

TFY4115 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til øving 8.

Oppgave 1.

a) Hvis du vet, eller finner ut, at luft har massetetthet ca $1.2 - 1.3 \text{ kg/m}^3$, er det bare å gange med volumet på ca $10 \text{ m}^2 \times 2.4 \text{ m}$, dvs ca 24 m^3 . Dette gir en masse omkring 30 kg. Riktig svar: C.

Med ideell gass: $pV = Nk_B T$ gir antall molekyler pr volumenhet,

$$\rho = N/V = p/k_B T \simeq 10^5 / (1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300) \simeq 2.4 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}.$$

Vi trenger midlere masse pr molekyl. Med ca 20 prosent oksygen og resten nitrogen blir dette ca 29 g/mol , som er ca $4.8 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$ pr molekyl. Dermed

$$\mu = \langle m \rangle \rho \simeq 1.2 \text{ kg/m}^3.$$

b) For å ha en synlig spritsøyle bør vel diameteren være f.eks ca 0.4 mm . En høydeendring på 1 cm , som gir en temperaturendring på 1 grad , krever da en volumendring

$$\Delta V = A \cdot h = \pi r^2 \cdot h \simeq 0.4\pi \text{ mm}^3.$$

Totalt volum sprit må da være

$$V = \frac{\Delta V}{\beta \Delta T} = 400\pi \text{ mm}^3 \simeq 1.3 \text{ mL}.$$

Riktig svar: A.

c) Trykket i 1 mol ideell gass ved 20°C og volum 24.0 L :

$$p = \frac{RT}{V} = \frac{8.314 \cdot 293}{24.0 \cdot 10^{-3}} \text{ Pa} = 1.015 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ atm}.$$

Riktig svar: A.

Ved samme temperatur men med volum 0.24 L blir trykket i en ideell gass

$$p = \frac{RT}{V} = \frac{8.314 \cdot 293}{0.24 \cdot 10^{-3}} \text{ Pa} = 1.015 \cdot 10^7 \text{ Pa} = 100 \text{ atm}.$$

(Selvsagt! Hundre ganger større dersom volumet reduseres med en faktor hundre.)

d) Med van der Waals tilstandsligning ved 20°C og 1 mol luft i et volum 24.0 L :

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} = \frac{8.314 \cdot 293}{(24 - 0.0367) \cdot 10^{-3}} \text{ Pa} - \frac{0.1368}{(24.0 \cdot 10^{-3})^2} \text{ Pa} = 1.014 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ atm}.$$

Med volum 0.24 L finner vi tilsvarende

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} = \frac{8.314 \cdot 293}{(0.24 - 0.0367) \cdot 10^{-3}} \text{ Pa} - \frac{0.1368}{(0.24 \cdot 10^{-3})^2} \text{ Pa} = 0.961 \cdot 10^7 \text{ Pa} = 95 \text{ atm}.$$

(Sammenheng mellom noen ulike enheter for trykk: $1 \text{ atm} = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg}$.)

Oppgave 2

Multiplikasjon med V^2 gir ligningen

$$pV^3 - N(pb + kT)V^2 + aN^2V - abN^3 = 0.$$

Oppgave 3. Atmosfæren på Mars

a) Vi ser på en luftsøyلة med tverrsnitt A og høyde dz , og dermed masse $dM = \mu A dz$ når massen pr volumenheter er μ . Vekten av denne luftsøylen er $dM g = \mu A dz g$, som må tilsvare forskjellen dF i kraften (nedover) på luftsøylenes nedre og øvre flate. Siden trykket pr definisjon er kraft pr flateenhet, må $dp = -dF/A = -\mu dz g$ bli endringen i trykket hvis vi forflytter oss fra høyde z til høyde $z + dz$. Av dette følger det oppgitte uttrykket $dp/dz = -\mu g$.

b) Hvis m er gassens masse pr mol, er nm massen til n mol gass. Og hvis n mol gass okkuperer volumet V , blir da masse pr volumenheter $\mu = nm/V$. Dermed: $pV = nRT \Rightarrow p/RT = n/V = \mu/m$, i samsvar med oppgitt uttrykk for μ .

c) Fra a) har vi $dp/dz = -\mu g$, og med resultatet i b) betyr det at $dp/p = -mgdz/RT$. Integrasjon på begge sider, på venstre side fra $p(0) = p_0$ til $p(z)$ og på høyre side fra $z = 0$ til z , gir $\ln[p(z)/p_0] = -\int_0^z mg(z')dz'/RT(z')$, som etter eksponentiering på begge sider gir det oppgitte uttrykket for $p(z)$ med oppgitt skalahøyde $H(z)$.

d) Innsetting av oppgitte tallverdier for R , T , m og g gir $H = 12.1$ km. Integralet i c) blir da lik 1, slik at $p(H)/p_0 = 1/e$.

e) og f) Se `martian_atmosphere.m`. Figuren nedenfor viser at trykkprofilen blir ganske riktig ved å bruke konstant temperatur 234 K, med økende feil ved store høyder.

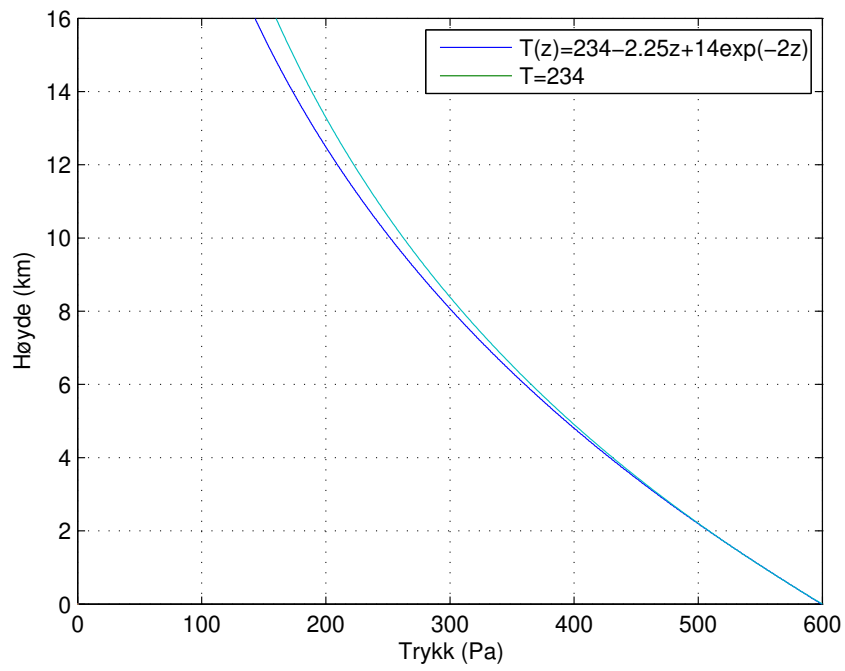
Merknad: Numerisk løsning av integralet

$$\int_0^z \frac{dz'}{T(z')}$$

med Simpsons metode fordrer at intervallet fra 0 til z deles inn i et like antall intervaller, dvs med et odde antall diskretiserte høydeverdier, endepunktene 0 og z inkludert. Dette skyldes at metoden er basert på å trekke parabler mellom nest nærmeste nabo høydeverdier. Denne begrensningen har vi ikke med trapesmetoden, der rette linjer trekkes mellom nærmeste nabo høydeverdier.

I programmet `martian_atmosphere.m` brukes Simpsons metode for å bestemme annenhver verdi for $p(z)$, dvs for de høydeverdiene som tilsvarer at antall intervaller er et partall. For de resterende høydeverdiene brukes trapesmetoden. Det ville selvsagt ha vært enklere å bruke trapesmetoden for alle verdier av z .

Merk at de to første høydene, $z = 0$ og $z = h$, må behandles separat, ettersom iterasjonsprosessen først kan startes med to verdier på plass, en for iterasjon med trapesmetoden og en for iterasjon med Simpsons metode.



Figur 1: Trykk som funksjon av høyde over bakken på planeten Mars, beregnet med utgangspunkt i en realistisk temperaturprofil og med bruk av konstant temperatur.