Størrelser og enheter [YF 1]

Eks:

dekadisk forstavelse (k = kilo = 10^3)

Lengde ; $\ell = 42.2$ km

fysisk størrelse — symbol — tallverdi — SI-enhet

(her: 3 gjeldende siffer

Notasjon: $[\ell] = m$

"SI-enheten til lengde er meter"

Grunnenheter i SI-systemet:

Lengde	$[\ell] =$	m
Masse	$[m] =$	kg
Tid	$[t] =$	s
Strømstyrke	$[I] =$	A
Temperatur	$[T] =$	K
Stoffmengde	$[n] =$	mol
Lysstyrke	$[I] =$	cd

Sammensatte enheter:

Hastighet $[v] = m/s$

Akselerasjon $[a] = m/s^2$

Impuls (bevegelsesmengde) $[p] = kg\ m/s$

osv.

Avledete enheter (med egne symboler):

Kraft $[F] = kg\ m/s^2 = N$

Energi $[W] = N\ m = J$

Effekt $[P] = J/s = W$

Ladning $[Q] = A\ s = C$

osv.

Se f.eks wikipedia.no

Se også (f. eks)

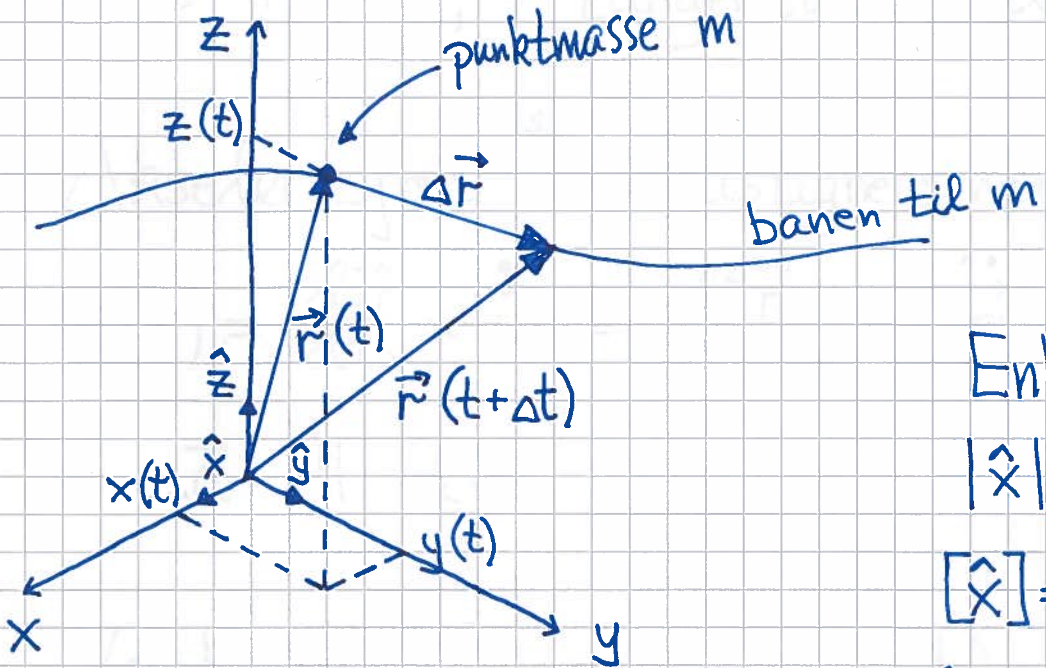
www.nature.com/articles/nphys3612.pdf

om redefinisjon av kg, A, K og mol, muligens vedtatt allerede 16.11.2018!

Se også «1001 Gram», med Ane Dahl Torp !!

MEKANIKK [YF 2-11, 14 ; LL 1-7, 9]

Kinematikk [YF 2, 3 ; LL 1]



Enhetsvektorer:

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$$

$$[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1$$

(dvs dimensjonsløse)

$$\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1 \ ; \quad \hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{y}\cdot\hat{z} = \ldots = 0$$

Posisjon (til m, ved tid t):

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} + z(t)\,\hat{z}$$

Forflytning (i løpet av Δt):

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

Hastighet $\stackrel{\text{def}}{=}$ forflytning pr tidsenhet

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$\Rightarrow$ $\vec{v} \parallel \Delta \vec{r}$, tangentiell til banen

Akselerasjon $\stackrel{\text{def}}{=}$ hastighetsendring pr tidsenhet

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

$\Rightarrow$ $\vec{a} \parallel d\vec{v}$

Vektorrelasjonene må gjelde komponentvis:

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$$

med $v_x = dx/dt = \dot{x}$ osv

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$$

med $a_x = dv_x/dt = d^2x/dt^2$ osv

<u>Derivasjon</u> gir $\vec{v}$ fra $\vec{r}$ og $\vec{a}$ fra $\vec{v}$

$\Rightarrow$ <u>Integrasjon</u> gir $\vec{r}$ fra $\vec{v}$ og $\vec{v}$ fra $\vec{a}$:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v}\,dt$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t)\,dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a}\,dt$$

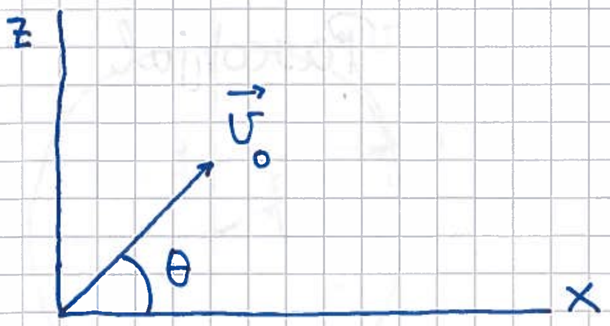
$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t)\,dt}$$

Dersom $\vec{a}$ er konstant :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t \quad ; \quad \vec{v}(0) = \vec{v}_0$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{a}\,t^2 \quad ; \quad \vec{r}(0) = \vec{r}_0$$

Eks: Kast i tyngdefeltet



$\vec{a} = -g\hat{z}$

$\vec{r}(0) = 0 \,, \quad \vec{v}(0) = \vec{v}_0$

Finn $\vec{r}(t)$ og banen $z(x)$

Løsn:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t = \vec{v}_0 - gt\hat{z}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2}gt^2\hat{z}$$

$$\Rightarrow x(t) = v_0 t\cos\theta \,, \quad z(t) = v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$$

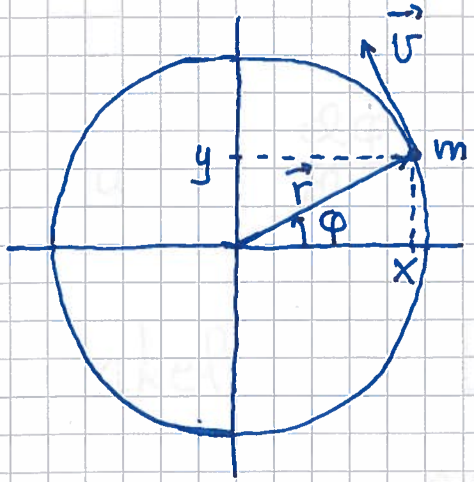
Banen:

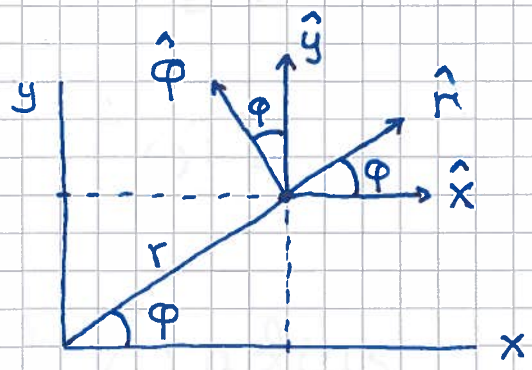
$$t = \frac{x}{v_0\cos\theta}$$

$$\Rightarrow z(x) = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta}$$

Parabel (som observert)

Sirkelbevegelse [YF 3.4 ; LL 1.7, 1.8]





Polarkoordinater :

r = avstand fra origo

φ = vinkel mellom $\hat{x}$ og $\hat{r}$, positiv mot klokka

$x = r\cos\varphi \,, \quad y = r\sin\varphi$

$\varphi = \arctan(y/x) \,, \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\vec{r} = \hat{x}\, r\cos\varphi + \hat{y}\, r\sin\varphi = r\,\hat{r}$$

$$\hat{r} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi$$

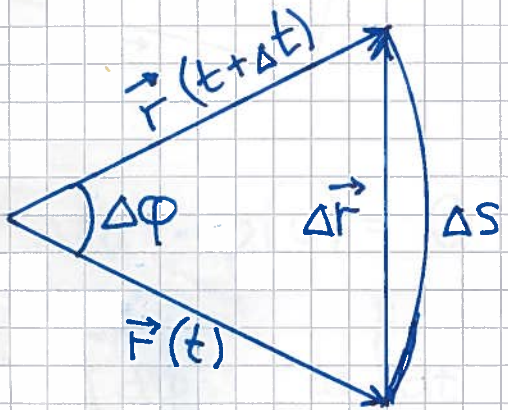
$$\hat{\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi$$

Vinkelhastighet $\stackrel{\text{def}}{=}$ omløpt vinkel pr tidsenhet

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad ; \quad [\omega] = s^{-1}$$

Vinkel $\stackrel{\text{def}}{=}$ buelengde / radius

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r} \quad ; \quad [\varphi] = 1 \quad \text{(rad)}$$



Når $\Delta t \to 0$:

$\Delta\varphi \to 0$

$\Delta r = |\Delta\vec{r}| \longrightarrow \Delta s = r\,\Delta\varphi$

$\Delta\vec{r} \perp \vec{r}$

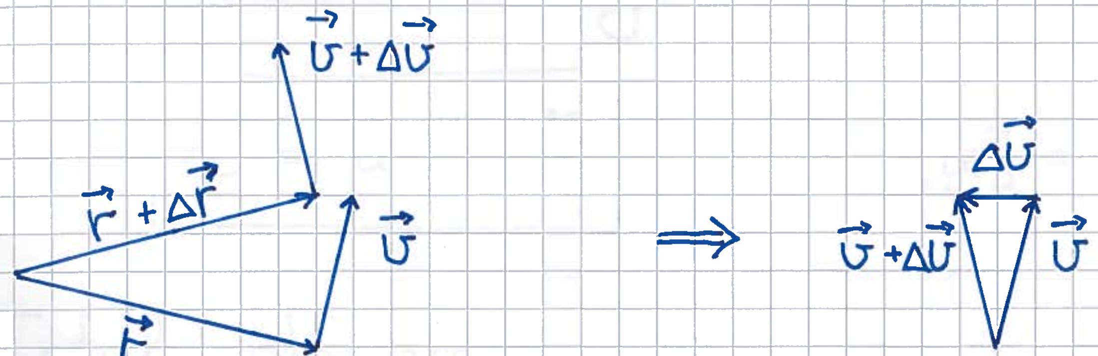
$$\Rightarrow \quad v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r\,\Delta\varphi}{\Delta t} = r\,\frac{d\varphi}{dt} = r\omega$$

$$\vec{v} \parallel \Delta\vec{r} \quad \text{og} \quad \Delta\vec{r} \perp \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \perp \vec{r}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = v\,\hat{\varphi} = r\omega\,\hat{\varphi}$$

Akselerasjon ved sirkelbevegelse:

Anta uniform sirkelbevegelse, dvs konstant ω og v. Ser da at $\Delta\vec{v}$, og dermed $\vec{a}$, peker inn mot sentrum:



Anta $\varphi(0) = 0$

$$\Rightarrow \int_0^{\varphi} d\varphi = \omega \int_0^t dt \quad \Rightarrow \varphi(t) = \omega t$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \hat{x}\, r \cos \omega t + \hat{y}\, r \sin \omega t$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = -\hat{x}\, \omega r \sin \omega t + \hat{y}\, \omega r \cos \omega t$$

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = -\hat{x}\, \omega^2 r \cos \omega t - \hat{y}\, \omega^2 r \sin \omega t$$
$$= -\omega^2 \vec{r}(t)$$

som kalles sentripetalakselerasjonen

$$\boxed{\vec{a}_\perp = -\omega^2 \vec{r}}$$

Dersom ω og v også endrer seg,
har vi <u>baneakselerasjon</u>;

$$\boxed{a_{\parallel} = \dot{v} = r\dot{\omega}}$$

og <u>vinkelakselerasjon</u>

$$\boxed{\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}} \qquad [\alpha] = s^{-2}$$

<u>Total</u> akselerasjon blir

$$\vec{a} = \vec{a}_{\perp} + \vec{a}_{\parallel} = -\omega^2 r\,\hat{r} + \dot{\omega} r\,\hat{\varphi}$$

$$\omega = v/r \Rightarrow \vec{a}_{\perp} = -\frac{v^2}{r}\hat{r}$$

Periode = tid pr omløp : $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$

Frekvens = antall omløp pr tidsenhet : $f = \frac{1}{T}$

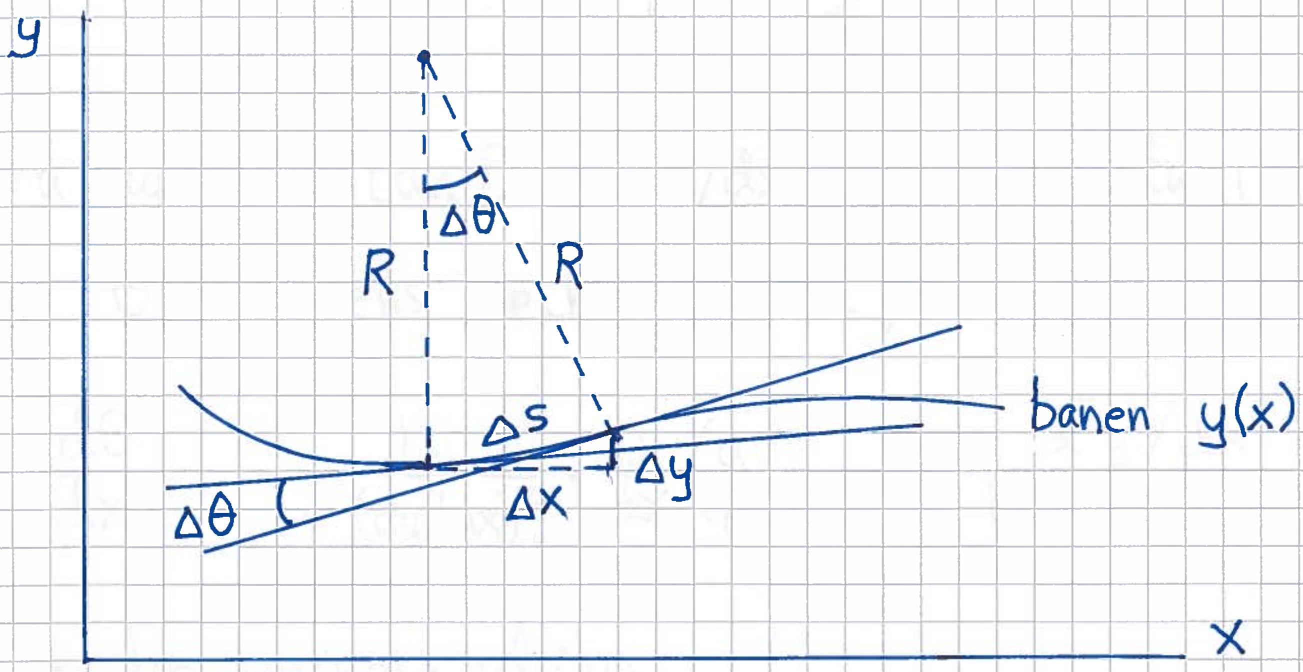
$$\Longrightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$[T] = s$; $[f] = s^{-1} = Hz$ (hertz)

$[\omega] = s^{-1}$

Krumlinjet bevegelse

(Jf. lab og humpete veier)



$a_\perp = v^2/R$

R = radius i "tenkt" sirkel som best tangerer banen y(x) = krumningsradien

Små Δs og $\Delta\theta$ $\Rightarrow$ $\Delta s \to ds$, $\Delta\theta \to d\theta$

Vinkeldef: $d\theta = ds/R$ $\Rightarrow$ $R = ds/d\theta$

Pythagoras: $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$

$$\Rightarrow \quad ds = dx \cdot \sqrt{1 + (dy/dx)^2}$$

Kjerneregel: $\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{dx}{ds}$

$$= \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}}$$

Fra figur: $\tan\theta = dy/dx \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)$

(der θ = banens helningsvinkel)

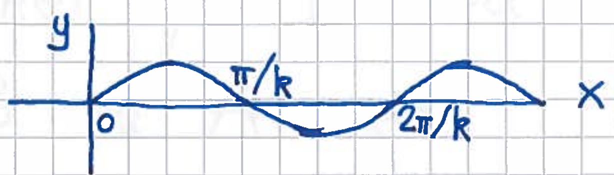
$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{1+(dy/dx)^2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y/dx^2}{1 + (dy/dx)^2}$$

Gir krumningsradius

$$R = \frac{\left[1 + (dy/dx)^2\right]^{3/2}}{\left|d^2y/dx^2\right|}$$

(der R velges positiv)

Eks: $y(x) = y_0 \sin kx$



$y'(x) = y_0 k \cos kx, \quad y''(x) = -y_0 k^2 \sin kx$

$$\Rightarrow R = \left[1 + y_0^2 k^2 \cos^2 kx\right]^{3/2} \Big/ \left|y_0 k^2 \sin kx\right|$$

dvs $R \to \infty$ for $kx = n\pi$

$\Rightarrow \kappa = 1/R$ = "krumningen" $= 0$ for $kx = n\pi$

Newtons lover [YF 4, 5 ; LL 2, 3]

$m, \vec{v}, \vec{a}$ = legemets masse, hastighet, akselerasjon

$\vec{F}$ = netto ytre kraft på legemet

N1: $\boxed{\vec{F} = 0 \iff \vec{v} = \text{konstant}}$

N2: $\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$

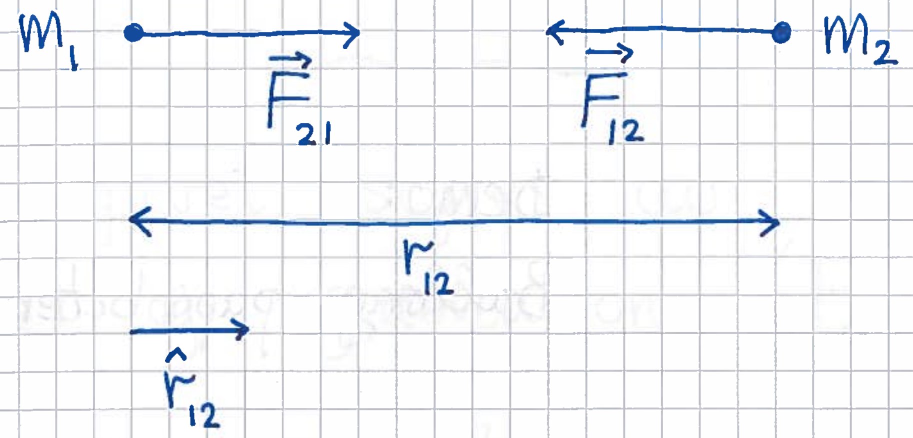
N3: $\boxed{\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}}$

Dvs: Krefter er <u>vekselvirkning</u> mellom legemer. Dersom A virker på B med kraft $\vec{F}_{AB}$, virker B på A med kraft $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

$$[F] = kg \cdot \frac{m}{s^2} = N \quad \text{(newton)}$$

Fundamentale krefter i naturen [YF 5.5; LL 2.1]

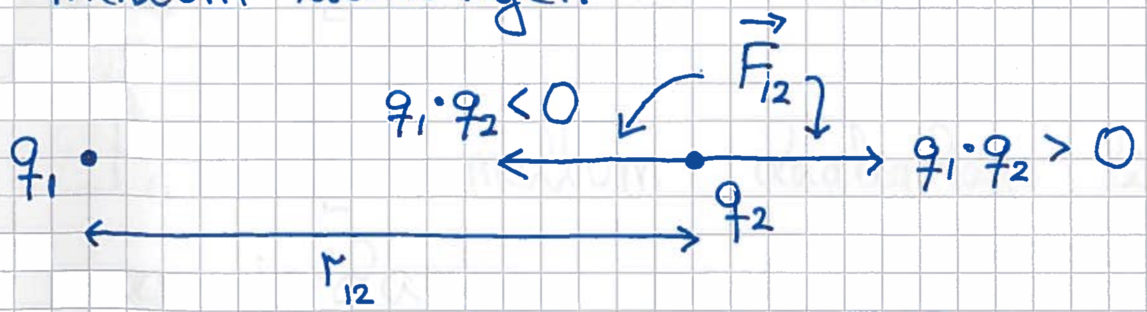
- Gravitasjon. Svak tiltrekning mellom masser.



Newtons gravitasjonslov: $\vec{F}_{21} = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$

Gravitasjonskonstanten: $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$

- Elektromagnetisk v.v. Tiltrekning/frastøtning mellom ladninger.



Coulombs lov: $\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$

$[q] = C = A \cdot s$ (coulomb)

Vakuumpermittiviteten: $\varepsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$

- Kjernekrefter, svake og sterke. Svært kort rekkevidde. Gir hhv radioaktivitet og stabile atomkjerner.

Dagliglivet styres av coulombkrefter (F_E) og gravitasjon (F_G).

Protonet : $m_p \approx 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg , $q = e \approx 1.6 \cdot 10^{-19}$ C

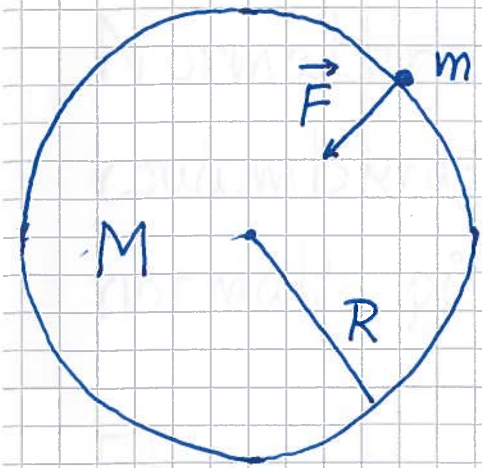
Elektronet : $m_e \approx 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg , $q = -e$

$\Rightarrow$ $F_E \gg F_G$ mellom elementærpartikler, atomer, molekyler og "dagligdagse" legemer

$F_G \gg F_E$ mellom himmellegemer

$F_G \gg F_E$ mellom dagligdags legeme og jorda

Tyngde [YF 4.4 ; LL 2.5]



Tyngden til m = gravitasjonskraften på m fra M :

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}$$

Jorda : $M \approx 6 \cdot 10^{24}$ kg , $R \approx 6370$ km

$\Rightarrow$ $g = GM/R^2 \approx 9.81 \, \frac{m}{s^2}$ = tyngdens akselerasjon,

når m er nær jordas overflate

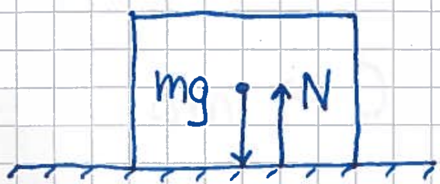
Fritt fall hvis tyngdekraften mg er eneste kraft på m :

N2 : $mg = ma \Rightarrow \underline{a = g}$

Kontaktkrefter [YF 4.1 ; LL 3]

Normalkraft : N = netto frastøtende coulombkraft mellom to legemer i kontakt, normalt på kontaktflaten

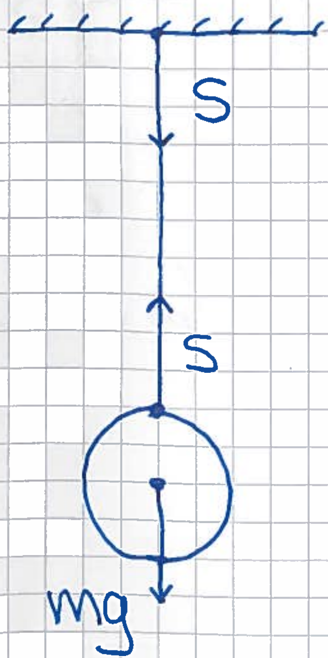
Eks:



Hvis kloss i ro :

$N = mg$ (pga N1)

Snorkraft : S = netto tiltrekkende coulombkraft mellom snora og legemet som henger i snora

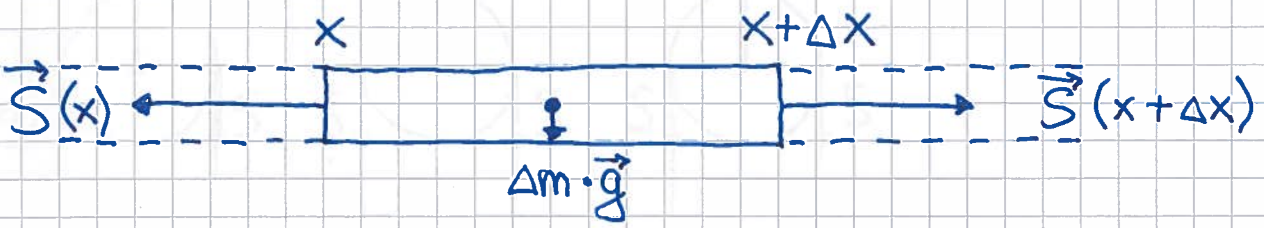


Hvis kule i ro :

$S = mg$ (pga N1)

[Hva er "N3-motkreftene" til mg, N og S ?]

Lett og stram snor blir rett, med konstant snordrag S :

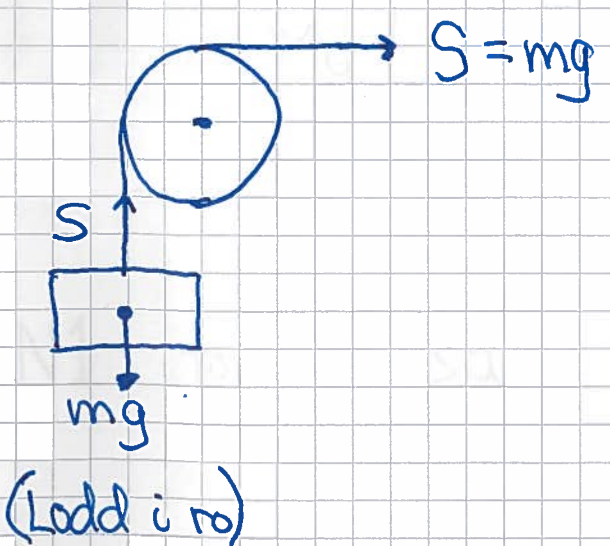


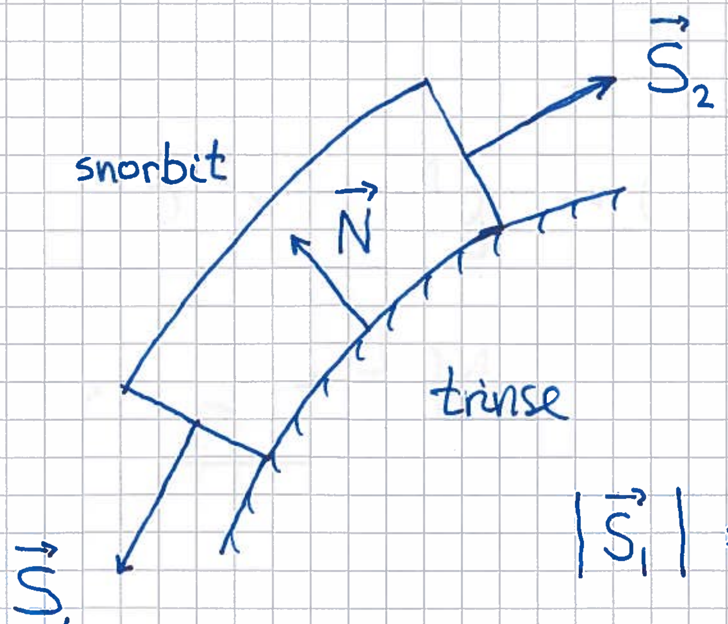
N2: $\vec{S}(x) + \vec{S}(x+\Delta x) + \Delta m \cdot \vec{g} = \Delta m \cdot \vec{a}$

Med $\Delta m \approx 0$ er $\vec{S}(x+\Delta x) = -\vec{S}(x)$

$\Rightarrow$ $S = |\vec{S}|$ konstant langs snora

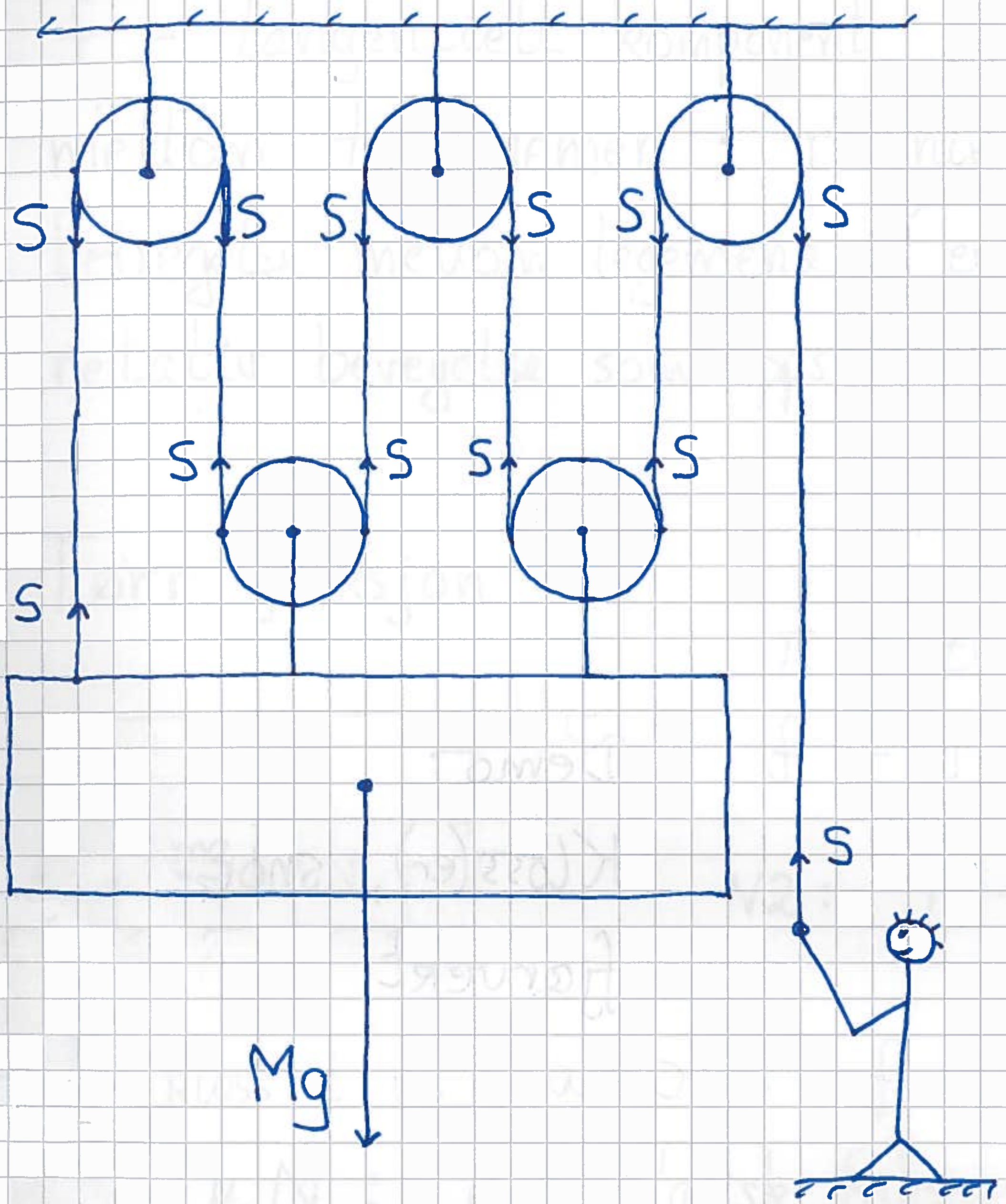
Friksjonsfri <u>trinse</u> endrer retning på $\vec{S}$:





$|\vec{S}_1| = |\vec{S}_2|$

Talje:



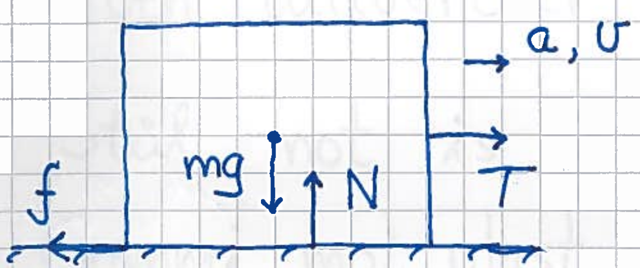
N1 for kassa: $5S - Mg = 0$

$$\Rightarrow \underline{S = \frac{1}{5}Mg}$$

Friksjonskrefter : [YF 5.3 ; LL 3.1]

f = tangentiell komponent av kontaktkraft mellom to legemer ; retning mot relativ bevegelse mellom legemene (evt: mot relativ bevegelse som oppstår uten friksjon)

Tørr friksjon



T = trekk-kraft

f = friksjonskraft

N2 : $T - f = ma$

Hvis kloss i ro $(a = 0)$: $f = T$;

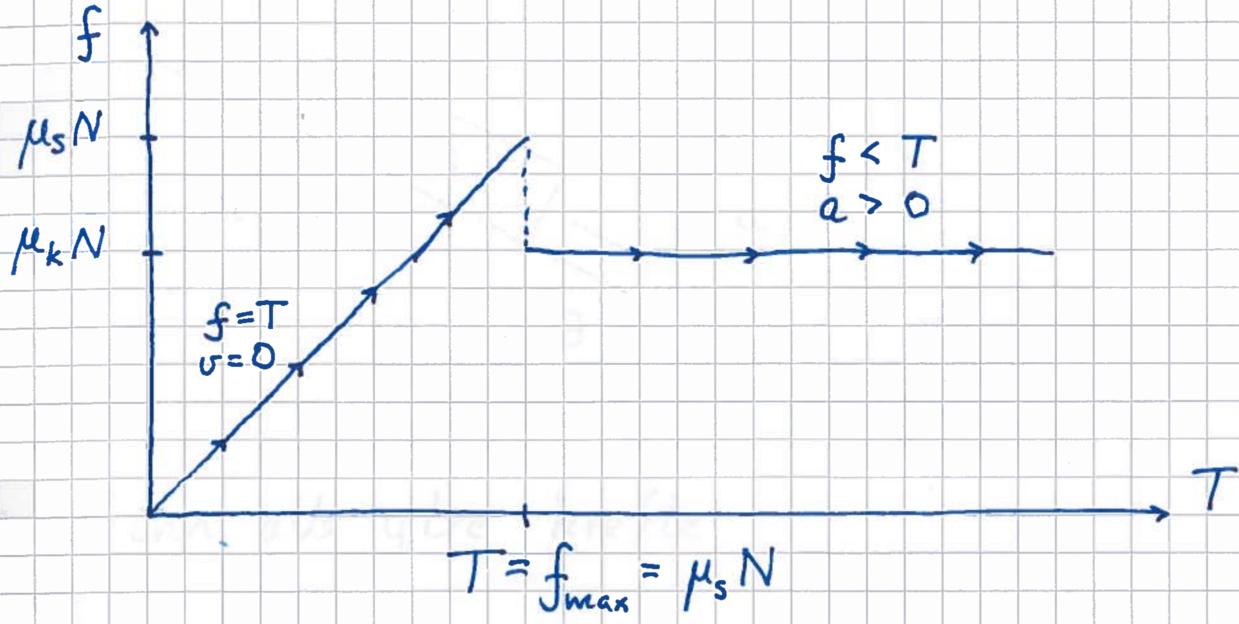
$f_{max} = \mu_s N$; μ_s = statisk friksjonskoeffisient

Klossen glir hvis $T > f_{max}$; da er

$f = \mu_k N$; μ_k = kinetisk friksjonskoeffisient

Som regel er $\mu_k \lesssim \mu_s$: ujevnheter i overflatene gir best grep når $v = 0$

Grafisk, $f(T)$:



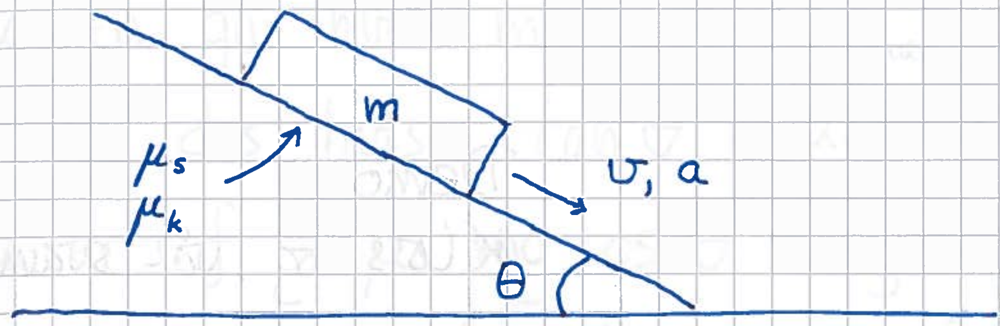
Noen tallverdier:

Stål mot is $\qquad \mu_s \approx 0.03$

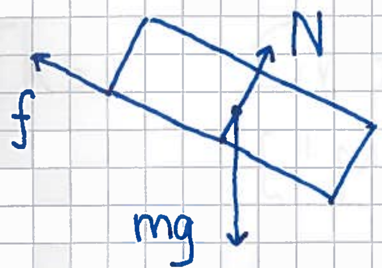
Gummi mot plast $\qquad \mu_s \sim 1$

Våt svamp mot bordplate $\qquad \mu_s > 1$

Eks (inkl problemløsningsstrategi):

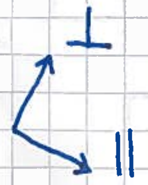


- Finn alle ytre krefter



"fritt-legeme-diagram"

- Velg koordinatsystem. Dekomponer.



$N = N_\perp$, $N_\parallel = 0$, $f = f_\parallel$, $f_\perp = 0$

$G_\perp = mg\cos\theta$, $G_\parallel = mg\sin\theta$

- Bruk N1 $(\sum_i \vec{F}_i = 0)$ eller N2 $(\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i / m)$

N1, ⊥ : $N = mg\cos\theta$

N2, ∥ : $mg\sin\theta - f = ma$

Hvis kloss i ro: $f = mg \sin\theta$ $(a=0)$

Klossen glir hvis $mg\sin\theta > f_{max} = \mu_s mg\cos\theta$

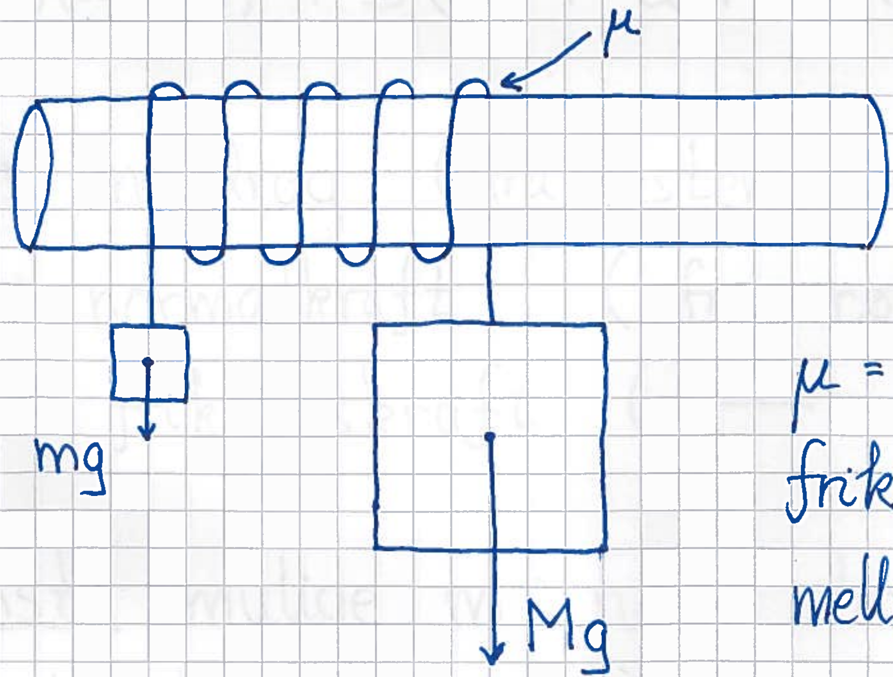
dvs hvis $\tan\theta > \mu_s$

Da er $f = \mu_k mg\cos\theta$ og

$$a = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$$

Eks: Snorfriksjon

["Med livet som innsats", youtube/nrk]

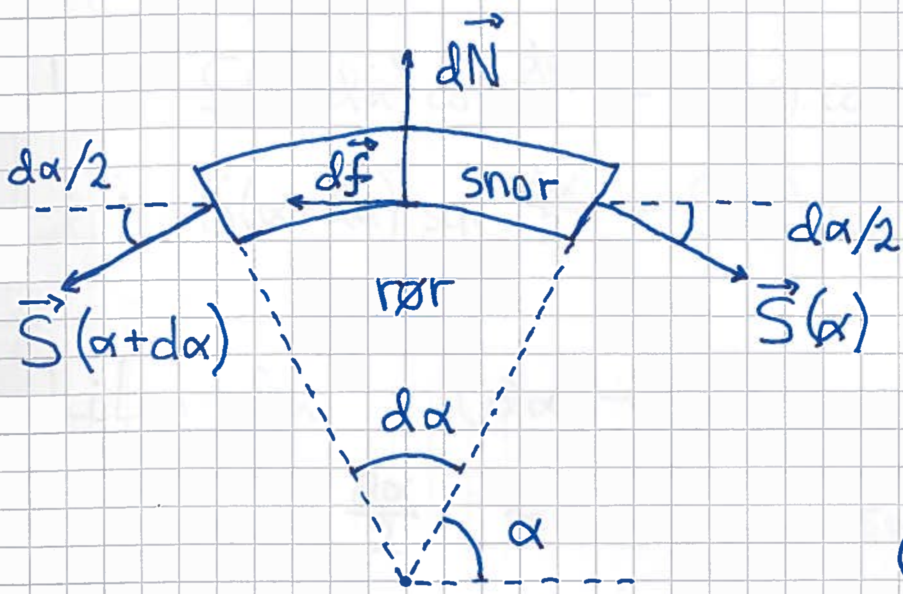


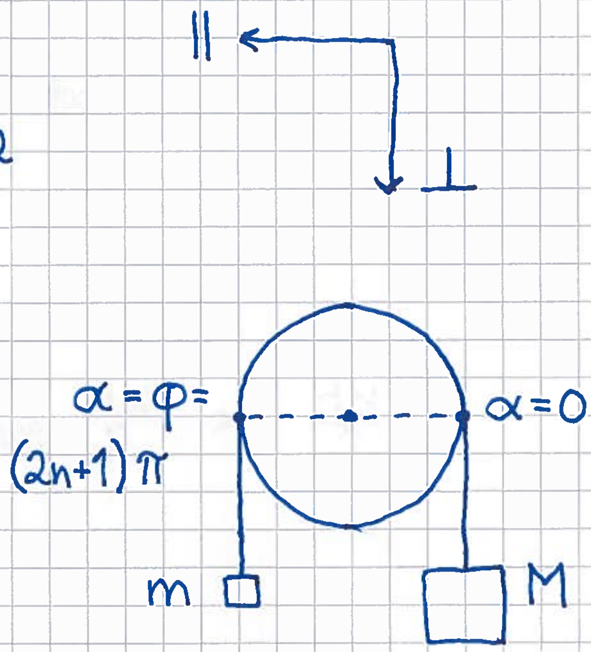
μ = statisk friksjonskoeff. mellom snor og rør

Bestem minste m som holder M oppe med kontaktvinkel φ mellom snor og rør.

I figuren er $\varphi = 9\pi$.

Løsn: N1 for liten snorbit





$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{S}(\alpha + d\alpha) + \vec{S}(\alpha) + d\vec{N} + d\vec{f} = 0$$

$\vec{S}$ = snordrag (fra resten av snora)
$d\vec{N}$ = normalkraft (fra røret)
$d\vec{f}$ = friksjonskraft (—— " ——)

Minste mulige m når statisk friksjon er størst mulig, dvs

$$df = df_{max} = \mu \cdot dN$$

Dekomponerer:

$$\parallel: \quad S(\alpha+d\alpha)\cos\frac{d\alpha}{2} - S(\alpha)\cos\frac{d\alpha}{2} + \mu\, dN = 0$$

$$\perp: \quad S(\alpha+d\alpha)\sin\frac{d\alpha}{2} + S(\alpha)\sin\frac{d\alpha}{2} - dN = 0$$

Liten $d\alpha$ $(d\alpha \to 0)$:

$$\cos\frac{d\alpha}{2} \approx 1, \qquad \sin\frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$$

$$S(\alpha+d\alpha) - S(\alpha) = dS$$

$$S(\alpha+d\alpha) + S(\alpha) = 2S$$

Dermed:

$$dS = -\mu\, dN, \qquad S\, d\alpha = dN$$

$$\Rightarrow \quad dS/S = -\mu\, d\alpha$$

Integrerer fra $\alpha = 0$ til $\alpha = \varphi$ (der $\varphi = 9\pi$ ved 4.5 runder med snora):

$$\int_{S(0)}^{S(\varphi)} \frac{dS}{S} = -\mu \int_0^{\varphi} d\alpha \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{S(\varphi)}{S(0)} = -\mu\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \underline{S(\varphi) = S(0)\, e^{-\mu\varphi}}$$

Dvs, siden $S(0) = Mg$ og $S(\varphi) = mg$:

$$m = M \cdot \exp(-\mu\varphi)$$

I eksp. er $\mu \approx 0.17$, $M = 1\,kg$, $\varphi = 9\pi$

$$\Rightarrow m = 1000g \cdot \exp(-0.17 \cdot 9\pi) \approx 8\,g$$

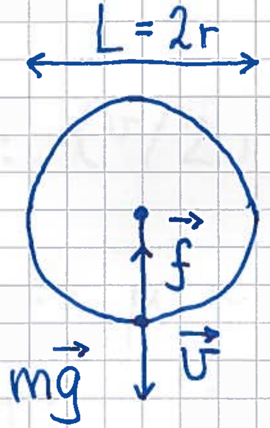
Omvendt: Nødvendig kraft for å heise M opp er $S(\varphi) = S(0) \cdot \exp(+\mu\varphi)$

$$\Rightarrow m = 1\,kg \cdot \exp(+0.17 \cdot 9\pi) \approx 122\,kg$$

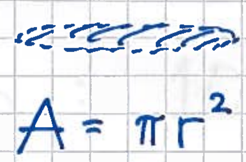
Friksjon i fluider: [YF 5.3 ; LL 8]

Anta symmetrisk legeme med lineær utstrekning L på tvers av $\vec{v}$; omgivende fluid (gass, væske) med massetetthet ρ og dynamisk viskositet μ.

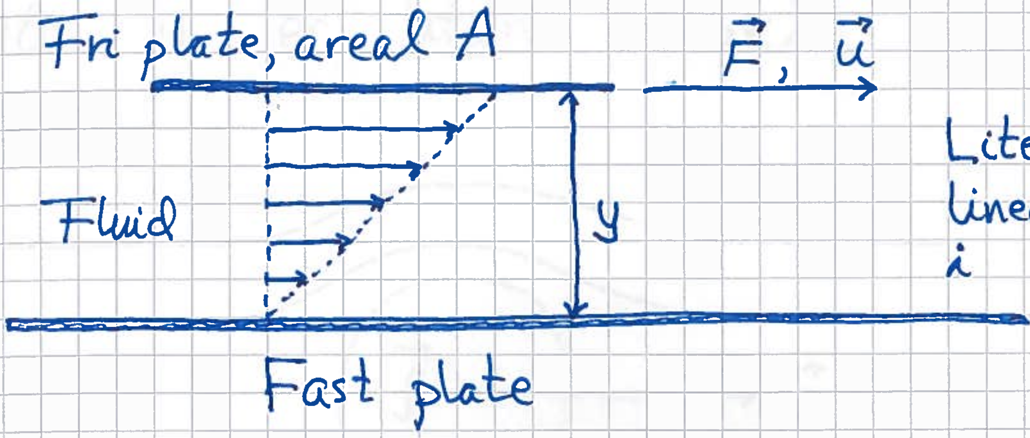
Eks: Ball som faller i luft



Luftmotstand $\vec{f}$



Definisjon og måling av μ :



Liten fart u gir lineær fartsprofil i fluidet

Exp. gir $\quad F = \mu \cdot \dfrac{A \cdot u}{y}$

der μ = fluidets dynamiske viskositet; $[\mu] = \dfrac{kg}{m \cdot s}$

Eks: $(\upsilon / 20°C)$

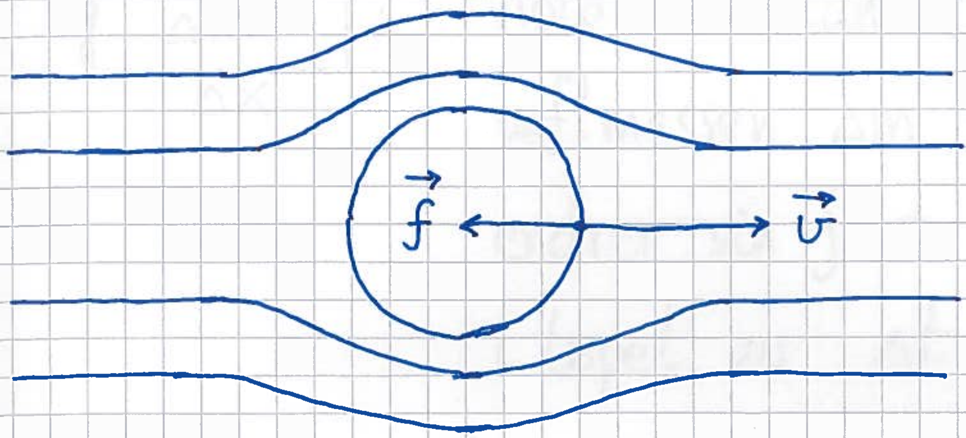
Luft: $\mu \approx 2 \cdot 10^{-5}$

Vann: 10^{-3}

Glyserol: 1

Sirup : 10^{2}

Laminær strømning (pen, lagdelt) når v er liten (nok):



$$\vec{f} = -k\,\vec{v}$$

Kule med radius r : $k = 6\pi\mu r$

(Stokes' lov)

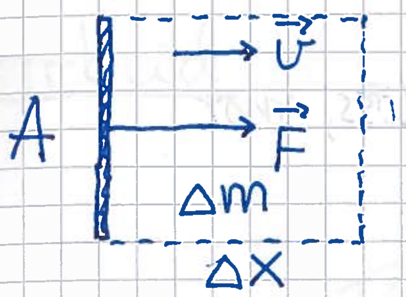
Turbulent strømning (uordnet, virvler) når v er stor (nok):

$$\vec{f} = -\left(\tfrac{1}{2}\rho A C_d\right) v^2\,\hat{v}$$

C_d = drag-koeffisienten

(Kule: $C_d \approx 0.5$)

Eks: C_d for plate



Må dytte med kraft F for å holde konstant fart v, fordi luftmassen $\Delta m = \rho \Delta V = \rho A \Delta x$ endrer sin fart fra 0 til v i løpet av $\Delta t = \Delta x / v$

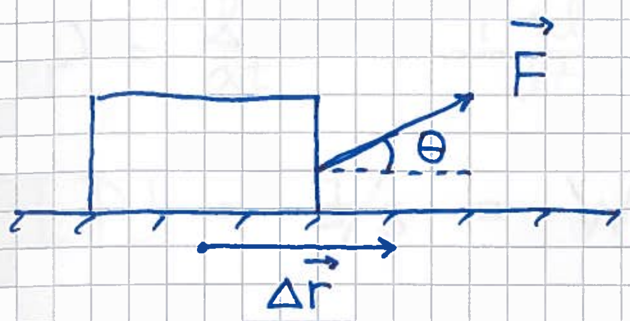
$$\Rightarrow F = \frac{\Delta m \cdot v}{\Delta t} = \frac{\rho A \Delta x \cdot v}{\Delta t} = \rho A v^2 \quad \Rightarrow \underline{C_d = 2}$$

Eks: Bilen Revolve har $A \approx 1.1\ m^2$ og $C_d \approx 1.35$. Luftmotstand ved $v = 60\ km/h$ er da ca

$$f = \frac{1}{2} \rho A C_d v^2$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 1.2 \cdot 1.1 \cdot 1.35 \cdot (60/3.6)^2\ N$$
$$\approx \underline{250\,N}$$

Arbeid og energi [YF 6, 7 ; LL 4]

Arbeid [YF 6.1–6.3 ; LL 4.1]



Kraft $\vec{F}$ utfører arbeid på klossen.

arbeid $\stackrel{\text{def}}{=}$ kraft × forflytning

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos\theta$$

$$[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J} \quad \text{(joule)}$$

Generelt :

$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta\vec{r}_j \xrightarrow{\Delta r_j \to 0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

= arbeidet utført av $\vec{F}$ ved forflytningen fra $\vec{r}_i$ til $\vec{r}_j$

Effekt [YF 6.4 ; LL 4.1]

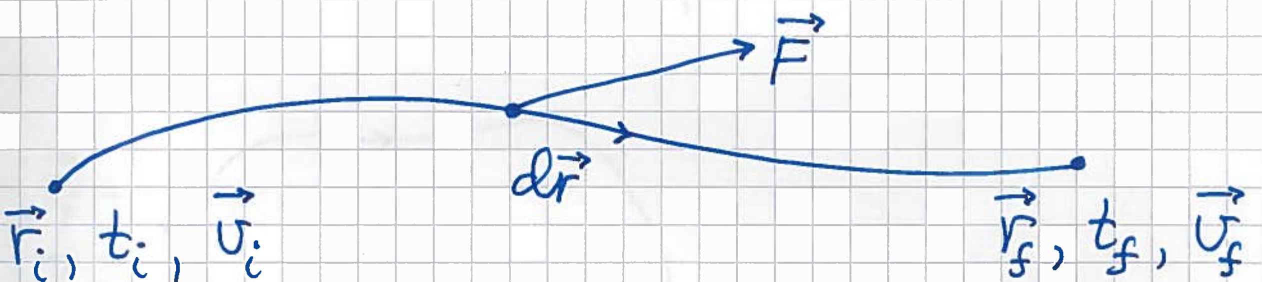
effekt $\stackrel{\text{def}}{=}$ arbeid (evt. energi) pr tidsenhet

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$[P] = J/s = W \text{ (watt)}$$

$$\underline{1\ kWh} = 1000\ \frac{J}{s}\cdot 3600s = \underline{3.6\ MJ}$$

Kinetisk energi [YF 6.2 ; LL 4.2]



$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_i^f m\,\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\,dt = m\int_i^f \vec{v}\cdot d\vec{v}$$

$$\vec{v}\cdot d\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\vec{v}\cdot d\vec{v} + d\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = \frac{1}{2}d\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = \frac{1}{2}d(v^2)$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2}m\int_{v_i^2}^{v_f^2} d(v^2) = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

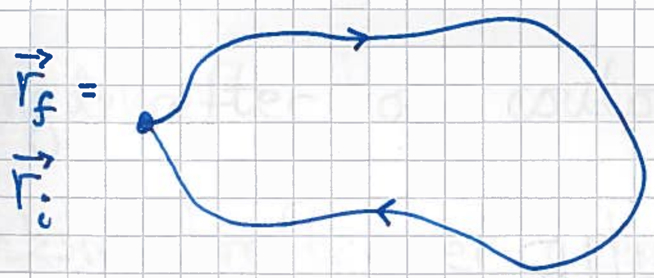
K = kinetisk energi $\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}mv^2$

Dermed: $\boxed{W = \Delta K = K_f - K_i}$

Arbeid W utført på et legeme tilsvarer endringen i legemets kin. energi, ΔK.

Konservative krefter [YF 7.3 ; LL 4]

Anta at $\vec{F}$ virker på et legeme som kommer tilbake der det startet, dvs $\vec{r}_f = \vec{r}_i$:

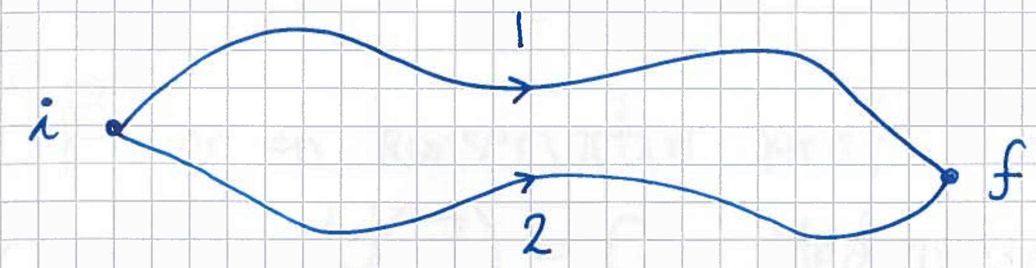


Hvis $K_f = K_i$, er $W = \Delta K = 0$, dvs

$$\boxed{\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0}$$

Da er $\vec{F}$ en <u>konservativ</u> kraft.

Når $\vec{F}$ er konservativ, er arbeidet W uavhengig av veien :



$$0 = \oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \left\{\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r}\right\}_1 + \left\{\int_f^i \vec{F}\cdot d\vec{r}\right\}_2$$

$$= W_1 - W_2$$

$$\Rightarrow W_1 = W_2 \qquad \text{(qed)}$$

Tyngdekrefter og coulombkrefter er konservative.

Friksjonskrefter er ikke konservative.

Potensiell energi [YF 7.1-7.4 ; LL 4.3-4.4]

$$U(\vec r) \overset{\text{def}}{=} -\int_{\vec r_0}^{\vec r} \vec F \cdot d\vec r$$

der $\vec F$ er en konservativ kraft, og der vi har <u>valgt</u> $U(\vec r_0) = 0$. Med andre ord, kun <u>forskjeller</u> i pot. energi har fysisk betydning.

Bevarelse av mekanisk energi

[YF 7.1-7.3 ; LL 4.5]

$$\Delta K = K_2 - K_1 = W = \int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \vec F \cdot d\vec r$$

$$U_2 - U_1 = -\int_{\vec r_0}^{\vec r_2} \vec F \cdot d\vec r - \left(-\int_{\vec r_0}^{\vec r_1} \vec F \cdot d\vec r\right) = \int_{\vec r_2}^{\vec r_1} \vec F \cdot d\vec r = -W$$

$$\Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

Total mekanisk energi: $E = K + U$

$\Rightarrow$ E er bevart i et konservativt system

Friksjonsarbeid [YF 7.3; LL 4.5]

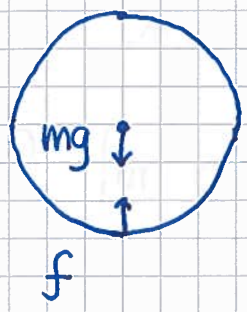
$$W_f = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$$ da $\vec{f}$ alltid rettet mot $d\vec{r}$

$\Rightarrow$ Mek. energi tapes; omdannes til varme, lyd etc.

$\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \Rightarrow \vec{f}$ er ikke konservativ

Lab: Rulling uten å gli ("ren rulling") gir bevart mek. energi. Statisk friksjonskraft gjør ikke arbeid (ideelt sett).

Eks: Fallende bordtennisball



$m = 2.7\,g$, $r = 20\,mm$

- Max hastighet ?
- Tapt andel mek. energi ?

Løsn: Antar $f = \frac{1}{2} \rho A C_d v_t^2$ når $v = v_{max} = v_t$ (terminalhastighet); $\rho = 1.2\,kg/m^3$, $A = \pi r^2$, $C_d = 0.5$.

N1: $f = mg \Rightarrow v_t = \sqrt{2mg/\rho A C_d} \approx \underline{8.4\,m/s}$

Anta at ballen slippes fra høyde h over gulvet.

$\Rightarrow E_i = U_i = mgh$; $E_f = \frac{1}{2} m v_t^2$

$$\frac{E_i - E_f}{E_i} = 1 - \frac{m}{\rho A C_d h}$$

$\approx 64\%$ hvis $h = 10\,m$

(Hvis fritt fall $10\,m$: $v_f = \sqrt{2gh} \approx 14\,m/s$)

Impuls [YF 8 ; LL 5]

(= bevegelsesmengde = linear momentum)

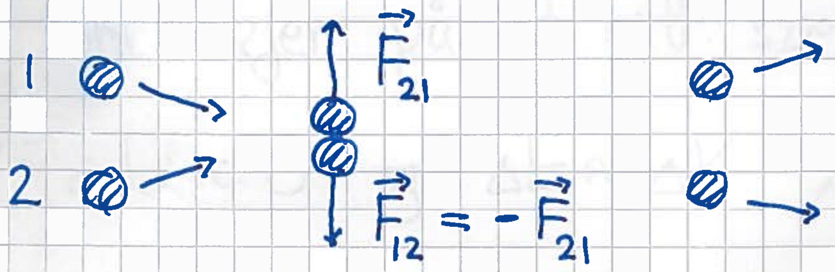
N2 for gitt m: $\vec{F} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(m\vec{v}) = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

$\vec{p} \overset{\text{def}}{=} m\vec{v}$ = massens impuls ; $[p]$ = kg m/s

Vi ser da:

$$\boxed{\text{Hvis } \vec{F} = \Sigma \vec{F}_{ytre} = 0, \text{ er impulsen } \vec{p} \text{ bevart}}$$

Indre krefter mellom legemer endrer ikke hele systemets totale impuls:



N3 $\Rightarrow$ $\vec{F}_{21} + F_{12} = 0$

$\overset{N2}{\Longrightarrow}$ $d\vec{p}_1/dt + d\vec{p}_2/dt = 0$

$\Rightarrow \dfrac{d}{dt}\{\vec{p}_1 + \vec{p}_2\} = 0$

$\Rightarrow \vec{p}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ = konst.

Kollisjoner [YF 8.3, 8.4 ; LL 5]

Total impuls er bevart i kollisjoner, mens mek. energi kan gå tapt.

Elastisk støt: $\Delta E = 0$

Uelastisk støt: $\Delta E < 0$

Fullstendig uelastisk støt: Max $|\Delta E|$.
Legemene henger sammen med felles hastighet etter kollisjonen.

Har typisk svært kortvarige kollisjoner som skjer på et gitt sted, slik at

$\Delta U \approx 0$ og $\Delta E \approx \Delta K$ i kollisjonen.

Tapt $K \longrightarrow$ deformasjon, varme, lyd

Sentralt støt [YF 8.2–8.4 ; LL 5.3]

Kollisjon i 1D:

Før $m \bullet\!\!\longrightarrow v \qquad V \longleftarrow\!\!\bullet M \qquad \longrightarrow +$

Etter $v' \longleftarrow\!\!\bullet m \qquad M \bullet\!\!\longrightarrow V'$

$$\Delta p_{tot} = 0 \implies mv + MV = mv' + MV' \quad (1)$$

(a) Fullst. uel. : $v' = V' = \dfrac{mv + MV}{m + M}$

(b) Delvis uel. : Har kun 1 ligning, 2 ukjente

$\Rightarrow$ trenger en lign./opplysning til.

(c) Elastisk : $\Delta K = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}m\,v'^2 + \frac{1}{2}MV'^2 \quad (2)$$

Skriver om (1) og (2):

$$m(v - v') = M(V' - V) \quad (1)$$

$$m(v - v')(v + v') = M(V' - V)(V' + V) \quad (2)$$

(2) dividert med (1) :

$$v + v' = V' + V \quad (3)$$

(3) · M − (1) gir

$$v' = \frac{M}{m+M}\left\{2V + v\cdot\frac{m-M}{M}\right\}$$

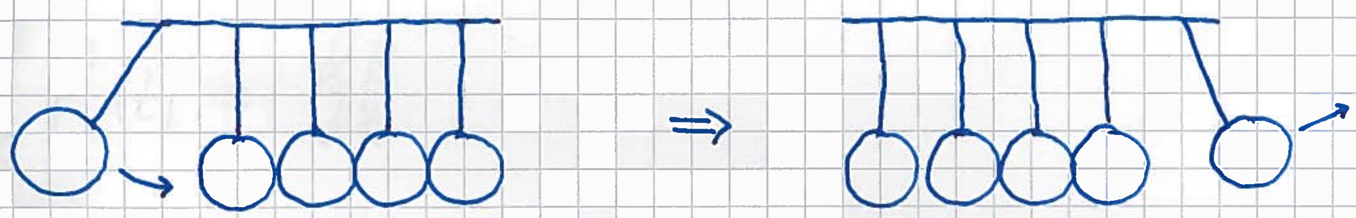
(3) · m + (1) gir

$$V' = \frac{m}{M+m}\left\{2v + V\cdot\frac{M-m}{m}\right\}$$

(opplagt, v/ombytte av små og store bokstaver!)

Eks 1: $m = M \Rightarrow V' = v, \quad v' = V$

Kjent fra leketøy:



Eks 2: Ball mot vegg, elastisk støt

$$v' = \frac{M}{m+M}\left\{0 + v\cdot\frac{m-M}{M}\right\} \overset{m \ll M}{=\!=} -v \qquad \text{(OK)}$$

$K' = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}mv^2 = K$; OK

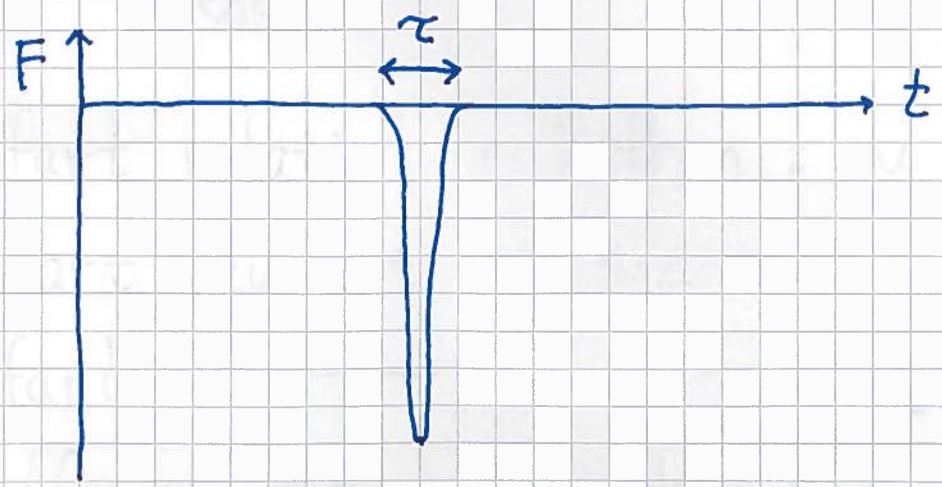
$p' = mv' = -mv$

$P' = MV' = M\frac{m}{M+m}\cdot 2v = 2mv$ (!)

$\Rightarrow p'_{tot} = mv = p_{tot}$; OK

$p(t)$ for ballen (kvalitativt):

$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt}$:



Anta f.eks. $\tau = 2$ ms og $\Delta v = 40$ m/s ;
da er $\langle a \rangle \approx 40/0.002$ m/s^2 $= 20$ km/s^2, så tyngden mg er neglisjerbar i kollisjonen.

"Kraftstøt" (eng: impulse):

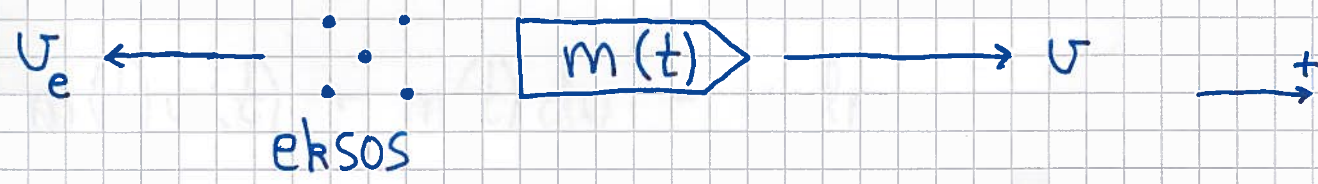
$$\Delta\vec{p} = \int d\vec{p} = \int \vec{F}(t)\,dt$$

Eks: $F(t) = F_0 \exp(-|t|/\tau)$

$$\Rightarrow \Delta p = F_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|/\tau}\,dt = 2F_0 \int_0^{\infty} e^{-t/\tau}\,dt$$

$$= 2F_0\tau \Big|_0^{\infty} -e^{-t/\tau} = \underline{2F_0\tau}$$

Rakett [YF 8.6 ; LL 5.4]



Eksosfart relativt raketten : $u < 0$

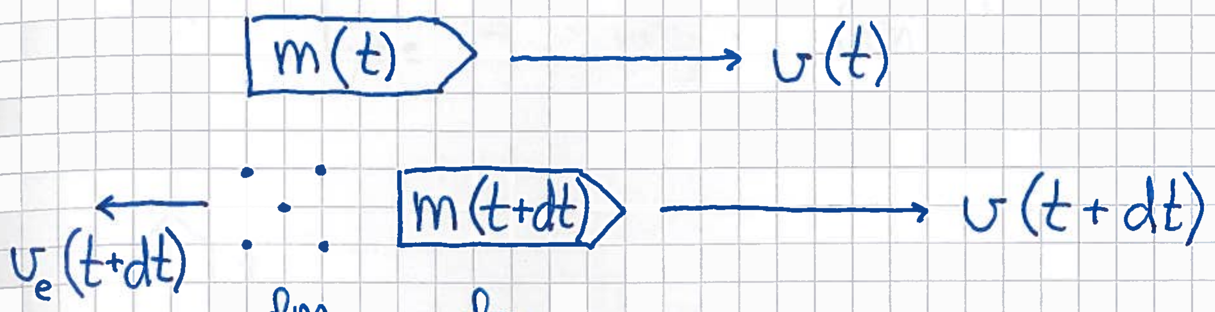
Rakettfart relativt fast system : v

Eksosfart —— " —— : $v_e = u + v$

Drivstoff-forbruk pr tidsenhet : $dm/dt < 0$

Anta konstant u, og $F_{ytre} = 0$ (inntil videre).

Impulsbevarelse fra t til $t+dt$:



$dm_e = -dm$

Ved tid t: $p(t) = m(t)\,v(t)$

Ved tid $t+dt$:

$$p(t+dt) = m(t+dt)\,v(t+dt) + dm_e \cdot v_e(t+dt)$$

$$= [m(t)+dm]\cdot[v(t)+dv] - dm\cdot[u + v(t) + dv]$$

$$= m(t)v(t) + m(t)\,dv - u\,dm$$

$$\Longrightarrow \quad m\,dv - u\,dm = 0$$

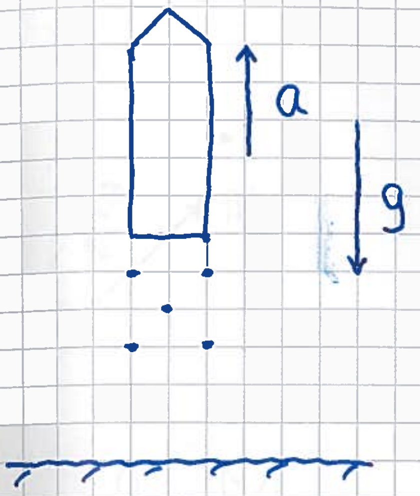
$$\Longrightarrow \quad m\frac{dv}{dt} = u\frac{dm}{dt}$$

dvs: $\quad m\,a = F_{skyv}$

med skyvkraft ("rekyl") $F_{skyv} = u\dot{m} > 0$

Hvis oppskyting fra bakken, virker

$$F_{ytre} = -mg \quad \text{(en stund)}$$



$\Rightarrow ma = u\dot{m} - mg$

Dvs: $F = u\dot{m} - mg$ er total kraft på raketten; må ha $u\dot{m} > mg$ for å ta av

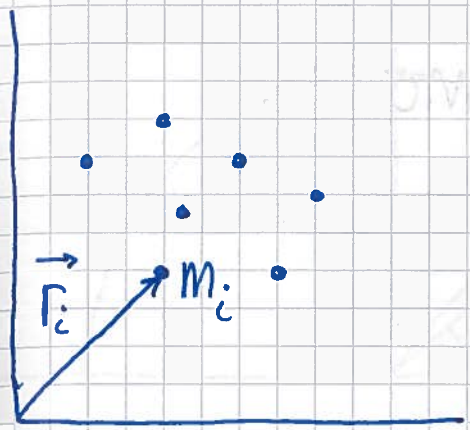
Øving:

$$-mg + u\frac{dm}{dt} = m\frac{dv}{dt} \quad / \cdot \frac{dt}{m}$$

$$\Rightarrow -g\,dt + u\frac{dm}{m} = dv$$

som kan integreres!

Massesenter [YF 8.5 + oppg. 8.115, 8.116; LL 5.6, 5.8, 6.1]



Massesenter (CM) for N punktmasser $m_1, m_2, \ldots, m_N$ i posisjoner $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N$:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

med $M = \sum_i m_i$ = systemets totale masse

For kontinuerlig massefordeling:

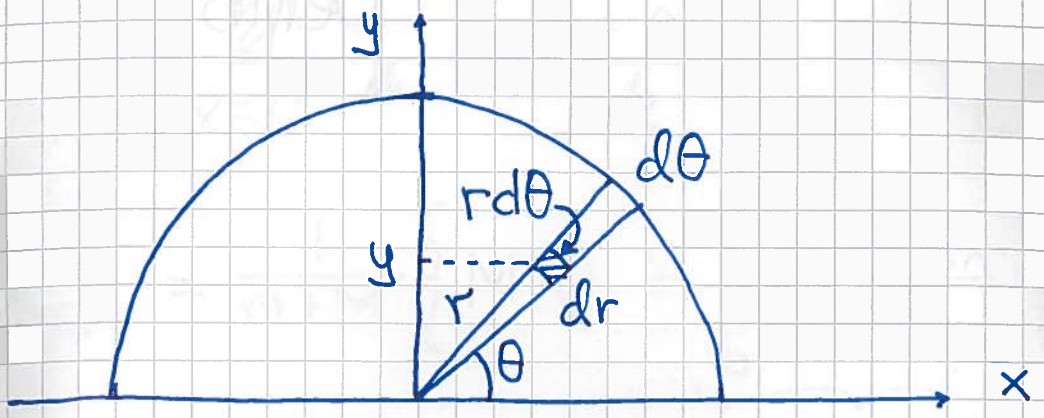
$$\left.\begin{array}{l} m_i \to dm \\ \sum_i \to \int \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} M = \int dm \\ \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r}\, dm \end{array}$$

1D, 2D, 3D: λ, σ, ρ = masse pr hhv lengde-, flate-, volumenhet
dl, dA, dV = hhv lengde-, flate-, volumelement

$\Rightarrow dm = \lambda\, dl,\ \sigma\, dA,\ \rho\, dV$ = masseelement

Hvis uniform massefordeling: $dm/M = dV/V$ osv

Eks 1: $\vec{R}_{CM}$ for halvparten av tynn skive med radius R.



$X_{CM} = 0$ pga symmetri $\Rightarrow \vec{R}_{CM} = Y_{CM}\,\hat{y}$, med

$$Y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm = \frac{1}{A}\int y\,dA, \quad \text{med } A = \frac{\pi R^2}{2},$$

$dA = dr \cdot r\,d\theta$ og $y = r\sin\theta$

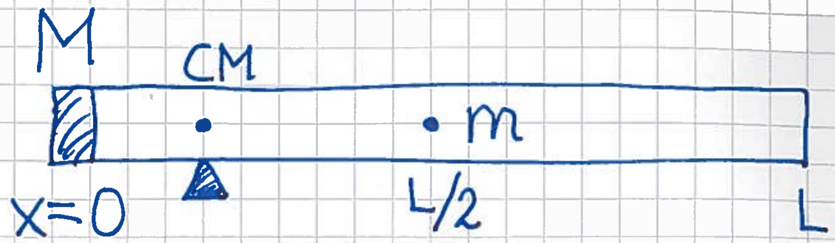
$$\Rightarrow Y_{CM} = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R\int_0^\pi r\sin\theta \cdot dr \cdot r\,d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi R^2}\underbrace{\int_0^R r^2\,dr}_{=R^3/3}\;\underbrace{\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta}_{=\left.(-\cos\theta)\right|_0^\pi = 2} = \frac{4R}{3\pi} \approx 0.42R$$

Halvparten av tynn ring: $Y_{CM} = \frac{2R}{\pi}$

Halvparten av kompakt kule: $Y_{CM} = \frac{3R}{8}$

Eks 2: Rør med lodd i enden



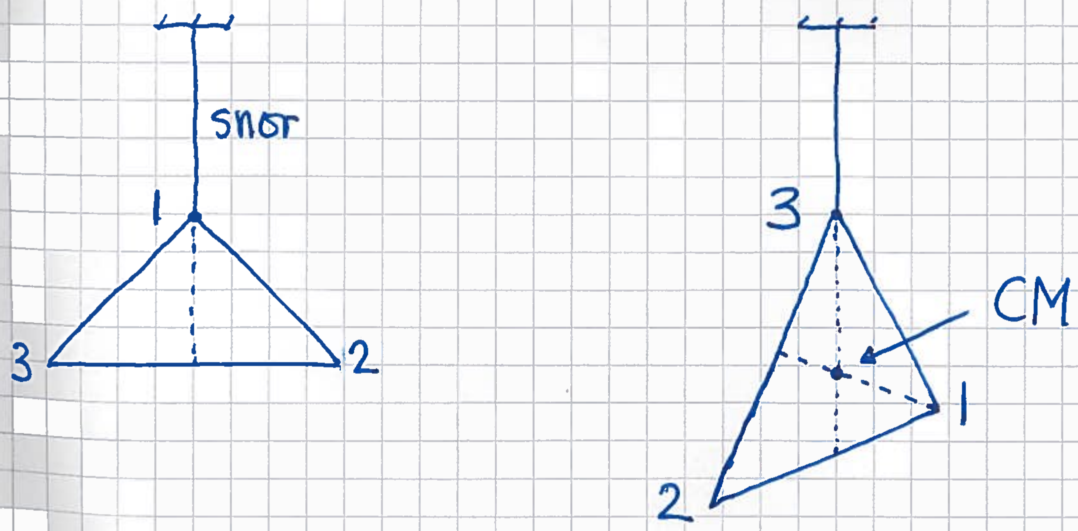
$m = 165\,g$

$M = 305\,g$

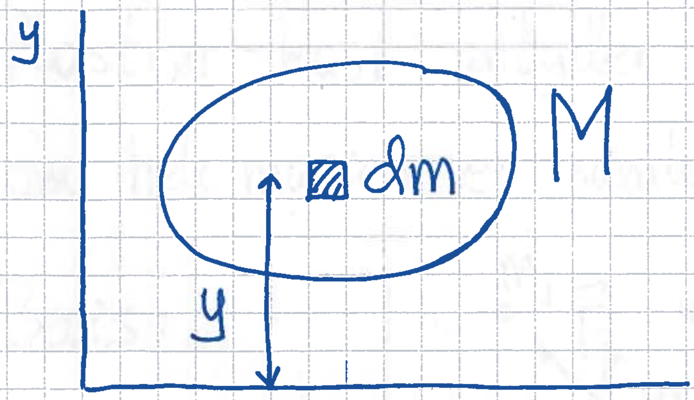
$$X_{CM} = \frac{1}{m+M}\left\{ M\cdot 0 + \underbrace{\int_0^L x \cdot \frac{m\,dx}{L}}_{= m\cdot L/2} \right\}$$

$$= \frac{mL}{2(m+M)} \approx \underline{0.18\,L}$$

Eks 3: Eksperimentell lokalisering av CM



Potensiell energi i tyngdefeltet



Velger $U(0) = 0$

$$U = \int dU = \int g \cdot y \cdot dm$$

Anta g = konstant (dvs $y_{max} - y_{min} \ll$ jordradien)

$$\Rightarrow \quad U = g \cdot \int y\,dm = g \cdot M \cdot Y_{CM}$$

dvs som om hele M var samlet i høyden Y_{CM}, f.eks. i $\vec{R}_{CM}$

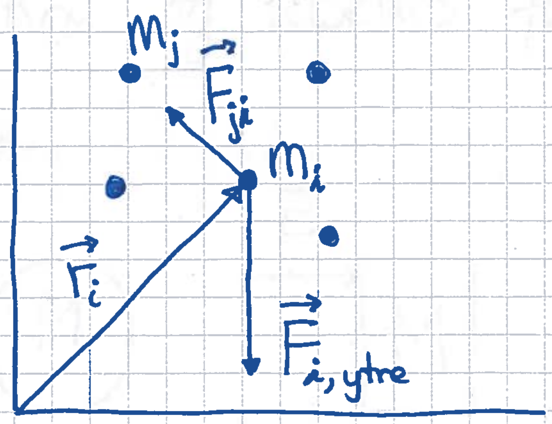
Tyngdepunkt: Der legemet balanserer.

Hvis g er konstant (for hele legemet), er tyngdepunkt og massesenter samme sted.

Massesenterets bevegelse [YF 8.5 ; LL 5.8]

Plastrør-kast antyder at CM beveger seg som om hele massen er samlet i CM. Dette stemmer!

Bevis:



N2 for m_i:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \underbrace{\vec{F}_{i,ytre}}_{\text{Total ytre kraft på } m_i} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{\text{Total indre kraft på } m_i}$$

Tar $\sum_i$ på begge sider.

$$\text{VS: } \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2}\left\{\sum_i m_i \vec{r}_i\right\} = \frac{d^2}{dt^2}\left\{M \vec{R}_{CM}\right\} = M \ddot{\vec{R}}_{CM}$$

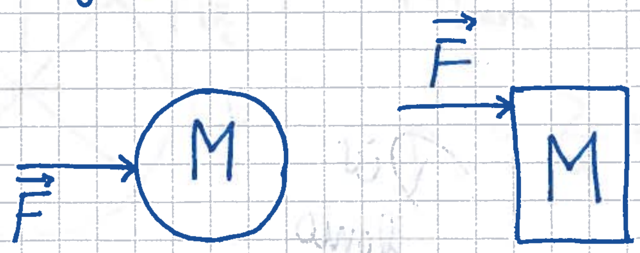
$$\text{HS: } \sum_i \vec{F}_{i,ytre} = \vec{F}_{ytre} = \text{netto ytre kraft på systemet}$$

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \underbrace{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}}_{=0} + \dots + \underbrace{\vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N}}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{ytre} = M\ddot{\vec{R}}_{CM}}$$

Dvs: Bevegelsen til CM blir som om hele M er samlet i $\vec{R}_{CM}$ og utsettes for netto ytre kraft $\vec{F}_{ytre}$.

Eks:



$\Rightarrow \vec{A}_{CM} = \vec{F}/M$; den samme for de to legemene

I tillegg til CMs bevegelse,

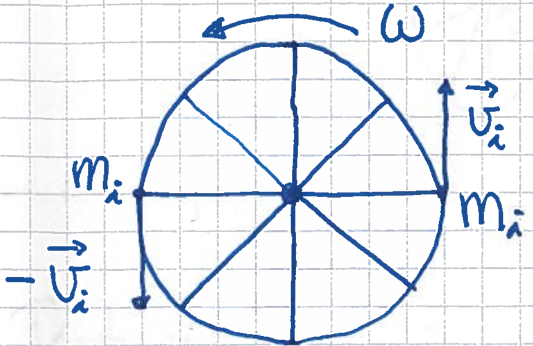
for stive legemer: rotasjon om CM

for ikke helt stive legemer: også vibrasjon

Rotasjon [YF 9,10; LL 6 (5)]

Innledende kommentarer:

- Ren rotasjon (typisk om CM, men ikke nødv. vis)



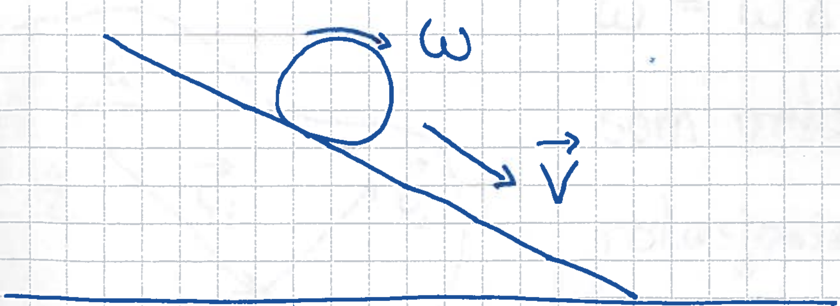
$$K_{trans} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_{CM}^{\,2} = 0$$

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = 0$$

$$K_{rot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \neq 0$$

$\vec{L}$ = hjulets dreieimpuls $\neq 0$

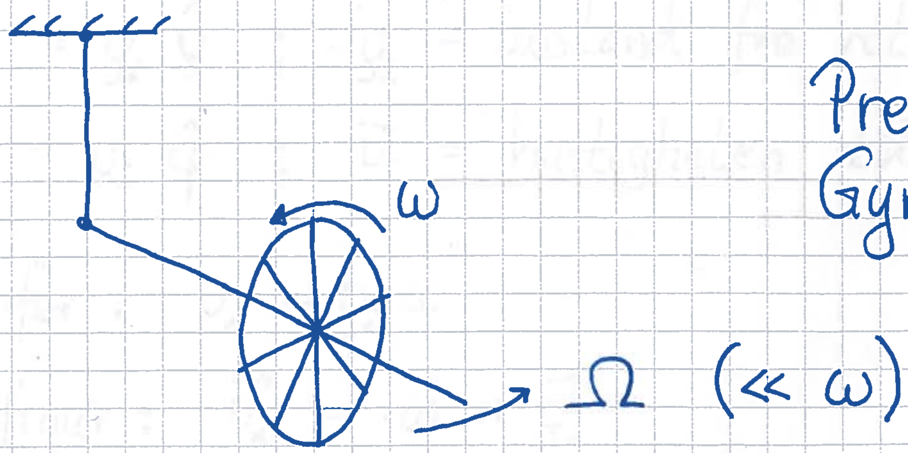
- Rulling = Translasjon av CM + Rotasjon om CM



$\dot{V} > 0$ pga ytre <u>kraft</u> (langs skråplanet)

$\dot{\omega} > 0$ pga ytre <u>dreiemoment</u> (mhp CM)

- Overraskende (?) dynamikk



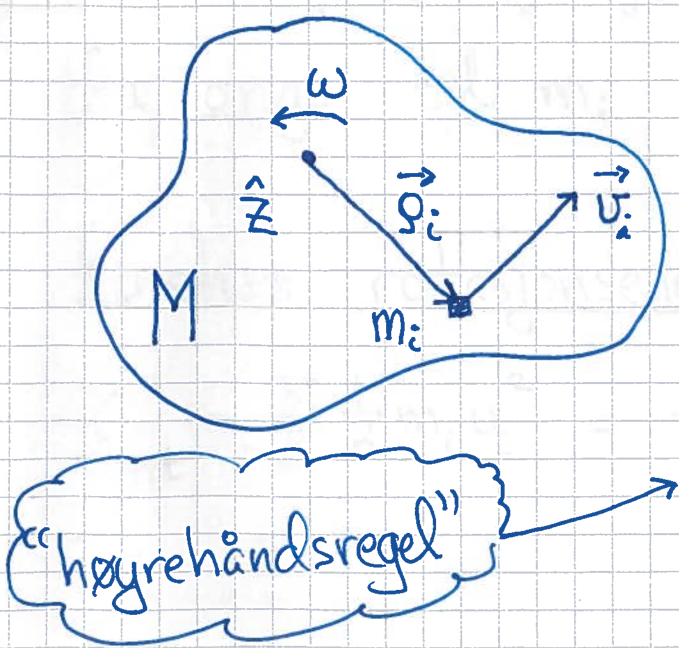
Presesjon.
Gyroskop.

Rotasjonsenergi og treghetsmoment

[YF 9.4 ; LL 6.4, 6.3]

Ser først på ren rotasjon av stivt legeme, om fast akse, ikke nødv. vis gjennom CM.

Med rotasjonsaksen langs $\hat{z}$, ut av planet:



$\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ = vinkelhast. som vektor, langs rotasjonsaksen; 4 fingre på høyre hånd i rotasjonsretningen (her: mot klokka) gir tommelen langs $\vec{\omega}$

Videre er:

$\vec{\rho}_i = \rho_i \hat{\rho}$; ρ_i = avstand fra rot.aksen til m_i

$\vec{v}_i = v_i \hat{\varphi}$; $\vec{v}_i$ = hastigheten til m_i

Fra før: $v_i = \rho_i \omega$

Fra figur: $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$

Høyrehåndsregel for kryssprodukt:

4 fingre langs $\vec{a}$ bøyes over i retning langs $\vec{b}$; da peker tommelen langs vektoren $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Vi bruker her <u>sylinderkoordinater</u> ρ, φ, z ; dvs polarkoordinater ρ, φ samt z.

[Unngår å bruke $\vec{r}_i$ for avstandsvektoren fra z-aksen til m_i fordi $\vec{r}_i$ forbeholdes posisjonsvektoren fra <u>origo</u> til m_i ; derfor $\vec{\rho}_i$!]

Kinetisk <u>rotasjonsenergi</u> for det stive legemet:

$$K_{rot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i \rho_i^2 \right\} \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Her er I legemets treghetsmoment, mhp den aktuelle aksen:

$$\boxed{I \overset{\text{def}}{=} \sum_i m_i \rho_i^2}$$

Hvis kontinuerlig massefordeling: $m_i \to dm$, $\sum_i \to \int$

$$\Rightarrow \boxed{I = \int \rho^2 \, dm}$$

ρ = avstand fra aksen til dm

Generell bevegelse for et stivt legeme er translasjon av CM, med hastighet $\vec{V}$, samt rotasjon om en akse gjennom CM, med vinkelhastighet $\vec{\omega}$. Total kinetisk energi blir da

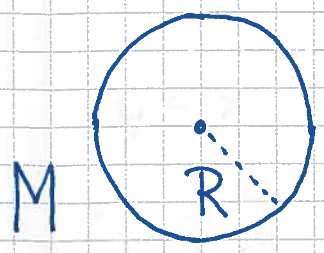
$$\boxed{K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2}$$

[Se utlagt notat for bevis.]

Notasjon: I_0 betyr at aksen går gjennom CM.

Treghetsmoment; eksempler [YF 9.6 ; LL 6.3]

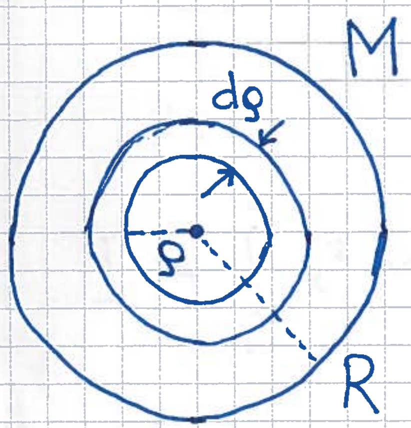
- Ring (og hul sylinder)



$$I_0 = \int \rho^2 dm = R^2 \int dm = \underline{\underline{MR^2}}$$

[Må <u>kunnes</u> ; oppgis ikke til eksamen.]

- Skive (og kompakt sylinder)



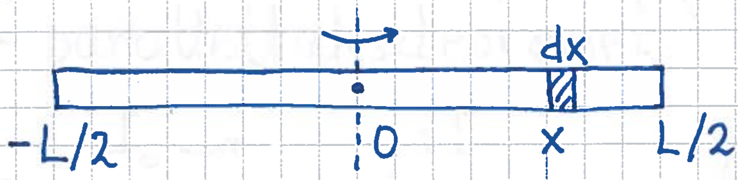
Bidrag fra tynn ring med radius ρ, tykkelse $d\rho$, areal $dA = 2\pi\rho \cdot d\rho$ og masse $dm = M \cdot dA / \pi R^2$:

$$dI_0 = \rho^2 dm = 2M\rho^3 d\rho / R^2$$

$$\Rightarrow I_0 = \int dI_0 = \frac{2M}{R^2} \int_0^R \rho^3 d\rho = \underline{\underline{\tfrac{1}{2} MR^2}}$$

(oppgis)

- Tynn stang (og tynn plate)

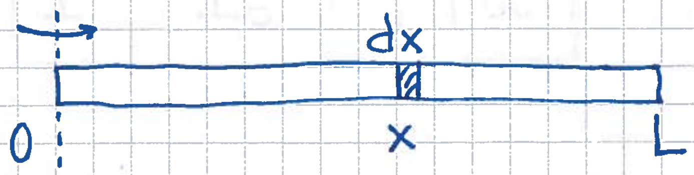


$\rho = x, \quad dm = M \cdot dx/L$

$$\Rightarrow \quad I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot M \cdot \frac{dx}{L} = \frac{M}{L} \Big|_{-L/2}^{L/2} x^3/3 = \underline{\underline{\frac{1}{12} ML^2}}$$

(oppgis)

Mhp akse ved stangas ende:



$$I = \int_0^L x^2 M \, dx/L = \underline{\underline{\frac{1}{3} ML^2}}$$ (oppgis ikke)

- Kuleskall

  $I_0 = \frac{2}{3} MR^2$

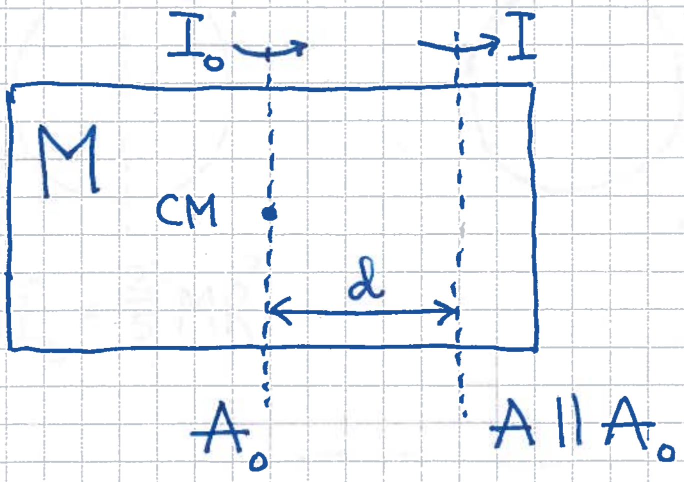
- Kompakt kule

  $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$

Se øving og LF for detaljer. Oppgis.

Steiners sats [YF 9.5 ; LL 6.3]

(= parallellakseteoremet)

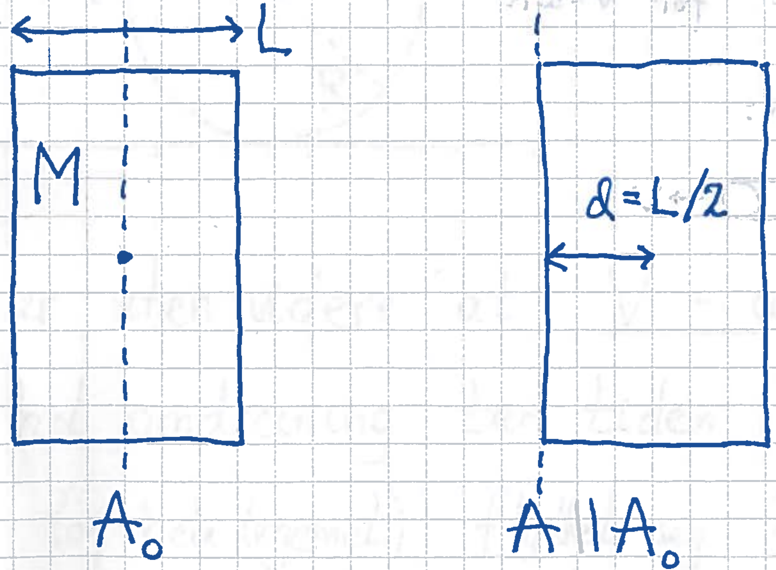


A: akse parallell med aksen A_0

$$\boxed{I = I_0 + Md^2}$$

[Se notat for bevis]

Eks 1: Dør



$$\Rightarrow I = I_0 + M \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

(som s. 57)

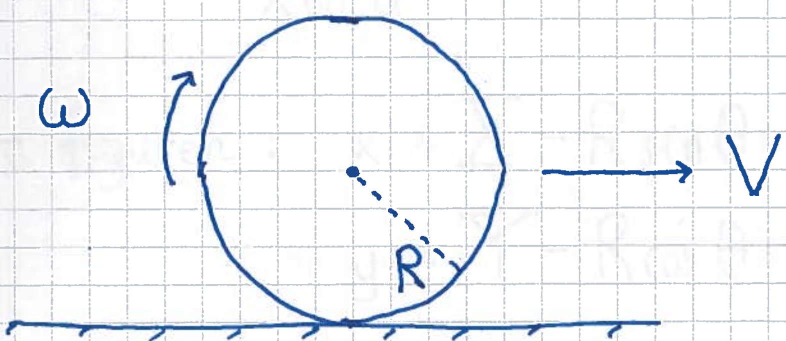
$I_0 = \frac{1}{12} ML^2$

Eks 2: Kompakt kule

$I_d = I_0 + MR^2$
$= \frac{7}{5} MR^2$

$I_0 = \frac{2}{5} MR^2$

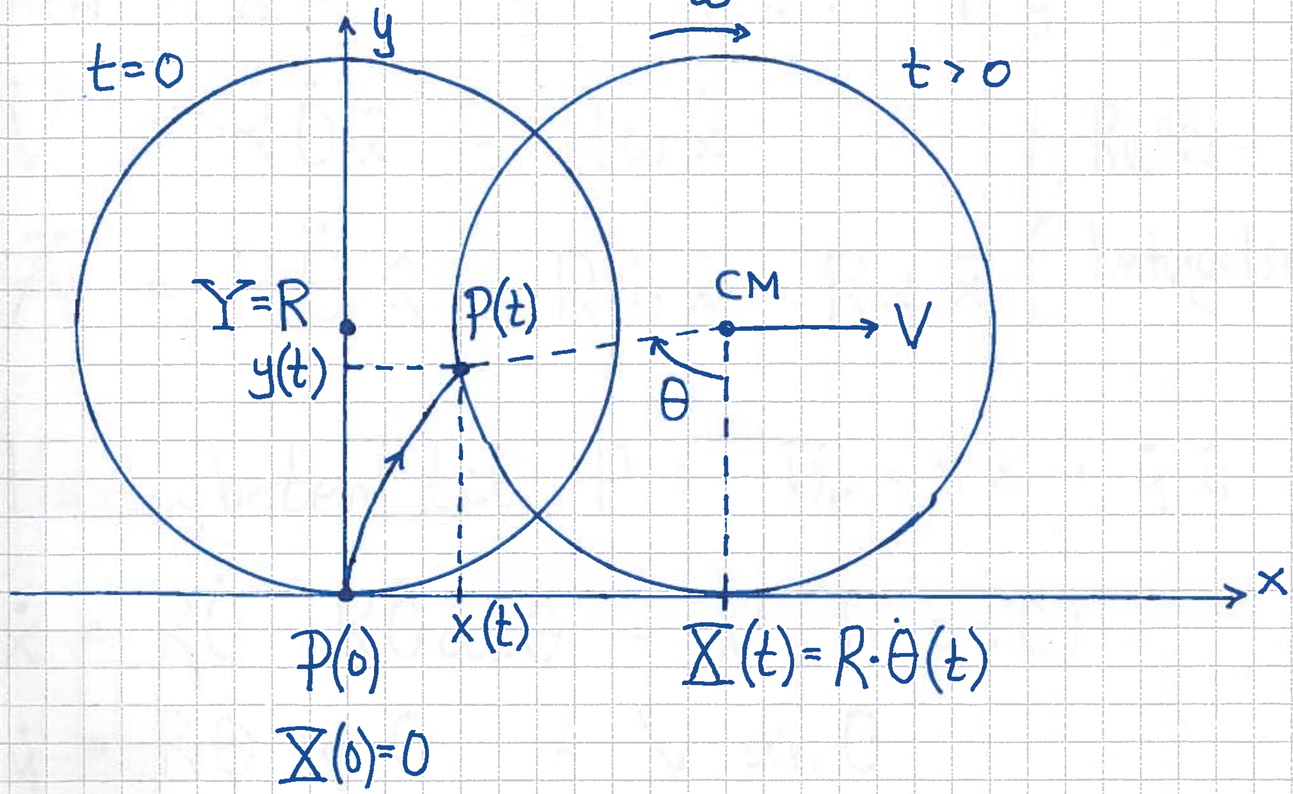
Ren rulling [YF 10.3 ; LL 6.7]



Vi ser uten videre at $\underline{V = \omega R}$:

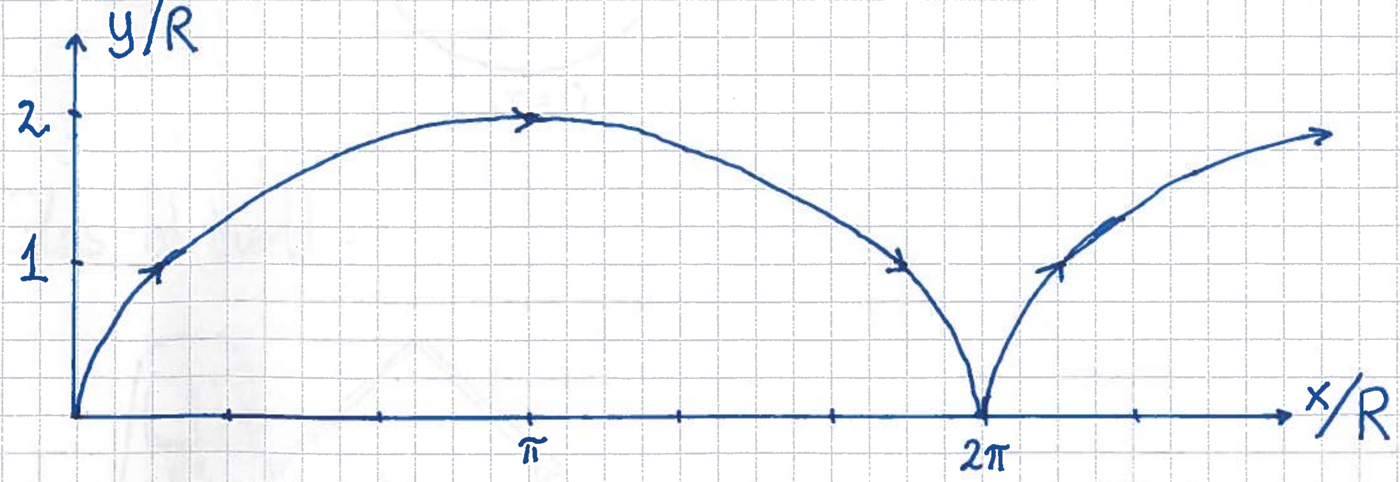
En hel omdreining tar tiden $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Da har CM (og hele legemet) flyttet seg $2\pi R$ mot høyre. Det gir $V = 2\pi R / T = \omega R$. Evt: Liten rotasjon $d\theta = \omega\, dt$ flytter CM liten lengde $dx = R\, d\theta = R\omega\, dt$, som gir $V = dx/dt = R\omega$. Som er <u>rullebetingelsen</u>.

Banen til et punkt P på periferien er en <u>sykloide</u> :



Fra figuren : $x = X - R\sin\theta = R\theta - R\sin\theta$

$y = Y - R\cos\theta = R - R\cos\theta$



Bevegelsen til CM:

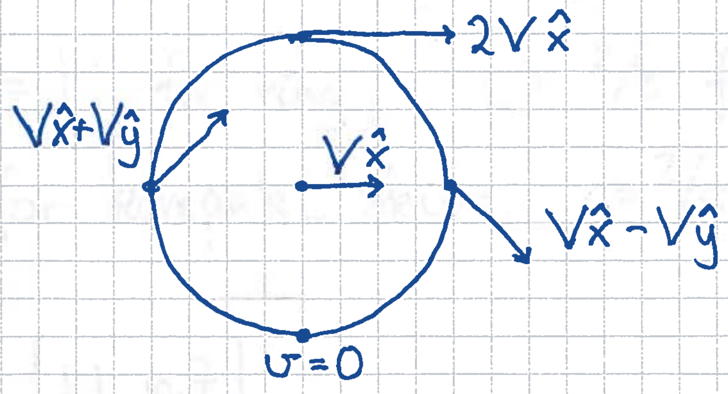
$$\vec{R}_{CM} = X\hat{x} + Y\hat{y} = R\theta\hat{x} + R\hat{y}$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \vec{V} &= R\dot{\theta}\hat{x} = R\omega\hat{x} \\ \Rightarrow \vec{A} &= R\ddot{\theta}\hat{x} = R\dot{\omega}\hat{x} = R\alpha\hat{x} \end{aligned}\right\} \text{Rulle-betingelse(r)}$$

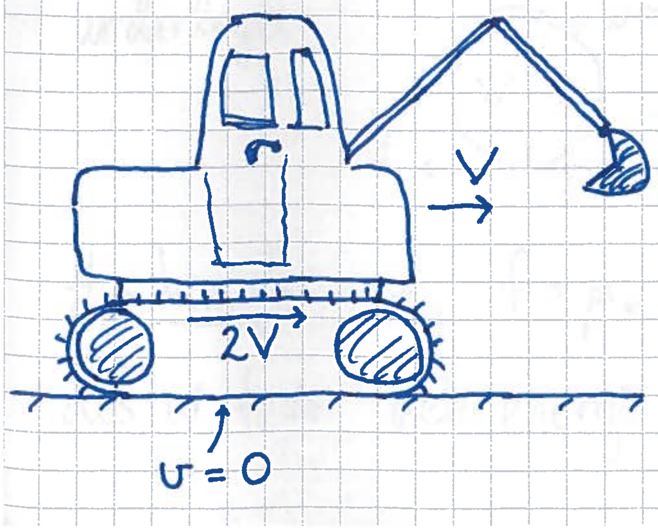
Hastigheten til P: $\vec{v}_P = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}$

$$\dot{x} = R\dot{\theta} - R\dot{\theta}\cos\theta = V(1-\cos\theta)$$

$$\dot{y} = R\dot{\theta}\sin\theta = V\sin\theta$$



Gløs-aktuelt:



Ser at $v = 0$ for $\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$,
dvs når P er i <u>kontakt</u> med underlaget.

Da er effekttapet pga friksjon

$$P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} = \underline{0} \quad \text{(som nevnt s. 36)}$$

Kinetisk energi ved ren rulling:

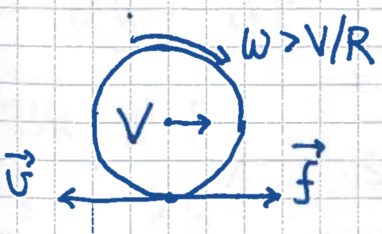
$$K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2} \cdot cMR^2 \cdot \frac{V^2}{R^2}$$

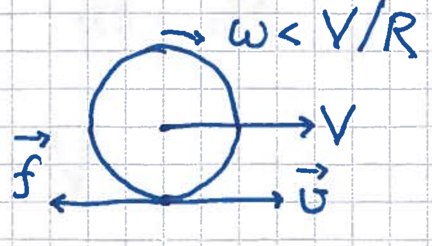
$$\Longrightarrow \quad \boxed{K = (1+c)\frac{1}{2}MV^2}$$

med $c = 1$ for ring, $c = 2/3$ for kuleskall,
$c = 1/2$ for kompakt skive, $c = 2/5$ for kompakt kule.

<u>Sluring</u> [LL 6.7]

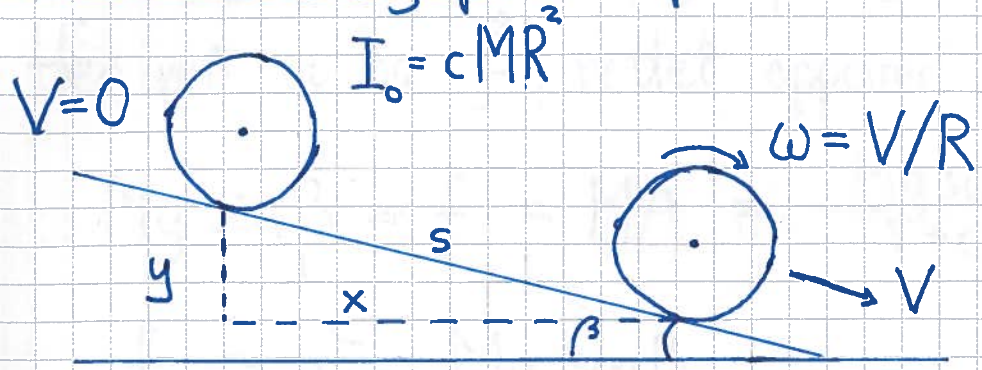
Hvis $\omega \neq \frac{V}{R}$, er $v = V - \omega R \neq 0$, dvs objektet <u>glir</u> på underlaget:





Har <u>kin. friksjon</u>, $f = \mu_k N$, og effekttap, $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$,
dvs vi taper mek. energi pr tidsenhet lik $|P_f|$.

Eks: Ren rulling på skråplan [YF 10.3; LL 6.8]



Finn V, A, friksjonskraften f, og minste μ_s (evt største β) som gir ren rulling.

Energibevarelse: $Mgy = (1+c)\frac{1}{2}MV^2$

$$\Rightarrow \underline{\underline{V = \left\{\frac{2gy}{1+c}\right\}^{1/2}}}$$; avtar med økende c

$\Rightarrow V(\text{kule}) > V(\text{skive}) > V(\text{kuleskall}) > V(\text{hul sylinder})$

Akselerasjon:

$$A = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{dV}{dy}\cdot\frac{dy}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$$

$$= \left\{\frac{2g}{1+c}\right\}^{1/2}\cdot\frac{1}{2y^{1/2}}\cdot\sin\beta\cdot V$$

$$= \left\{\frac{2g}{1+c}\right\}^{1/2}\cdot\frac{\sin\beta}{2y^{1/2}}\cdot\left\{\frac{2gy}{1+c}\right\}^{1/2} = \underline{\underline{\frac{g\sin\beta}{1+c}}}$$

Uten friksjon er $F_{\parallel} = Mg\sin\beta$ og $A = g\sin\beta$.

$\Rightarrow$ Her må vi ha $\vec{f}$, rettet oppover skråplanet

$$\Rightarrow \quad Mg\sin\beta - f = MA = \frac{Mg\sin\beta}{1+c}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{f = \frac{c}{1+c} Mg\sin\beta}}$$

Maksimal statisk friksjon er $f_{max} = \mu_s N$, og $N = Mg\cos\beta$. Må derfor, for å ha ren rulling, oppfylle ulikheten $f \leq f_{max}$, dvs

$$\frac{c}{1+c} Mg\sin\beta \leq \mu_s Mg\cos\beta$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\mu_s \geq \frac{c}{1+c}\tan\beta}} \;, \text{ evt. } \underline{\underline{\beta \leq \arctan\left\{\mu_s \cdot \frac{1+c}{c}\right\}}}$$

Lab: Krum bane. Ren rulling gir fortsatt energibevarelse og

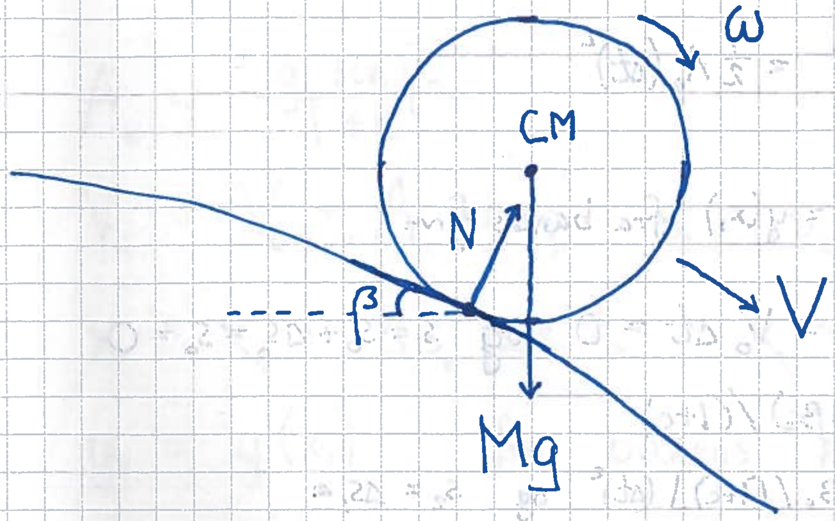
$$A = \frac{g\sin\beta}{1+c}$$

tangentielt med banen, men ikke lenger konstant.

Har også akselerasjon normalt på banen,

$$A_\perp = V^2/\rho \quad ; \quad \rho = [1 + (y')^2]^{3/2} / |y''|$$

slik at normalkraften N varierer langs banen y(x).



N2 ⊥ banen gir

$$MA_\perp = \pm (Mg\cos\beta - N) \quad ; \quad \text{krumning} \begin{array}{l} \text{nedover} \\ \text{oppover} \end{array}$$

dvs N kan beregnes når V og y(x) er kjent. Merk at $y' = dy/dx = \tan\beta$.

<u>Målt</u> bevegelse gir x(t) og y(t).
<u>Beregnet</u> / Teoretisk bevegelse fås ved å løse "N2" langs banen numerisk, f.eks med Euler-metoden:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{g \sin\beta}{1+c} \Rightarrow \Delta V = \frac{g \sin\beta}{1+c} \Delta t = A \Delta t$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = V \Rightarrow \Delta s = V \Delta t$$

Med f.eks. $t_0 = 0$, $V_0 = V(t_0) = 0$ og $s_0 = s(t_0) = 0$:

$$A_0 = \frac{g \sin\beta_0}{1+c}$$

$$V_1 = V_0 + A_0 \Delta t \; ; \quad s_1 = s_0 + V_0 \Delta t \; ;$$

$$x_1 = x_0 + \Delta s_0 \cos\beta_0 = x_0 + V_0 \Delta t \cos\beta_0$$

$y_1 = y(x_1)$, fra banens kjente form

$$A_1 = \frac{g \sin\beta_1}{1+c}$$

$$V_2 = V_1 + A_1 \Delta t \; ; \quad s_2 = s_1 + V_1 \Delta t \; ;$$

$$x_2 = x_1 + \Delta s_1 \cos\beta_1 = x_1 + (s_2 - s_1) \cos\beta_1$$

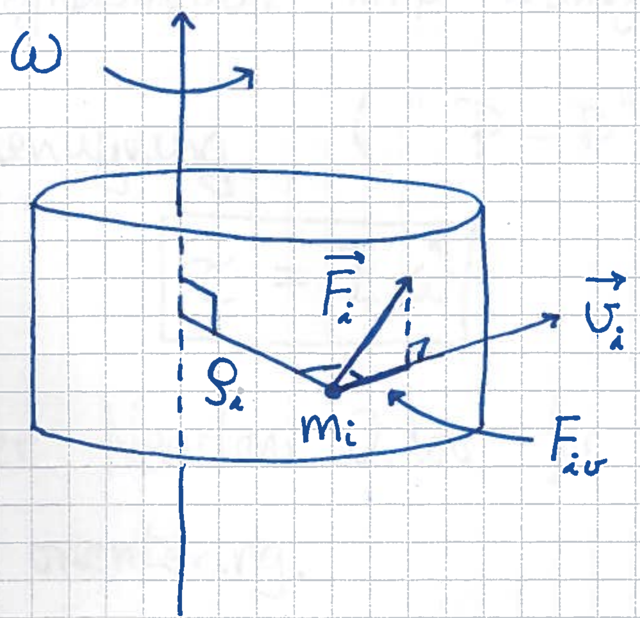
$$y_2 = y(x_2)$$

osv

Krefter og rotasjon : Rotasjonsdynamikk

Akse med fast orientering [YF 10.1, 10.2; LL 6.2]

Dette er essensielt et endimensjonalt problem, der vi betrakter rotasjonsdelen av den totale bevegelsen.



$v_i = \rho_i \omega$

$(\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i)$

F_{iv} = komponent langs $\vec{v}_i$ av ytrekraft $\vec{F}_i$ på m_i

"Triks": Vi beregner tilført effekt,

$$P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i F_{iv} v_i$$

på to måter og sammenligner uttrykkene vi finner.

(1) Bruker $v_i = \rho_i \omega$:

$$P = \left\{ \sum_i F_{iv} \rho_i \right\} \omega = \tau \omega$$

Her er $\tau = \sum_i F_{iv} \rho_i$ = netto ytre <u>dreiemoment</u> på legemet, mhp rotasjonsaksen ("kraft ganget med arm")

(2) Bruker $\vec{F}_i = m_i \, d\vec{v}_i/dt$:

$$P = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_i m_i v_i^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\sum_i m_i \rho_i^2\right\}\omega^2 = \frac{1}{2} I \frac{d}{dt}\omega^2 = \frac{1}{2} I \cdot 2\omega \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

$= I\omega\dot{\omega}$ (der $I = \sum_i m_i \rho_i^2$ er legemets treghetsmoment mhp rotasjonsaksen)

Sammenligning ("$P = P$") gir nå

$$\boxed{\tau = I\dot{\omega}}$$

som er Newtons 2. lov for rotasjon om akse med fast orientering.

Jf. N2 for translasjon : $F = m\dot{v}$

<u>Arbeid utført av dreiemomentet</u> [YF 10.4 ; LL 6.4]

Vi har $P = \tau\omega = \tau \, d\varphi/dt$ og $P = dW/dt$, som gir

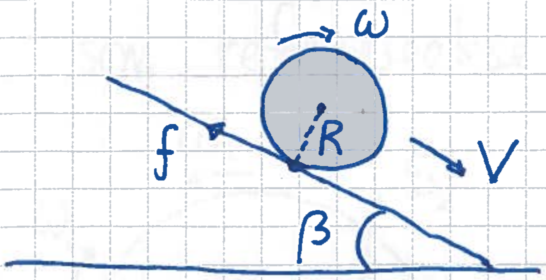
$$\boxed{dW = \tau \, d\varphi}$$

som er arbeid utført av τ ved en vinkelendring $d\varphi$

Jf. arbeid utført av kraft ved translasjon :

$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Eks 1: Ren rulling på skråplan



$\omega = V/R, \quad \dot{\omega} = \dot{V}/R$

N2 langs skråplanet: $Mg\sin\beta - f = M\dot{V}$

N2, rotasjon om akse gjennom CM (fast orientering):

$\tau = I_0 \dot{\omega}$, med $I_0 = c \cdot MR^2$, $\dot{\omega} = \dot{V}/R$ og

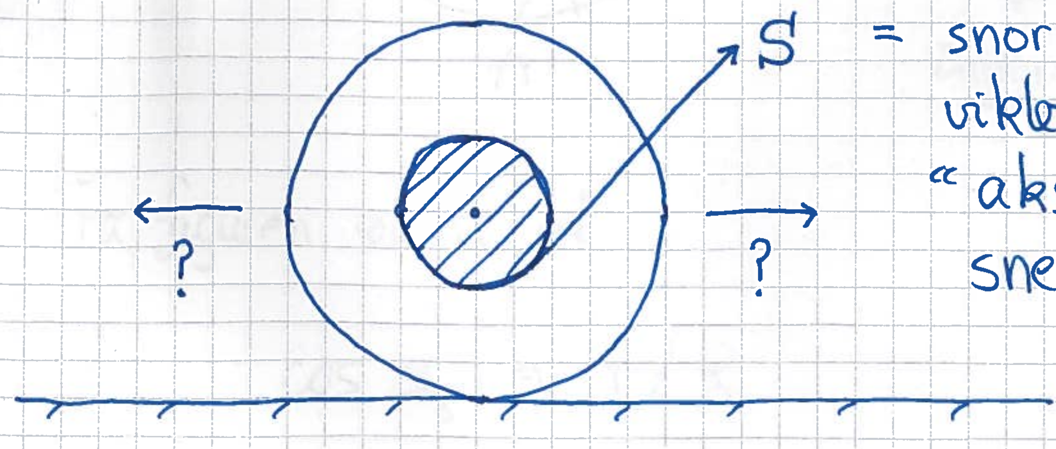
$\tau = f \cdot R$ (siden $\vec{N}$ og $M\vec{g}$ begge har <u>null arm</u> relativt aksen gjennom CM) gir

$$f \cdot R = cMR\dot{V}, \quad \text{dvs} \quad f = cM\dot{V}$$

som innsatt i "translasjonslign." gir

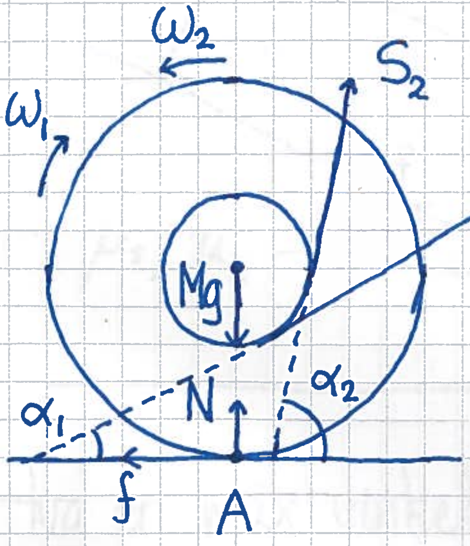
$$Mg\sin\beta - cM\dot{V} = M\dot{V}, \quad \text{dvs} \quad \underline{\dot{V} = \frac{g\sin\beta}{1+c}}, \quad \text{som s. 63.}$$

Eks 2: Rulling mot høyre eller venstre?



S = snordrag i snor viklet opp rundt "akslingen" på snella

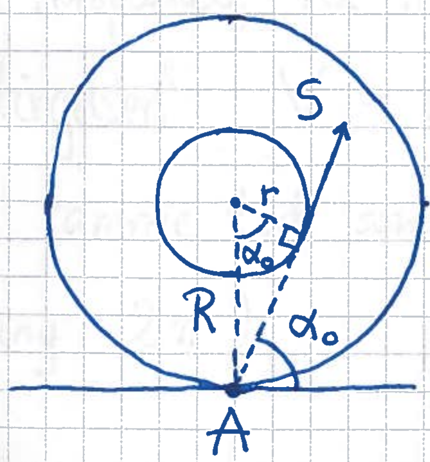
"Triks": Velg kontaktlinja mellom snelle og gulv som referanseakse A.



Mg, N og f har alle <u>null arm</u> mhp aksen A
$\Rightarrow$ kun snordrag S har dreiemoment mhp aksen A

S_1 : liten α, rulling mot høyre
S_2 : stor α, ——"—— venstre

Hvis $\vec{S}$ går gjennom A, har vi statisk likevekt:

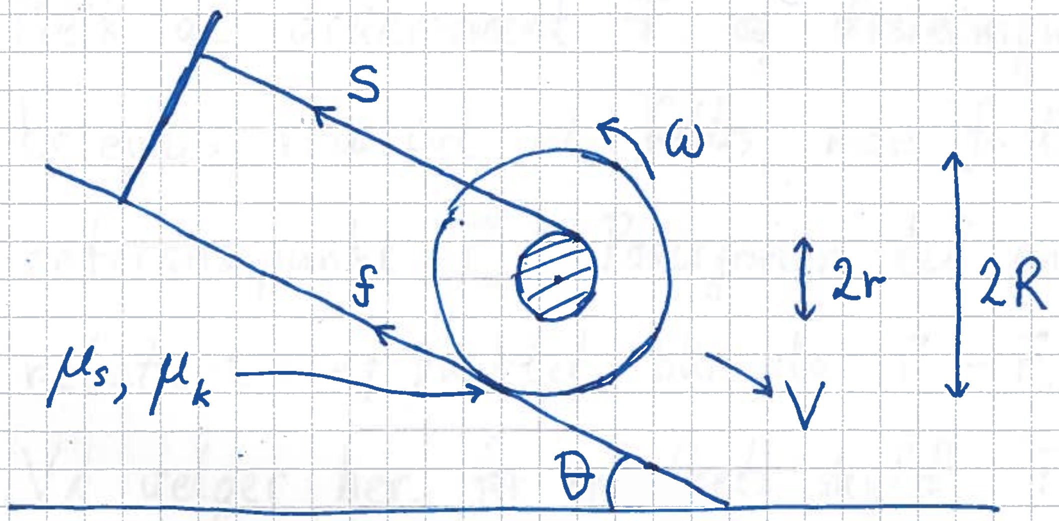


$$\sum \tau_A = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\dot{\omega} = 0$$
$$\Downarrow$$
ingen rotasjon

Fra figuren ser vi at

$$\cos \alpha_0 = r/R$$

Eks 3: Snelle på skråplan (Øv. 6)



Hva er max vinkel θ_0 uten at snella slurer "baklengs" nedover?

Tips: N1 ∥ skråplanet, N1 rot. om CM, $f = f_{max} = \mu_s N$

Hvis $\theta > \theta_0$, hva blir snordraget S og akselerasjonen a?

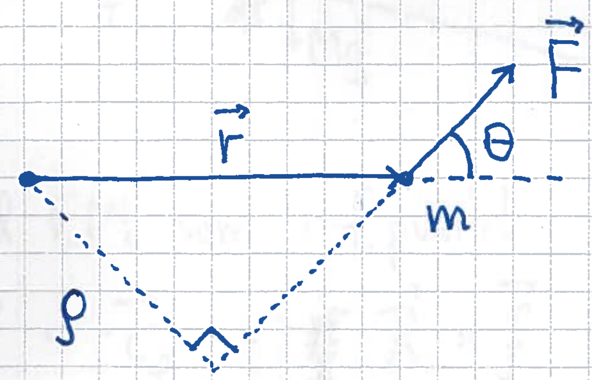
Tips: N2 ∥ skråplanet, N2 rot. om CM, $f = \mu_k N$, og "rullebetingelsen" $V = \omega r$ (da translasjon $2\pi r$ tar samme tid som én omdreining, dvs vinkelendring 2π).

Tredimensjonal rotasjonsdynamikk

Merk at dreiemoment $\vec{\tau}$ og dreieimpuls $\vec{L}$ beregnes relativt et felles, men fritt valgt, referansepunkt $\vec{r}_0$. Posisjonen til en punktmasse, relativt ref. punktet, blir da $\vec{r} - \vec{r}_0$.

Vi velger her, for enkelhets skyld, $\vec{r}_0 = 0$.

Dreiemoment [YF 10.1 ; LL 5.5, 6.4]



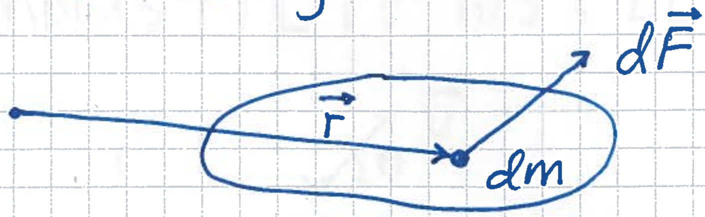
Kraftens dreiemoment på m : $\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$

Retning: $\vec{\tau} \perp \vec{r}$ og $\vec{F}$; her ut av planet

Abs. verdi : $\tau = r \cdot F \cdot \sin\theta = \rho \cdot F$;

som s. 67, "arm × kraft".

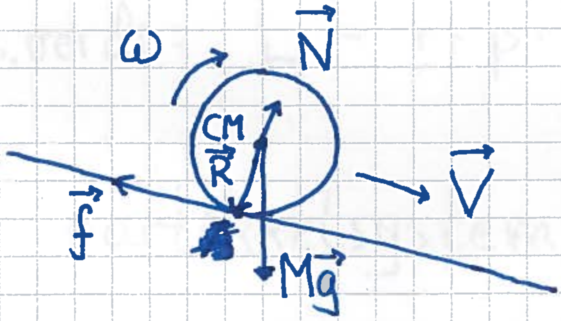
For partikkelsystem:



$$d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F}$$

$$\vec{\tau} = \int d\vec{\tau} = \int \vec{r} \times d\vec{F}$$ = totalt dreiemoment på systemet

Eks: Rullende kule (se s. 69)



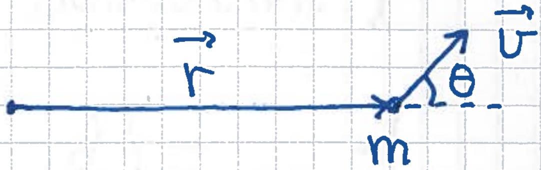
Med CM som ref.punkt: $\vec{\tau}_N = \vec{\tau}_g = 0$

$\Rightarrow \vec{\tau} = \vec{\tau}_f = \vec{R} \times \vec{f}$ = vektor <u>inn</u> i planet,

med abs.verdi $\tau = R \cdot f$, da $\vec{R} \perp \vec{f}$.

Vi noterer oss at $\vec{\omega}$ og $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$ her også er vektorer <u>inn</u> i planet.

Dreieimpuls [YF 10.5 ; LL 6.6]



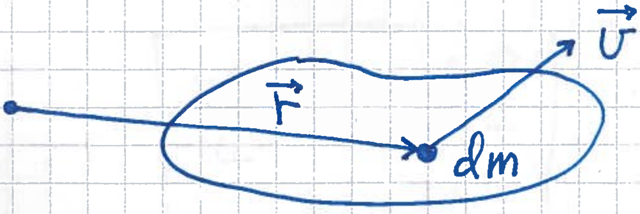
$\vec{p} = m\vec{v}$

Massens dreieimpuls : $\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$

Retning: $\vec{L} \perp \vec{r}$ og $\vec{p}$ (her: ut av planet)

Abs.verdi: $L = r \cdot p \cdot \sin\theta$

For partikkelsystem:

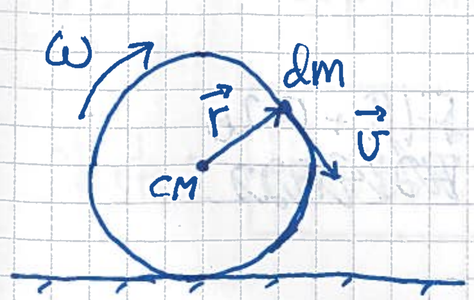


$d\vec{p} = dm \cdot \vec{v}$

$d\vec{L} = \vec{r} \times d\vec{p}$

$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{r} \times d\vec{p}$ = systemets totale dreieimpuls

Eks: Rullende ring ; CM som ref. punkt



$$d\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}\, dm = r \cdot v \cdot dm \cdot \hat{\omega}$$
$$= r \cdot r\omega \cdot dm \cdot \hat{\omega} = dm \cdot R^2 \cdot \vec{\omega}$$
$$\Rightarrow \vec{L} = MR^2 \vec{\omega} = I_0 \vec{\omega}$$

$\hat{\omega}$ inn i planet

N2 for rotasjon [YF 10.5 ; LL 6.6]

("spinnsatsen")

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\vec{r} \times m\vec{v}\right\} = m\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}}_{= \vec{v} \times \vec{v} = 0} + m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= \vec{r} \times (m\vec{a}) \overset{N2}{=} \vec{r} \times \vec{F} = \underline{\vec{\tau}}$$

(som generaliseres til partikkelsystem på tilsvarende vis som s. 73 og s. 74)

Altså: $$\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

med $\vec{\tau}$ = netto ytre dreiemoment på systemet
$\vec{L}$ = systemets totale dreieimpuls

Jf. $\vec{F} = d\vec{p}/dt$; N2 for translasjon

Merk: $\boxed{\text{Hvis } \vec{\tau} = 0, \text{ er } \vec{L} \text{ bevart}}$

Total $\vec{L}$ for stivt legeme [YF 10.5; LL 6.6]

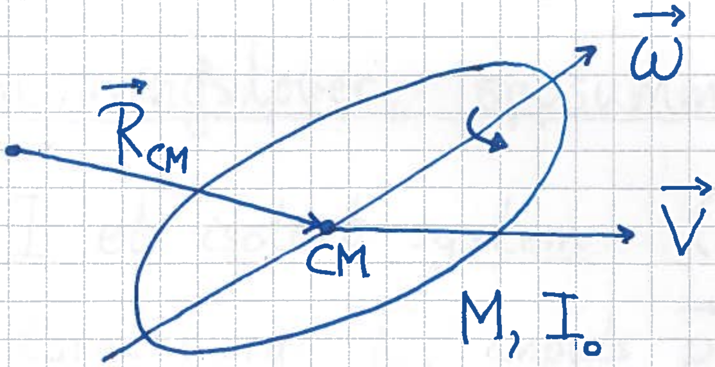
- Fra def. følger at for punktmasse M i avstand $\vec{R}_{CM}$ fra ref.punktet (= origo), og med hastighet $\vec{V}$, er $\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}$.

- Eks. side 74 antyder at stivt legeme med treghetsmoment I_0 mhp akse gjennom CM, og med vinkelhastighet ω om denne aksen, dvs $\vec{\omega}$ langs samme akse gjennom CM, har dreieimpuls $\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega}$ mhp CM.

- Det kan vises (se utlagt notat) at for stivt legeme med refleksjonssymmetri(*) om rotasjonsaksen er total dreieimpuls

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{L}_b + \vec{L}_s \\ &= \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} + I_0 \vec{\omega}\end{aligned}}$$

(*) Symmetrisk når $\vec{\rho} \to -\vec{\rho}$



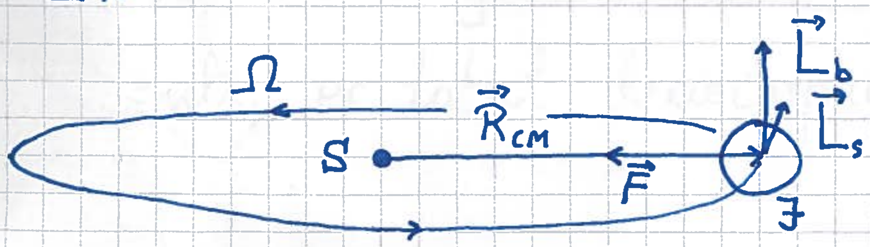
Banedreieimpuls, pga bevegelsen til CM:

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}$$

Indre dreieimpuls ("spinn"), pga rotasjon om CM:

$$\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega}$$

Eks: Jordas $\vec{L}$ relativt sola



$$\vec{\tau} = \vec{R}_{CM} \times \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = \text{konstant}$$

$$L_b = R_{CM} M V = R_{CM}^2 M \Omega \sim (1.5 \cdot 10^{11}\,\text{m})^2 \cdot 6 \cdot 10^{24}\,\text{kg} \cdot \frac{2\pi}{1\,\text{år}}$$

$$\sim 2.7 \cdot 10^{40}\ \text{Js}$$

$$L_s = I_0 \omega \approx \tfrac{1}{3} M R^2 \omega$$

$$\sim \tfrac{1}{3} \cdot 6 \cdot 10^{24}\,\text{kg} \cdot (6.37 \cdot 10^6\,\text{m})^2 \cdot \frac{2\pi}{1\ \text{døgn}} \sim 6 \cdot 10^{33}\ \text{Js}$$

$$\Rightarrow L \approx L_b$$

Bevaringslover, oppsummert

- I et isolert system (ingen ytre krefter) er total energi E, impuls $\vec{p}$ og dreieimpuls $\vec{L}$ bevart.

- I et konservativt system er mekanisk energi $K + U$ bevart.

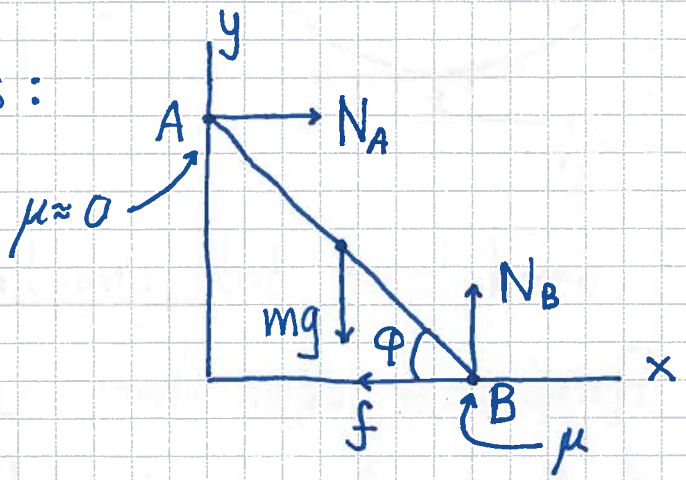
- Hvis netto ytre kraft på et system er null, er total impuls $\vec{p}$ bevart.

- Hvis netto ytre dreiemoment på et system er null, er total dreieimpuls $\vec{L}$ bevart.

Statisk likevekt [YF 11.1-11.3; LL 7.1]

Et stivt legeme forblir i ro, med $\vec{p} = 0$ og $\vec{L} = 0$, bare dersom netto ytre kraft og netto ytre dreiemoment begge er lik null.

Eks:



Når glir stigen?

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow f = N_A \quad ; \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow N_B = mg$$

$$\sum \tau_B = 0 \Rightarrow mg \frac{L}{2} \cos\varphi - N_A L \sin\varphi = 0$$

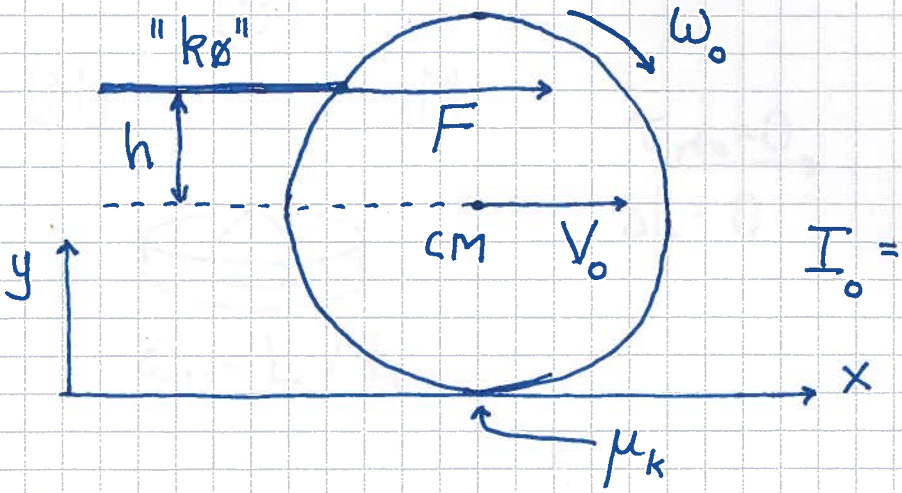
$$f_{max} = \mu N_B = \mu mg \quad ; \quad f = N_A$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cos\varphi_{min} = \mu \sin\varphi_{min} \Rightarrow \tan\varphi_{min} = \frac{1}{2\mu}$$

Hvis $\mu = 0.3$, er $\varphi_{min} = \arctan\left\{\frac{1}{0.6}\right\} \approx 59°$

Rotasjonsdynamikk ; eksempler.

Eks 1 : Snooker [LL 6.7 ; Øv. 6]



$I_0 = \frac{2}{5} MR^2$

Kortvarig støt med køen, $\Delta t \gtrsim 0$, i høyde h over senterlinja med kraft $F \gg f$; f = friksjonskraft fra underlaget.

N2, trans. : $F \Delta t = \Delta p = MV_0$

N2, rot. om CM : $\tau \Delta t = F h \Delta t = \Delta L = I_0 \omega_0$

$\Rightarrow$ Sluring i starten, med mindre $h = \dots$

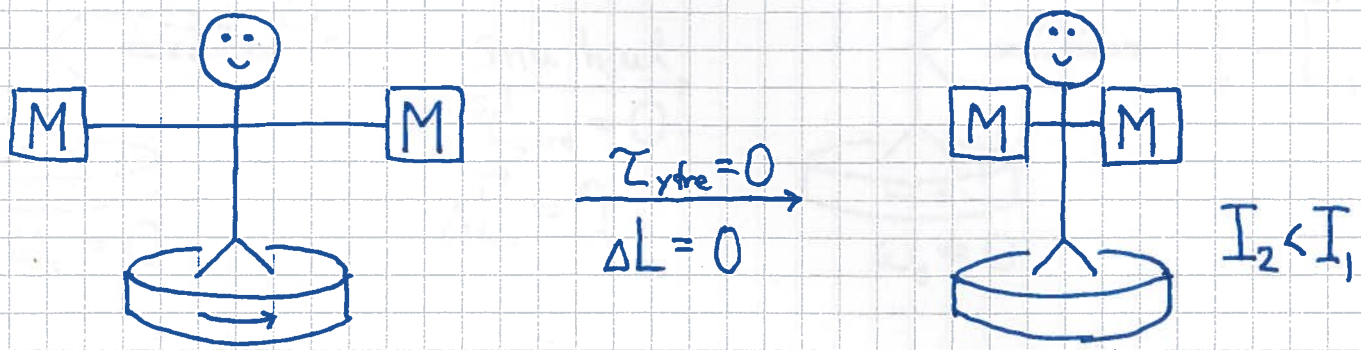
Ren rulling etter hvert, uansett h-verdi.

Med origo som ref. punkt :

$$\left.\begin{aligned} \vec{L}_b &= \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} = -RMV\,\hat{z} \\ \vec{L}_s &= I_0\,\vec{\omega} = -\tfrac{2}{5} RMV\,\hat{z} \end{aligned}\right\} \text{ ved ren rulling}$$

Eks 2: Piruett [YF 10.6; LL 6.5]

Prinsipp: Bevart $L = I\omega$, redusert I, økt ω.



$\omega_1 = L/I_1$ $\qquad\qquad$ $\omega_2 = L/I_2 > \omega_1$

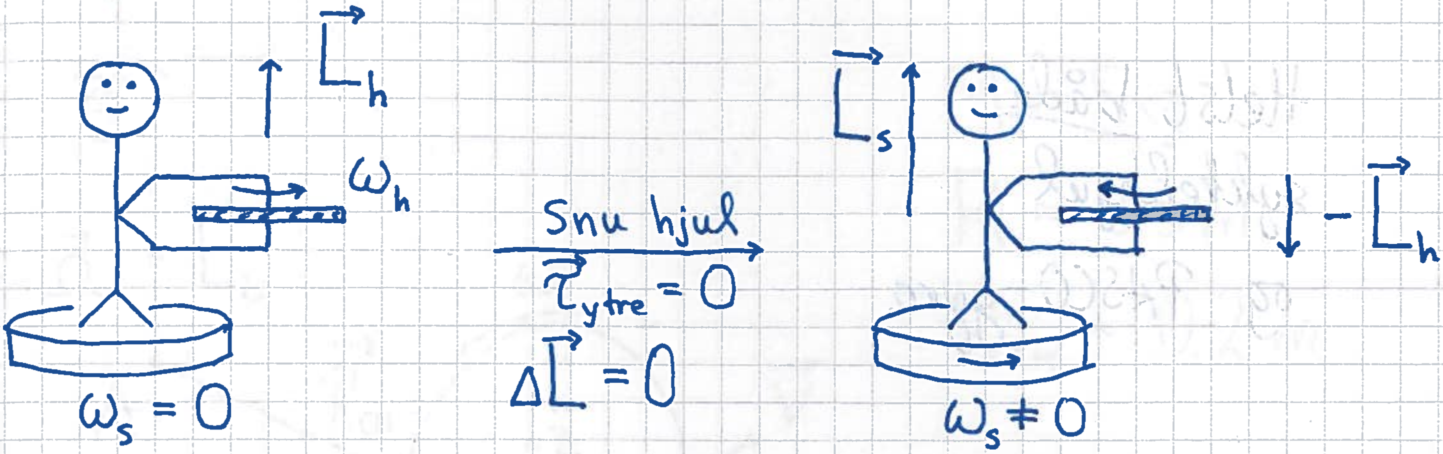
K_{rot} øker:

$$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1 \cdot \omega_2 = K_1 \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1} > K_1$$

Musklene gjør arbeid på de to massene M.

Eks 3: Student med roterende hjul



$\vec{L}$ er bevart.

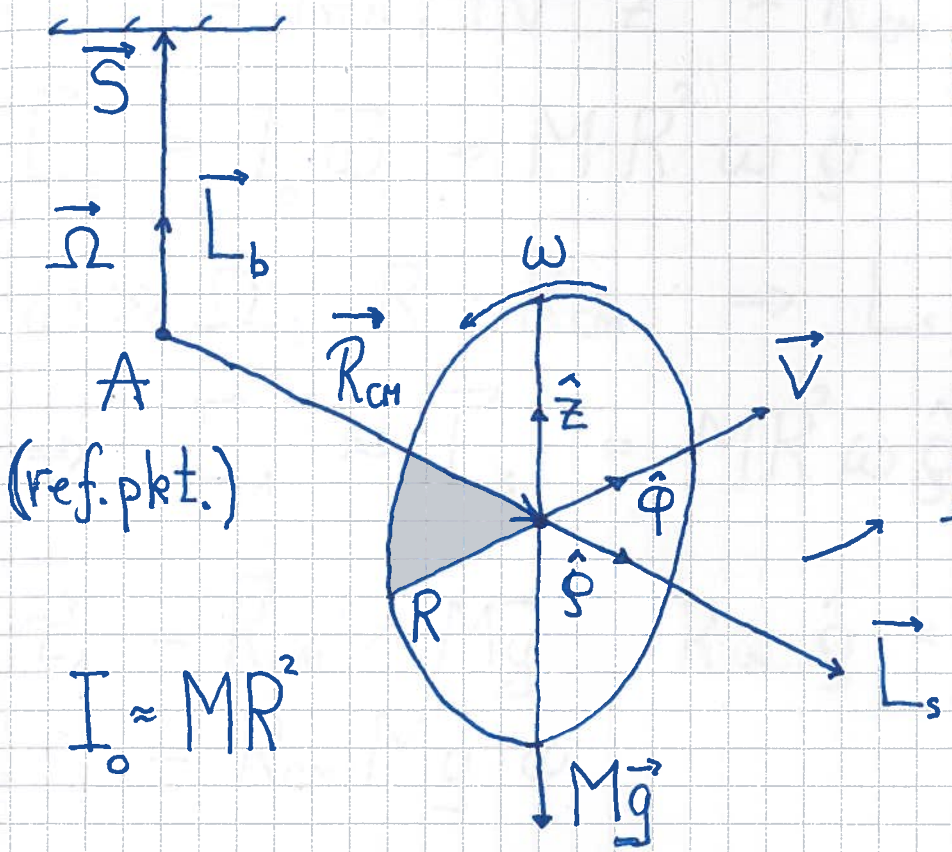
Før : $\vec{L} = \vec{L}_h$

Etter : $\vec{L} = \vec{L}_s - \vec{L}_h$

$\Rightarrow \quad \vec{L}_s = 2\vec{L}_h$

$\Rightarrow \quad \omega_s \neq 0$

Eks 4: Presesjon [YF 10.7 ; LL 6.10]



$M \approx 5\,\text{kg}$

$R \approx 0.3\,\text{m}$

$R_{CM} \approx 0.2\,\text{m}$

$\Omega \ll \omega$

Exp: $T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 5\,\text{s}$ når hjulet settes i rotasjon for hånd.

Finn sammenheng mellom ω og Ω.

Løsning: N2 for rotasjon om A.

$$\vec{\tau}_A = d\vec{L}_A/dt$$

med $\vec{L}_A = \vec{L}_b + \vec{L}_s$

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} = R_{CM}\,\hat{\rho} \times MV\hat{\varphi}$$
$$= R_{CM} MV\,\hat{z} = R_{CM}\,M\,R_{CM}\,\Omega\,\hat{z}$$

$$\vec{L}_s = I_0\,\vec{\omega} \approx MR^2\omega\,\hat{\rho}$$

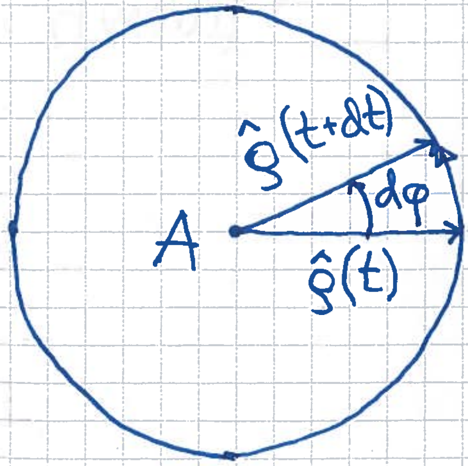
$$\omega \gg \Omega,\quad R \sim R_{CM} \implies L_s \gg L_b$$

$$\implies \vec{L}_A \approx \vec{L}_s \approx MR^2\omega\,\hat{\rho}$$

$$\vec{\tau}_A = \vec{R}_{CM} \times M\vec{g} = R_{CM}\,\hat{\rho} \times (-Mg\,\hat{z})$$
$$= R_{CM}\,Mg\,\hat{\varphi}$$

$$d\vec{L}_A/dt = MR^2\omega\;d\hat{\rho}/dt$$

Sett ned langs z-aksen:



$$d\hat{\rho} = \underbrace{|\hat{\rho}|}_{=1}\cdot d\varphi \cdot \hat{\varphi} = d\varphi\,\hat{\varphi}$$

$$\implies \frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\cdot\hat{\varphi} = \Omega\cdot\hat{\varphi}$$

Dermed:

$$R_{CM} M g \, \hat{\varphi} = M R^2 \omega \Omega \, \hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow \quad \omega = R_{CM} g / R^2 \Omega$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\pi}{T_\omega} = \frac{R_{CM} g T_\Omega}{R^2 \cdot 2\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{T_\omega = \frac{(2\pi R)^2}{R_{CM} g T_\Omega}}$$

Tallverdi:

$$T_\omega \approx \frac{(2\pi \cdot 0.3)^2}{0.2 \cdot 10 \cdot 5} \approx \frac{2^2}{10} = \underline{0.4 \text{ s}}$$

dvs ca 2.5 omdreininger pr sekund; rimelig!

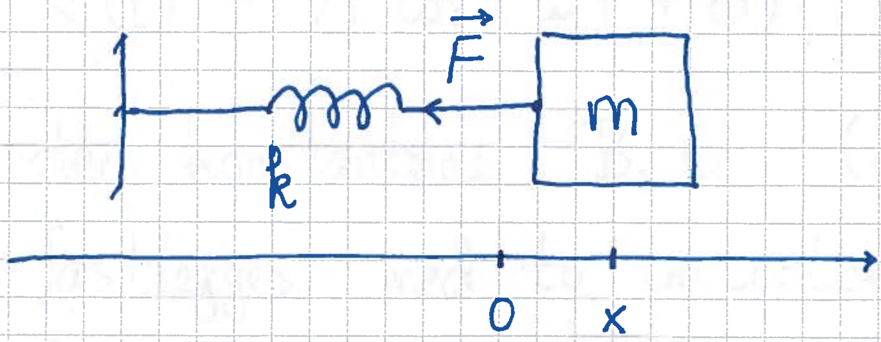
Svingninger [YF 14 ; LL 9]

Generelt: Periodisk oppførsel omkring en likevekt.

En kraft trekker systemet tilbake mot likevekt. (Eng: "restoring force")

Eks: Masse/fjær. Pendler. Fiolinstreng. Atomer i molekyler og faste stoffer. Osv.

Harmonisk oscillator [YF 14.2; LL 9.1-9.3]



Likevekt ($F = 0$) når m er i posisjon $x = 0$.

x = posisjonen til m

= fjæras forlengelse ($x > 0$) eller sammenpressing ($x < 0$)

$\vec{F}$ = kraft på m fra fjæra; retning tilbake mot likevekt

Ideell fjær oppfyller Hookes lov:

$$\boxed{\vec{F} = -kx\hat{x}}$$

k = fjærkonstanten

$[k] = N/m$

N2: $-kx = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = k/m}$$

som er bevegelseslignings for harmonisk oscillator i 1D, med løsning

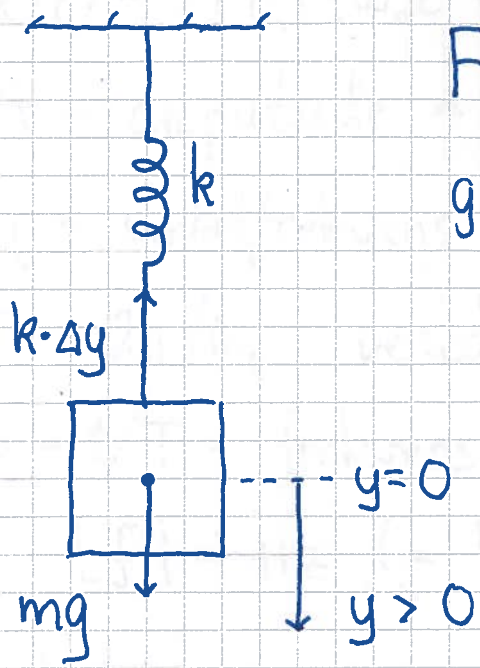
$$x(t) = B\cos\omega_0 t + C\sin\omega_0 t, \quad \text{evt.}$$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

der konstantene B, C (evt. A, φ) fastlegges med to initialbetingelser, f.eks. $x(0) = x_0$ og $\dot{x}(0) = v_0$

En konstant tilleggskraft forandrer likevektsposisjonen, men gir uendret bevegelseslignings.

Eks: Masse og fjær i tyngdefeltet



Fjærforlengelse i likevekt, Δy, gitt ved N1:

$$k \cdot \Delta y = mg \quad \Rightarrow \quad \Delta y = mg/k$$

Anta m (CM) i $y=0$ i strukket likevekt.

N2 når m er i posisjon y:

$$m\ddot{y} = mg - k(\Delta y + y) = -ky$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = k/m$$

dvs harmoniske svingninger omkring den strukkede likevekten

Diverse størrelser (jf. sirkelbevegelse):

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ = utsving fra likevekt

A = amplitude = max utsving fra likevekt; $[A] = [x]$

ω_0 = vinkelfrekvens = faseendring pr tidsenhet; $[\omega_0] = \frac{1}{s}$

$T = 2\pi/\omega_0$ = periode = tid pr hel svingning; $[T] = s$

$f = 1/T$ = frekvens = antall svingninger pr tidsenhet;
$[f] = Hz$ $(= 1/s)$

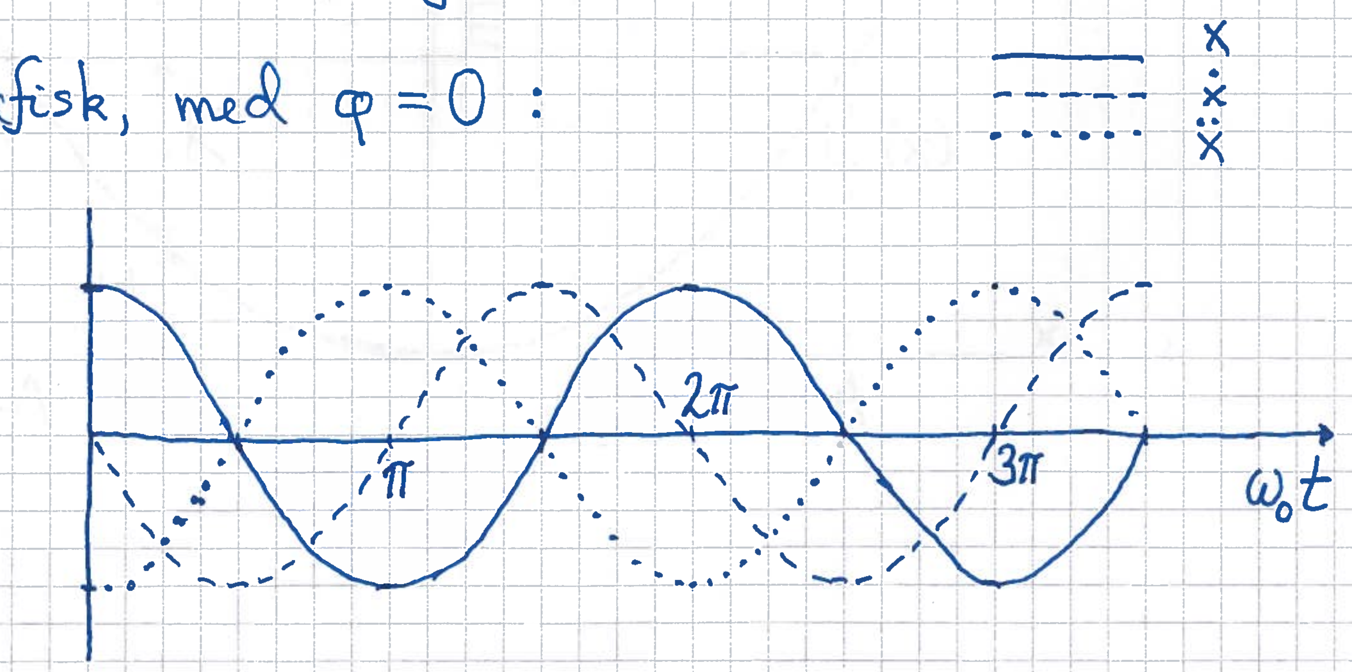
$\omega_0 t + \varphi$ = svingningens fase

φ = fasekonstant ; $[\varphi] = 1$

$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin \omega_0 t = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2)$
= hastighet

$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 A \cos \omega_0 t = \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)$
= akselerasjon

Grafisk, med $\varphi = 0$:



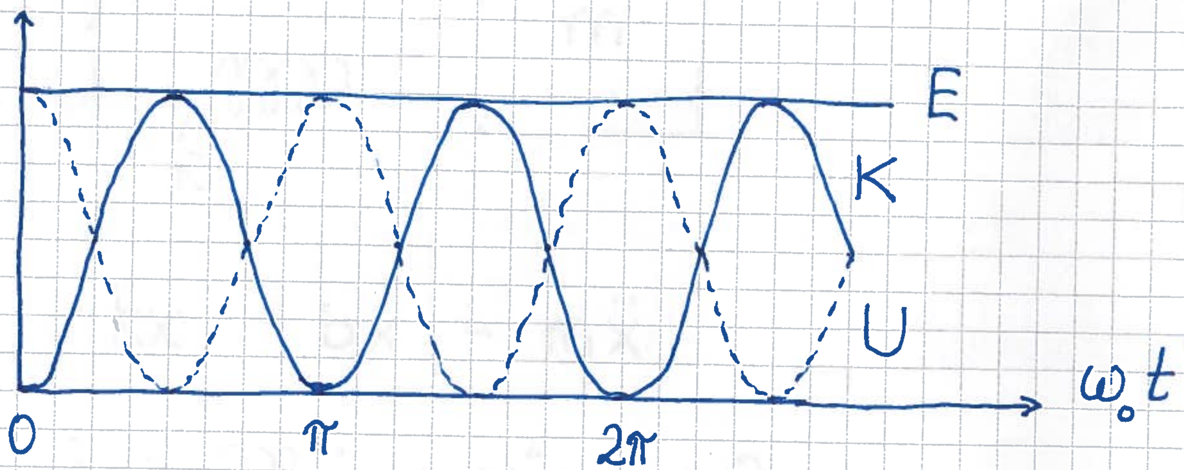
Energi i en harmonisk oscillator [YF 14.3; LL 9.4]

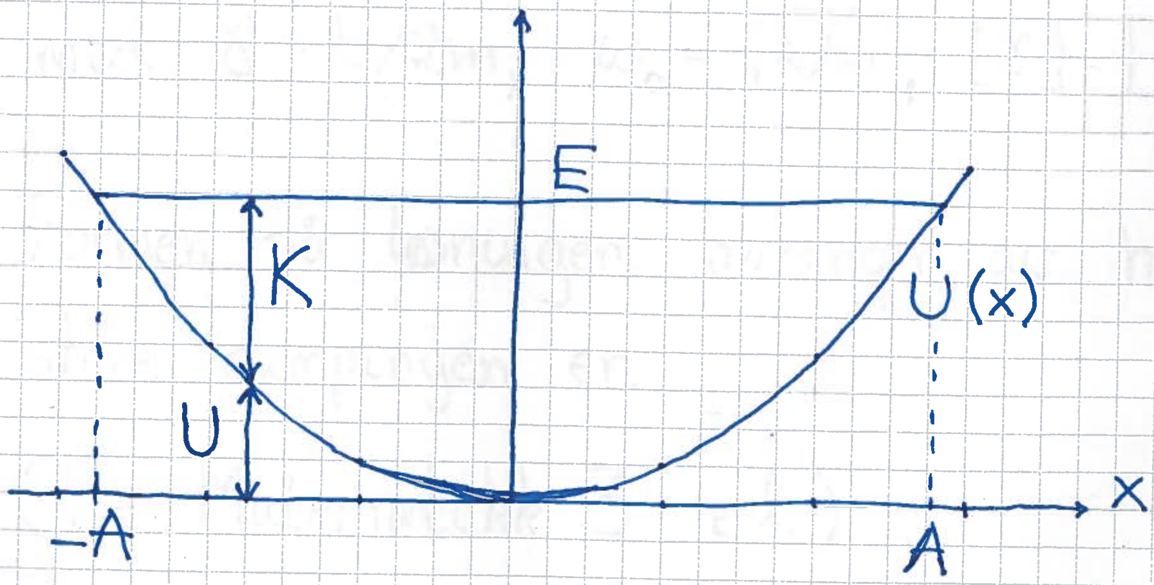
Konservativt system $\Rightarrow$ Mek. energi er bevart

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$U = -\int_0^x (-kx) \cdot dx = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2 \omega_0 t$$

$$\Rightarrow E = K + U = \frac{1}{2} k A^2 \quad (\text{uavh. av } t)$$

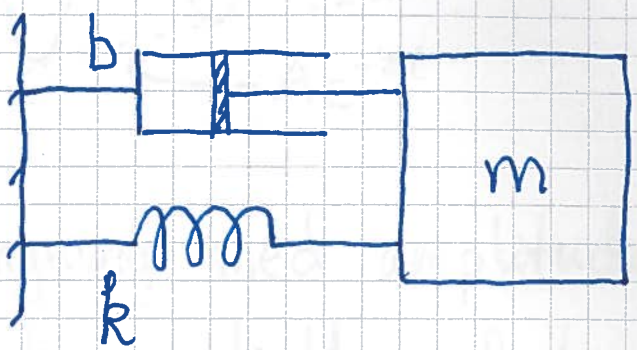




Dempet fri svingning [YF 14.7 ; LL 9.7]

Antar friksjonskraft $f = -b\dot{x}$, dvs som ved langsom bevegelse i fluid.

(Alternativ : $f = -D\dot{x}^2$ eller $f = \mu_k N$)



N2: $-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

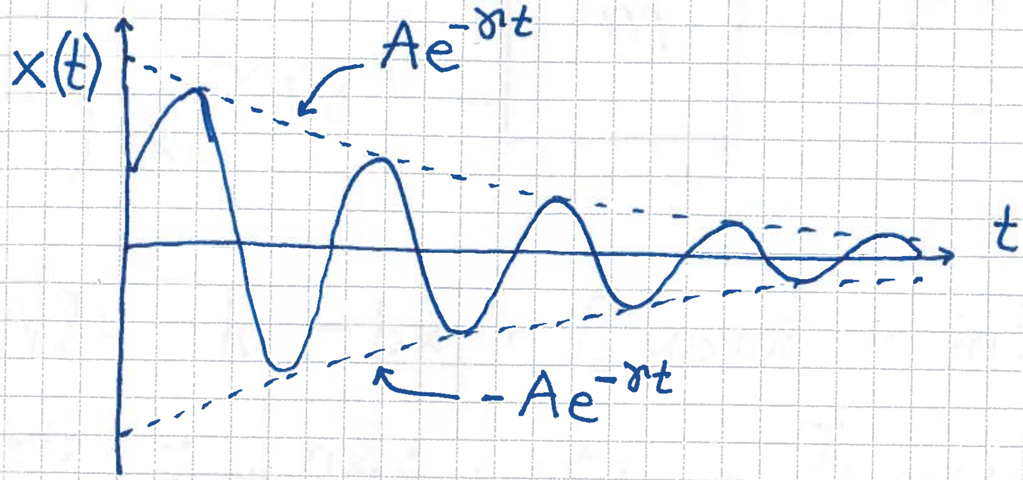
med $\gamma = b/2m$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$; $[\gamma] = [\omega_0] = \frac{1}{s}$

Formen på løsningen avhenger av hvor sterk dempingen er.

(Se Matematikk 3 e.l.)

Underkritisk (svak) demping ; $\gamma < \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) \; ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$



dvs svingning med amplitude, $A e^{-\gamma t}$, som avtar eksponentielt med t ; etter en "karakteristisk" tid $\tau = 1/\gamma$ er amplituden redusert til $A/e \approx 0.37\,A$.

Overkritisk (sterk) demping ; $\gamma > \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t}$$

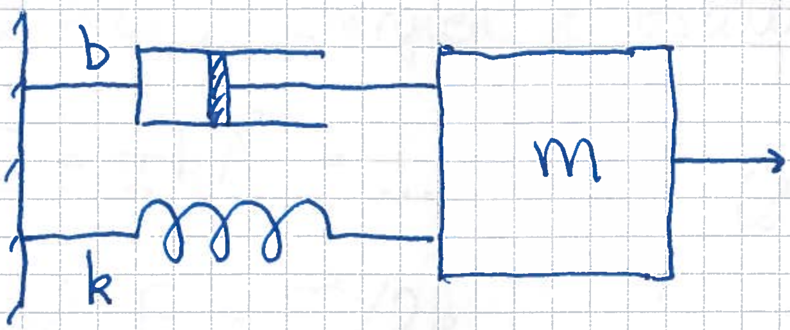
$$\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \; , \quad \alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Kritisk demping, $\gamma = \omega_0$ $(\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \gamma)$

$$x(t) = (A + Bt)\, e^{-\gamma t}$$

Minste demping som ikke gir svingninger ; bra f.eks. i støtdempere.

Tvungen svingning; resonans [YF 14.8; LL 9.9]



$F = F_0 \cos \omega t$
$=$ ytre harmonisk kraft

N2: $-kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$

$\rightarrow \quad \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \qquad \left(\begin{array}{l} \gamma = b/2m \\ \omega_0 = \sqrt{k/m} \end{array} \right)$

Generell løsning: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

der "homogen" løsning x_h oppfyller

$$\ddot{x}_h + 2\gamma \dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$$

slik at $x_h \sim \exp(-\gamma t) \rightarrow 0$ når $t \gg 1/\gamma$. Dvs, $x_h(t)$ er kun viktig for innsvingningsforløpet.

Antar nå at $t \gg 1/\gamma$, slik at

$$x(t) = x_p(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$

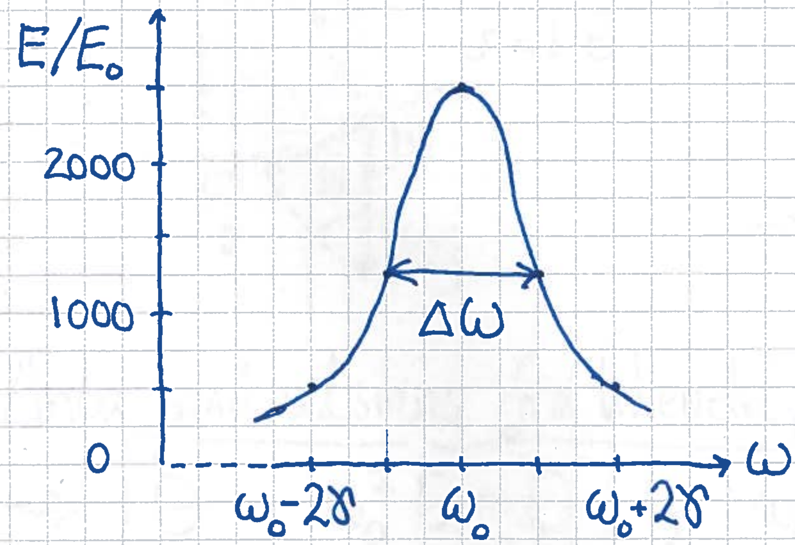
Innsetting av x_p, $\dot{x}_p$ og $\ddot{x}_p$ i N2 gir

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\left[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2\right]^{1/2}} \quad ; \quad \tan \varphi(\omega) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}$$

Resonans: A blir stor hvis $\gamma \ll \omega_0$ og $\omega \approx \omega_0$. Energien i oscillatoren:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \dots = E_0 \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$$

med $E_0 = F_0^2/2k$.



Eks: $\omega_0 = 100\,\gamma$

ω	E/E_0
ω_0	2500
$\omega_0 \pm \gamma$	1250
$\omega_0 \pm 2\gamma$	500

Resonanskurvens halvverdibredde: $\Delta\omega \approx 2\gamma$

Oscillatorens Q-faktor: $Q \equiv \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega} \approx \dfrac{\omega_0}{2\gamma}$

Smal resonanskurve $\Rightarrow$ Høy Q-faktor

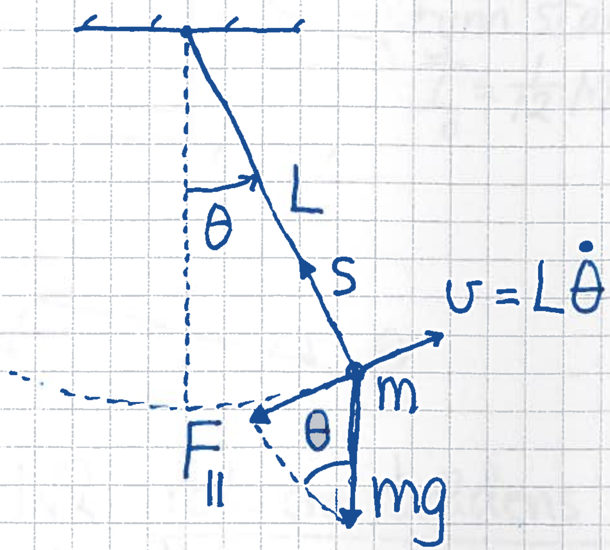
Demo: $T_0 \approx 0.65\,\text{s}$, $f_0 \approx 1.55\,\text{Hz}$, $\Delta f \approx 0.15\,\text{Hz}$

$\Rightarrow Q \approx 10$

Pendler

Matematisk pendel [YF 14.5 ; LL 9.6]

Punktmasse m i masseløs snor med lengde L.



$F_{\parallel} = m a_{\parallel}$ med

$F_{\parallel} = -mg\sin\theta$,

$a_{\parallel} = \dot{v} = L\ddot{\theta}$

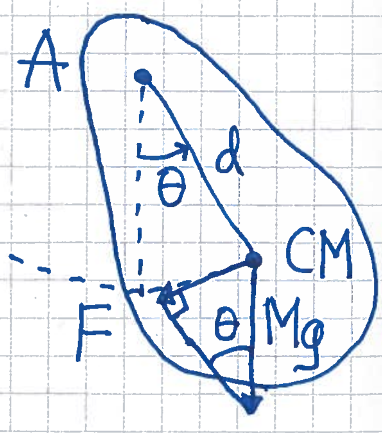
$\Rightarrow -mg\sin\theta = mL\ddot{\theta}$

Anta små utsving fra likevekt, $|\theta| \ll 1 \Rightarrow \sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = g/L}$$

Fysisk pendel [YF 14.6 ; LL 9.6]

Stivt legeme, masse M, treghetsmoment I mhp A.



N2, rotasjon om A:

$\tau = I\ddot{\theta}$ med

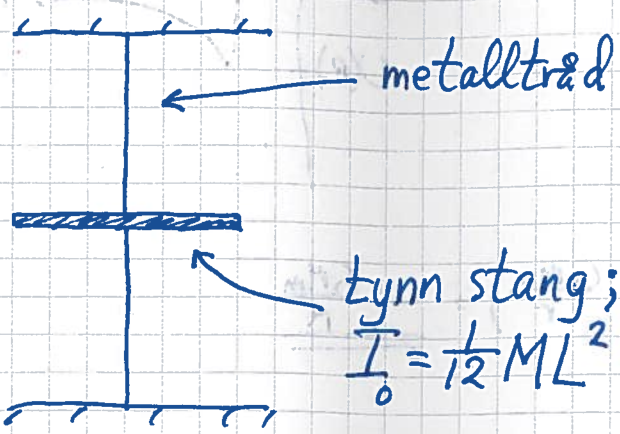
$\tau = -F \cdot d = -Mgd\sin\theta$

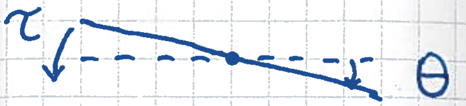
($\tau > 0$ mot klokka)

Anta $|\theta| \ll 1 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = Mgd/I}$

$(\Rightarrow \sin\theta = \theta)$

Torsjonspendel [YF 14.4; LL 9.6]





Vridning vinkel θ av metalltråden gir dreiemoment $\tau = -\varkappa \theta$ på stanga; $\varkappa =$ torsjonsstivheten til metalltråden

N2, rot. om trådens akse: $\tau = I_0 \ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = \varkappa / I_0}$$

Demo: $M = 50\,\mathrm{g}$, $L = 11\,\mathrm{cm}$, $T = 0.8\,\mathrm{s}$

$$\Rightarrow \varkappa = I_0 \omega_0^2 = \frac{1}{12} M L^2 \cdot (2\pi / T)^2$$

$$= M L^2 \pi^2 / 3T^2 \approx \underline{0.003\,\mathrm{Nm}}$$