 L:

$$p = \frac{RT}{V} = \frac{8.314\cdot 293}{24.0\cdot 10^{-3}}\,\text{Pa} = 1.015\cdot 10^5\,\text{Pa} = 1\,\text{atm}.$$

Ved samme temperatur men med volum 0.24 L blir trykket

$$p = \frac{RT}{V} = \frac{8.314\cdot 293}{0.24\cdot 10^{-3}}\,\text{Pa} = 1.015\cdot 10^7\,\text{Pa} = 100\,\text{atm}.$$

b) Med van der Waals tilstandsligning ved 20°C og 1 mol luft i et volum 24.0 L:

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} = \frac{8.314\cdot 293}{(24.0-0.0367)\cdot 10^{-3}}\,\text{Pa} - \frac{1.368\cdot 10^{5-6}}{(24.0\cdot 10^{-3})^2}\,\text{Pa} = 1.014\cdot 10^5\,\text{Pa} = 1\,\text{atm}.$$

Med volum 0.24 L finner vi tilsvarende

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} = \frac{8.314\cdot 293}{(0.24-0.0367)\cdot 10^{-3}}\,\text{Pa} - \frac{1.368\cdot 10^{5-6}}{(0.24\cdot 10^{-3})^2}\,\text{Pa} = 0.961\cdot 10^7\,\text{Pa} = 96\,\text{atm}.$$

(Sammenheng mellom noen ulike enheter for trykk: 1 atm = $1.013\cdot 10^5$ Pa = 760 mmHg.)

Oppgave 3

Multiplikasjon med V^2 gir ligningen

$$pV^3 - N(pb + kT)V^2 + aN^2V - abN^3 = 0.$$

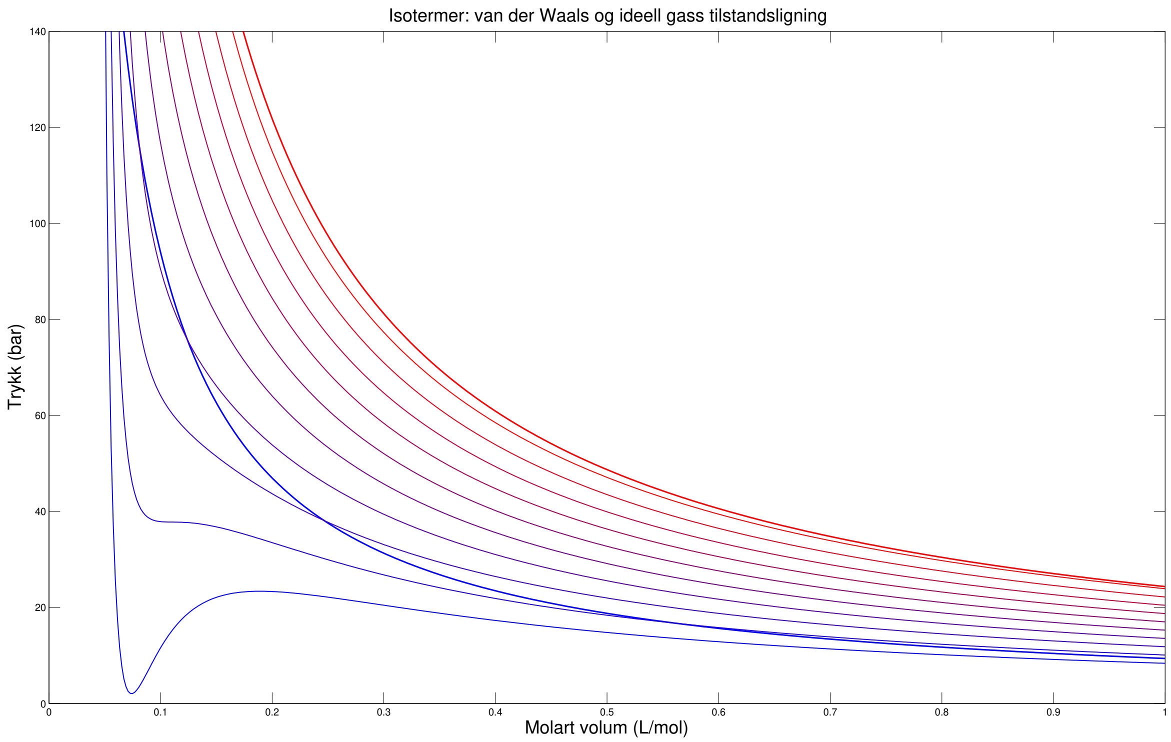
Oppgave 4

Med utgangspunkt i eksemplet gitt i oppgaveteksten er veien ikke lang til følgende kode i Matlab/Octave:

```
%%FY1005/TFY4165 vaaren 2012, Oving 1, Oppgave 4, del 1
%%
%%R = gasskonstanten = 8.314 J/mol*K
R=8.314;
%%T = absolutt temperatur (K)
Tmin=113;
Tmax=293;
DeltaT=20;
%%T = vektor med verdier mellom Tmin og Tmax, intervall DeltaT
T=Tmin:DeltaT:Tmax;
%%V = molart volum (L/mol)
Vmin=0.05;
Vmax=1.0;
NV=500;
%%V = vektor med verdier mellom Vmin og Vmax, i alt NV verdier
V=linspace(Vmin,Vmax,NV);
%%Verdier for a og b for luft: 1.368  0.0367
%%Enheter: [a] = bar*(L/mol)^2 og [b] = L/mol
a=1.368;
b=0.0367;
%%length(T) = antall elementer i vektoren T
%%Bruker for-loekke fra i=1 til i=length(T) til aa regne ut van der Waals
%%isotermer p(V) for temperaturer T(1), T(2), ... , T(length(T))
for i = 1:length(T);
    %%p = trykket. Faktoren 1/100 skyldes at V og b har enhet L og at
    %%p oenskes i enheten bar (1 bar = 10^5 Pa)
    p = (R*T(i)./(V-b))/100 - a./(V.*V);
    fig = plot(V,p);
    %%p(V) for laveste valgte temperatur T(1): blaa kurve
    %%p(V) for hoeyeste valgte temperatur T(length(T)): roed kurve
    %%Mellomliggende kurver: gradvis mellom blaa og roed
    %%Tynne kurver, LineWidth = 1.0, for van der Waals tilstandsligning
    red=(i-1)/(length(T)-1);
    blue=1-red;
    green = 0.0;
    set(fig,'Color',[red green blue],'LineWidth',1.0);
    if i == 1;
        title('Isotermer: van der Waals og ideell gass tilstandsligning','fontsize',18);
        xlabel('Molart volum (L/mol)','fontsize',18);
        ylabel('Trykk (bar)','fontsize',18);
        axis([0 Vmax 0 140]);
        %%"hold on" soerger for at paafoelgende kurver tegnes i samme figur
        hold on;
        %%Vi plotter p(V) for ideell gass for laveste
        %%verdi av temperaturen, dvs for T(1)
        pideell = R*T(i)./(100*V);
```

```
        fig = plot(V,pideell);
        %%Tykk blaa kurve for p(V) ved T(1), ideell gass
        set(fig,'LineWidth',1.5,'Color',[0 0 1]);
    end;
    if i == length(T);
        %%Vi plotter p(V) for ideell gass for hoeyeste
        %%verdi av temperaturen, dvs for T(length(T))
        pideell = R*T(i)./(100*V);
        fig = plot(V,pideell);
        %%Tykk roed kurve for p(V) ved T(length(T)), ideell gass
        set(fig,'LineWidth',1.5,'Color',[1 0 0]);
    end;
end;
hold off;
```

Med denne koden får vi en figur som ser slik ut:



Figur 1: Isotermer for van der Waals tilstandsligning (tynne kurver) og for ideell gass (tykke kurver). Temperaturer, van der Waals: 113, 133, 153, 173, 193, 213, 233, 253, 273, 293 K. Temperaturer, ideell gass: 113, 293 K.

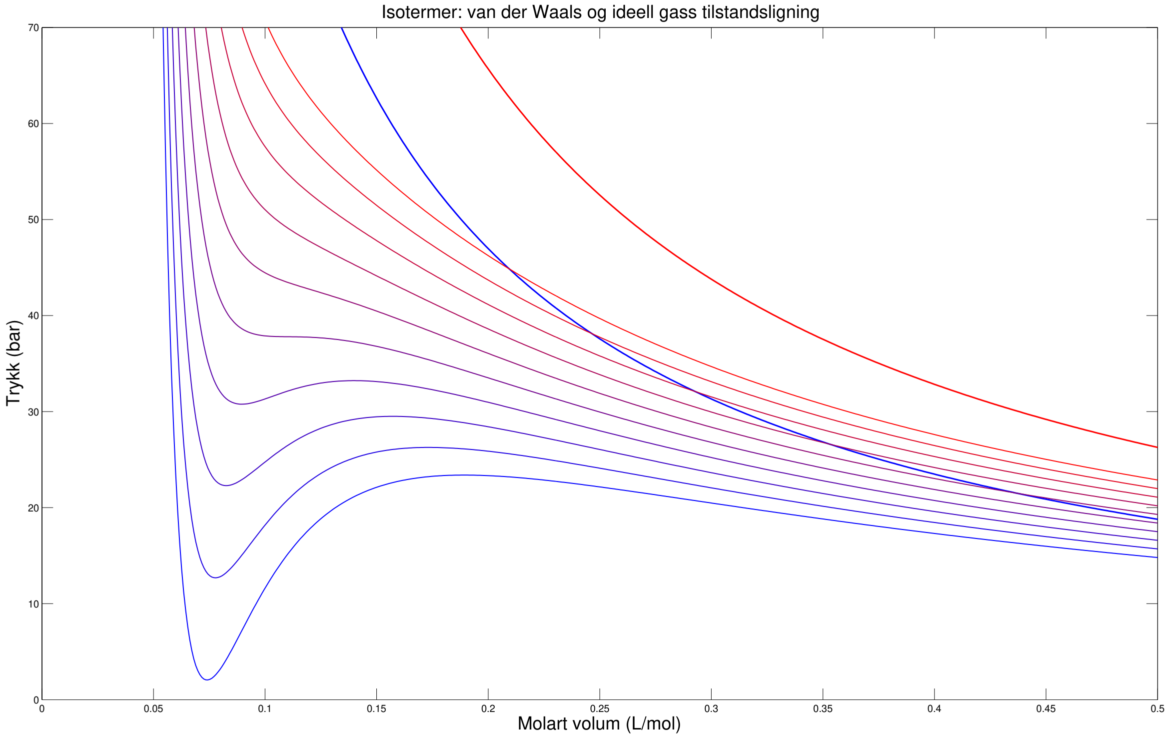
Kommentarer:
På **linjene 27 og 46** bruker vi elementvise operasjoner, som er innebygd i Matlab. Det gjøres ved å skrive et punktum foran den operasjonen vi ønsker. Slik kan vi behandle en hel vektor i ett og samme uttrykk, og dette kjører **mye** raskere enn en for-løkke.
På **linjene 33-36** gis de ulike isotermene farger fra blått til rødt.
På **linjene 38-43** sørger vi for å lage tittel og aksetekst, definere aksene, samt passe på å bruke `hold on` dersom det er det første plottet.
I oppgave 2a fant vi at antagelsen om ideell gass gav et trykk på 101,5 bar ved 293 K og et molart volum 0.24 l. I oppgave 2b fant vi at med van der Waals tilstandsligning får vi et trykk på 96,1 bar ved tilsvarende temperatur og molart volum. Vi ser fra figuren ovenfor at kurvene ved 293 K er konsistente med disse verdiene.

For del to av oppgaven kan vi bruke samme program, bortsett fra at tallverdier må endres for Tmin, Tmax, DeltaT, Vmax, samt øvre grense for trykket i figuren (70 bar istedenfor 140 bar):

```
%%FY1005/TFY4165, Oving 1, Oppgave 4, del 2
%%
%%R = gasskonstanten = 8.314 J/mol*K
R=8.314;
%%T = absolutt temperatur (K)
Tmin=113;
Tmax=158;
DeltaT=5;
%%T = vektor med verdier mellom Tmin og Tmax, intervall DeltaT
T=Tmin:DeltaT:Tmax;
%%V = molart volum (L/mol)
Vmin=0.05;
Vmax=0.5;
NV=500;
%%V = vektor med verdier mellom Vmin og Vmax, i alt NV verdier
V=linspace(Vmin,Vmax,NV);
%%Verdier for a og b for luft: 1.368  0.0367
%%Enheter: [a] = bar*(L/mol)^2 og [b] = L/mol
a=1.368;
b=0.0367;
%%length(T) = antall elementer i vektoren T
%%Bruker for-loekke fra i=1 til i=length(T) til aa regne ut van der Waals
%%isotermer p(V) for temperaturer T(1), T(2), ... , T(length(T))
figure;
for i = 1:length(T);
    %%p = trykket. Faktoren 1/100 skyldes at V og b har enhet L og at
    %%p oenskes i enheten bar (1 bar = 10^5 Pa)
    p = (R*T(i)./(V-b))/100 - a./(V.*V);
    fig = plot(V,p);
    %%p(V) for laveste valgte temperatur T(1): blaa kurve
    %%p(V) for hoeyeste valgte temperatur T(length(T)): roed kurve
    %%Mellomliggende kurver: gradvis mellom blaa og roed
    %%Tynne kurver, LineWidth = 1.0, for van der Waals tilstandsligning
    red=(i-1)/(length(T)-1);
    blue=1-red;
```

```
    green = 0.0;
    set(fig,'Color',[red green blue],'LineWidth',1.0);
    title('Isotermer: van der Waals og ideell gass tilstandsligning','fontsize',18);
    xlabel('Molart volum (L/mol)','fontsize',18);
    ylabel('Trykk (bar)','fontsize',18);
    axis([0 Vmax 0 70]);
    if i == 1;
        %%"hold on" soerger for at paafoelgende kurver tegnes i samme figur
        hold on;
        %%Vi plotter p(V) for ideell gass for laveste
        %%verdi av temperaturen, dvs for T(1)
        pideell = R*T(i)./(100*V);
        fig = plot(V,pideell);
        %%Tykk blaa kurve for p(V) ved T(1), ideell gass
        set(fig,'LineWidth',1.5,'Color',[0 0 1]);
    end;
    if i == length(T);
        %%Vi plotter p(V) for ideell gass for hoeyeste
        %%verdi av temperaturen, dvs for T(length(T))
        pideell = R*T(i)./(100*V);
        fig = plot(V,pideell);
        %%Tykk roed kurve for p(V) ved T(length(T)), ideell gass
        set(fig,'LineWidth',1.5,'Color',[1 0 0]);
    end;
end;
hold off;
```

Resulterende figur med isotermer blir som i Figur 2 (nedenfor). Som nevnt i oppgaveteksten, legg merke til overgangen fra monotont avtagende kurver til ikke-monotone kurver for $p(V)$ når temperaturen senkes under ca 133 K (kurve nr 5). Vi kommer tilbake til hva dette innebærer.



Figur 2: Isotermer for van der Waals tilstandsligning (tynne kurver) og for ideell gass (tykke kurver). Temperaturer, van der Waals: 113, 118, 123, 128, 133, 138, 143, 148, 153, 158 K. Temperaturer, ideell gass: 113, 158 K.