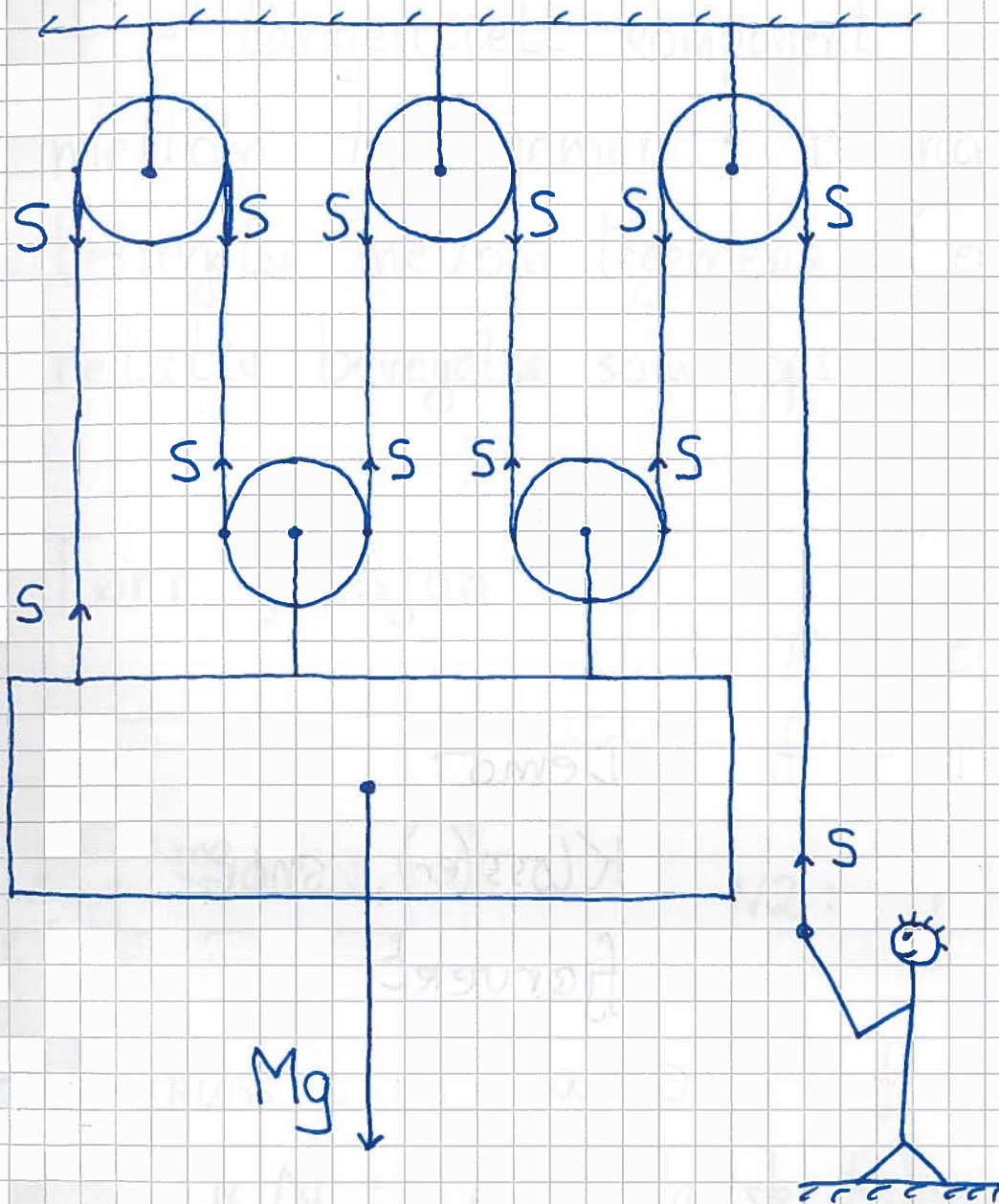


Talje :

19



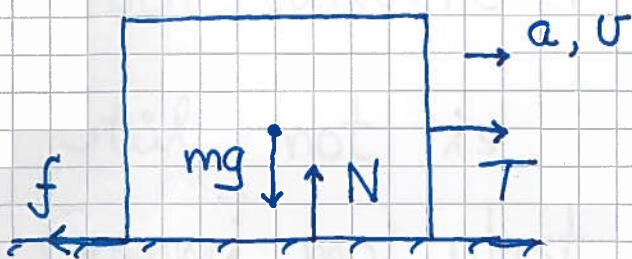
N1 for kassa : $5S - Mg = 0$

$$\Rightarrow \underline{S = \frac{1}{5} Mg}$$

Friksjonskrefter : [YF 5.3 ; LL 3.1] (20)

f = tangentiell komponent av kontaktkraft mellom to legemer ; retning mot relativ bevegelse mellom legemene (ert: mot relativ bevegelse som oppstår uten friksjon)

Tørr friksjon



T = trekk-kraft

f = friksjonskraft

$$N2: T - f = ma$$

Hvis kloss i ro ($a = 0$) : $f = T$;

$f_{\max} = \mu_s N$; μ_s = statisk friksjonskoeffisient

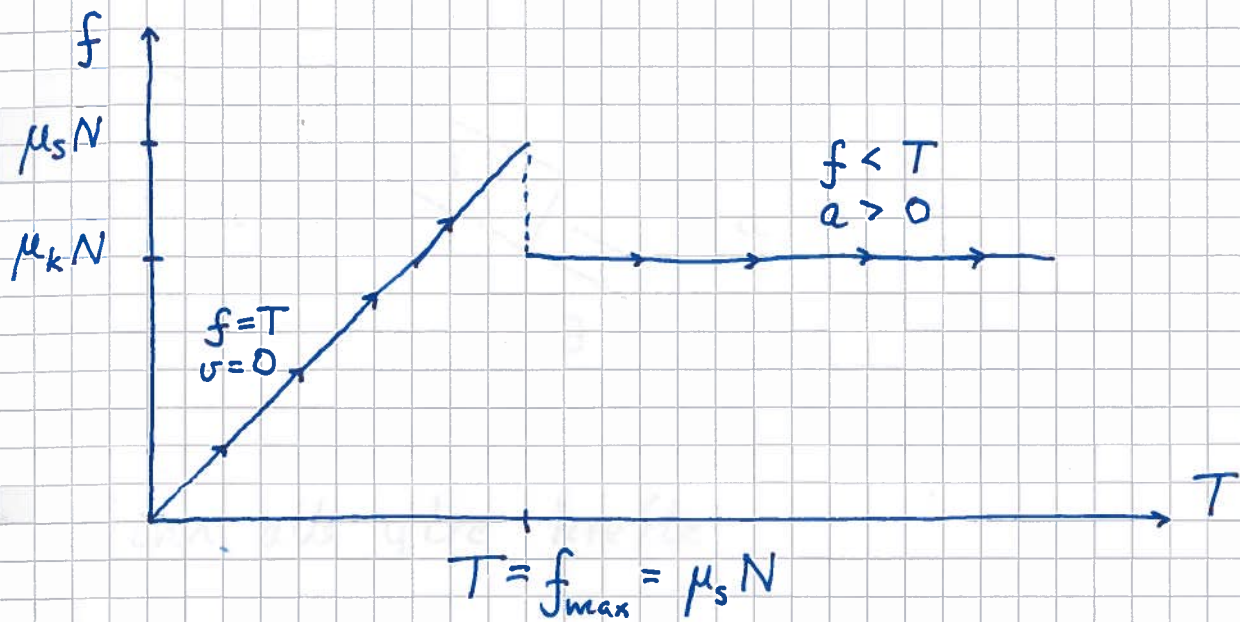
Klossen glir hvis $T > f_{\max}$; da er

$f = \mu_k N$; μ_k = kinetisk friksjonskoeffisient

Som regel er $\mu_k \lesssim \mu_s$: ujevnheter i overflatene gir best grep når $v = 0$

Grafisk, $f(T)$:

(21)



Noen tallverdier:

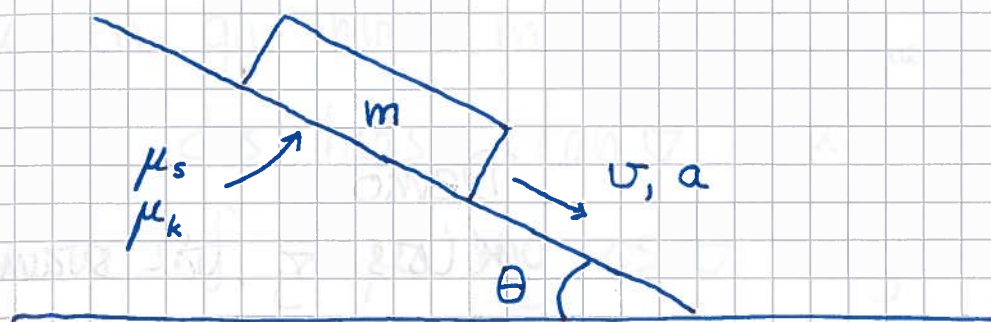
Stål mot is $\mu_s \approx 0.03$

Gummi mot plast $\mu_s \sim 1$

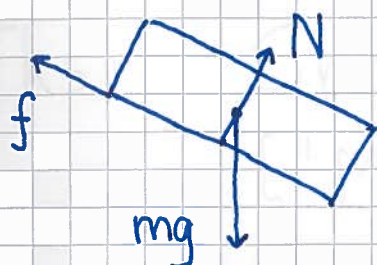
Våt svamp mot bordplate $\mu_s > 1$

Eks (inkl problemløsningsstrategi):

(22)



- Finn alle ytre krefter



"fritt-legeme-diagram"

- Velg koordinatsystem. Dekomponer.



$$N = N_{\perp}, \quad N_{\parallel} = 0, \quad f = f_{\parallel}, \quad f_{\perp} = 0$$

$$G_{\perp} = mg \cos \theta, \quad G_{\parallel} = mg \sin \theta$$

- Bruk N1 ($\sum_i \vec{F}_i = 0$) eller N2 ($\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i / m$)

$$N1, \perp : \quad N = mg \cos \theta$$

$$N2, \parallel : \quad mg \sin \theta - f = ma$$

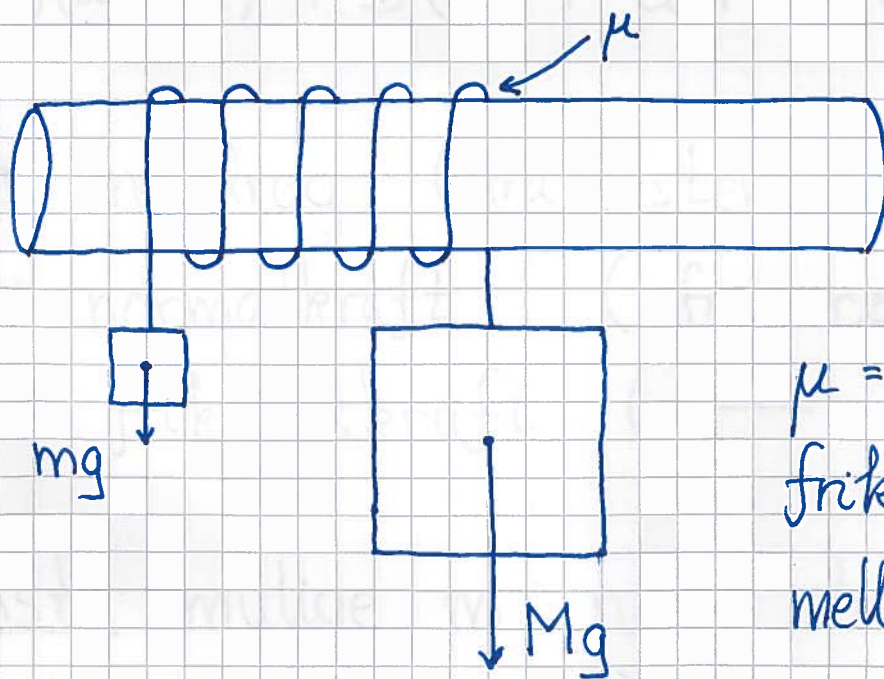
Hvis kloss i ro : $f = mg \sin \theta$ ($a=0$) (23)

Klossen glir hvis $mg \sin \theta > f_{\max} = \mu_s mg \cos \theta$
dvs hvis $\tan \theta > \mu_s$

Da er $f = \mu_k mg \cos \theta$ og
 $a = g (\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$

Eks : Snorfriksjon

["Med livet som innsats", youtube/nrk]



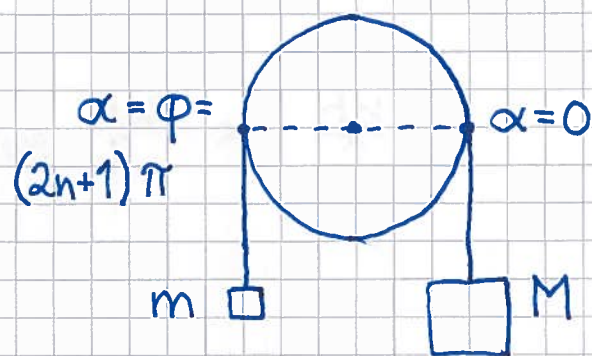
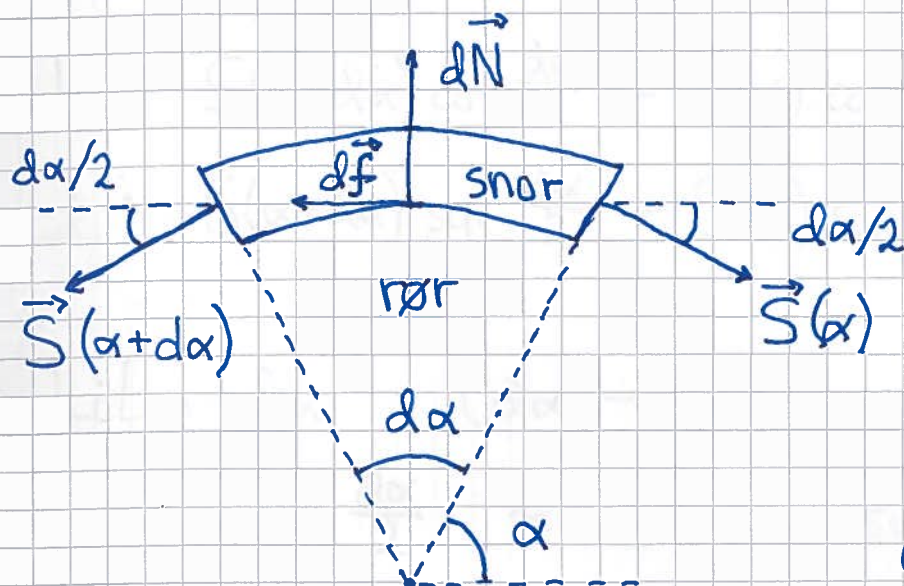
μ = statisk
friksjonskoeff.
mellom snor og rør

Bestem minste m som holder M oppe
med kontaktvinkel φ mellom snor og rør.

I figuren er $\varphi = 9\pi$.

Løsn: N1 for liten snorbit

(24)



$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{S}(\alpha+d\alpha) + \vec{S}(\alpha) + d\vec{N} + d\vec{f} = 0$$

$\vec{S}$ = snordrag (fra resten av snora)

$d\vec{N}$ = normalkraft (fra røret)

$d\vec{f}$ = friksjonskraft (— || —)

Minste mulige m når statisk friksjon er størst mulig, dvs

$$df = df_{\max} = \mu \cdot dN$$

Dekomponerer :

$$\parallel : S(\alpha + d\alpha) \cos \frac{d\alpha}{2} - S(\alpha) \cos \frac{d\alpha}{2} + \mu dN = 0$$

$$\perp : S(\alpha + d\alpha) \sin \frac{d\alpha}{2} + S(\alpha) \sin \frac{d\alpha}{2} - dN = 0$$

Liten $d\alpha$ ($d\alpha \rightarrow 0$) :

$$\cos \frac{d\alpha}{2} \approx 1, \quad \sin \frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$$

$$S(\alpha + d\alpha) - S(\alpha) = dS$$

$$S(\alpha + d\alpha) + S(\alpha) = 2S$$

Dermed :

$$dS = -\mu dN, \quad S d\alpha = dN$$

$$\Rightarrow dS/S = -\mu d\alpha$$

Integrerer fra $\alpha = 0$ til $\alpha = \varphi$

(der $\varphi = 9\pi$ ved 4.5 runder med snora) :

$$\int_{S(0)}^{S(\varphi)} \frac{dS}{S} = -\mu \int_0^{\varphi} d\alpha \Rightarrow \ln \frac{S(\varphi)}{S(0)} = -\mu\varphi$$

$$\Rightarrow \underline{S(\varphi) = S(0) e^{-\mu\varphi}}$$

Dvs, siden $S(0) = Mg$ og $S(\varphi) = mg$: (26)

$$m = M \cdot \exp(-\mu\varphi)$$

I eksp. er $\mu \approx 0.17$, $M = 1\text{ kg}$, $\varphi = 9\pi$

$$\Rightarrow m = 1000\text{ g} \cdot \exp(-0.17 \cdot 9\pi) \approx 8\text{ g}$$

Omvendt: Nødvendig kraft for å heise

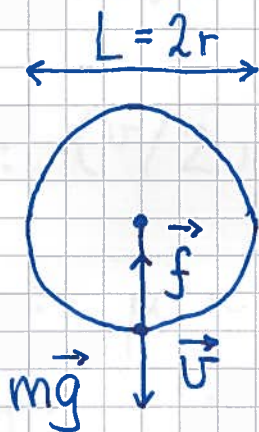
M opp er $S(\varphi) = S(0) \cdot \exp(+\mu\varphi)$

$$\Rightarrow m = 1\text{ kg} \cdot \exp(+0.17 \cdot 9\pi) \approx 122\text{ kg}$$

Friksjon i fluider: [YF 5.3; LL 8]

Anta symmetrisk legeme med lineær utstrekning L på tvers av $\vec{v}$; omgivende fluid (gass, væske) med massetetthet ρ og dynamisk viskositet μ .

Eks: Ball som faller i luft



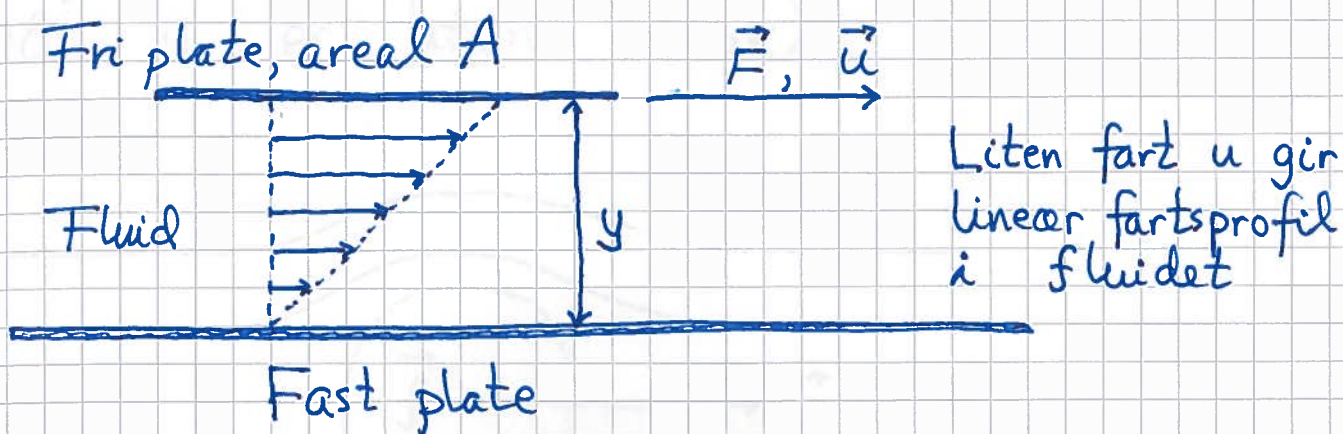
Luftmotstand $\vec{f}$

~~$$A = \pi r^2$$~~

$$A = \pi r^2$$

Definisjon og måling av μ :

(28)



Exp. gir $F = \mu \cdot \frac{A \cdot u}{y}$

der μ = fluidets dynamiske viskositet; $[\mu] = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$

Eks: ($^\circ\text{C}/20$)

Luft: $\mu \approx 2 \cdot 10^{-5}$

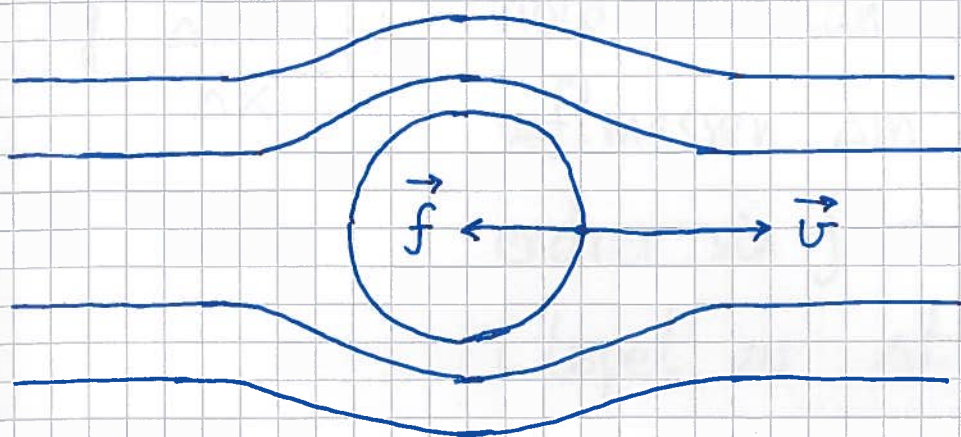
Vann: 10^{-3}

Glyserol: 1

Sirup: 10^2

Laminær strømning (pen, lagdelt)
når v er liten (nok):

(29)



$$\vec{f} = -k \vec{v}$$

Kule med radius r : $k = 6\pi\mu r$

(Stokes' lov)

Turbulent strømning (uordnet, virvler)
når v er stor (nok):

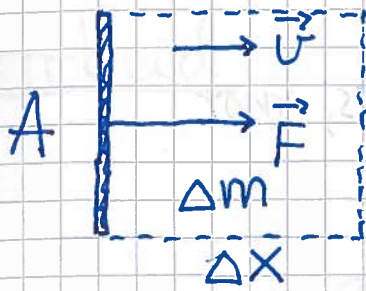
$$\vec{f} = -\left(\frac{1}{2} \rho A C_d\right) v^2 \hat{v}$$

C_d = drag-koeffisienten

(Kule : $C_d \approx 0.5$)

Eks: C_d for plate

(30)



Må dytte med kraft F for å holde konstant fart v , fordi luftmassen $\Delta m = \rho \Delta V = \rho A \Delta x$ endrer sin fart fra 0 til v i løpet av $\Delta t = \Delta x / v$

$$\Rightarrow F = \frac{\Delta m \cdot v}{\Delta t} = \frac{\rho A \Delta x \cdot v}{\Delta t} = \rho A v^2 \Rightarrow \underline{C_d = 2}$$

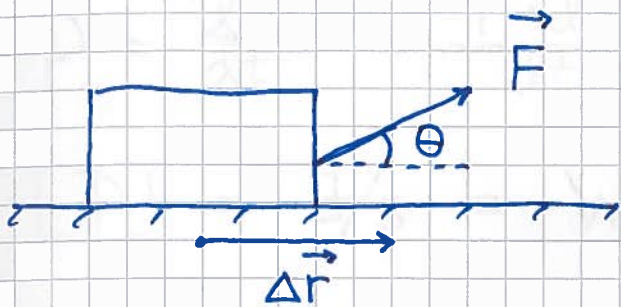
Eks: Bilen Revolve har $A \approx 1.1 \text{ m}^2$

og $C_d \approx 1.35$. Luftmotstand ved $v = 60 \text{ km/h}$ er da ca

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2} \rho A C_d v^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1.2 \cdot 1.1 \cdot 1.35 \cdot (60/3.6)^2 \text{ N} \\ &\approx \underline{250 \text{ N}} \end{aligned}$$

Arbeid og energi [YF 6, 7; LL 4] (31)

Arbeid [YF 6.1-6.3; LL 4.1]



Kraft $\vec{F}$ utfører arbeid på klossen.

arbeid $\stackrel{\text{def}}{=}$ kraft $\times$ forflytning

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta$$

$$[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J} \text{ (joule)}$$

Generelt:



$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j \xrightarrow{\Delta \vec{r}_j \rightarrow 0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

= arbeidet utført av $\vec{F}$ ved forflytningen fra $\vec{r}_i$ til $\vec{r}_f$

Effekt

[YF 6.4 ; LL 4.1]

(32)

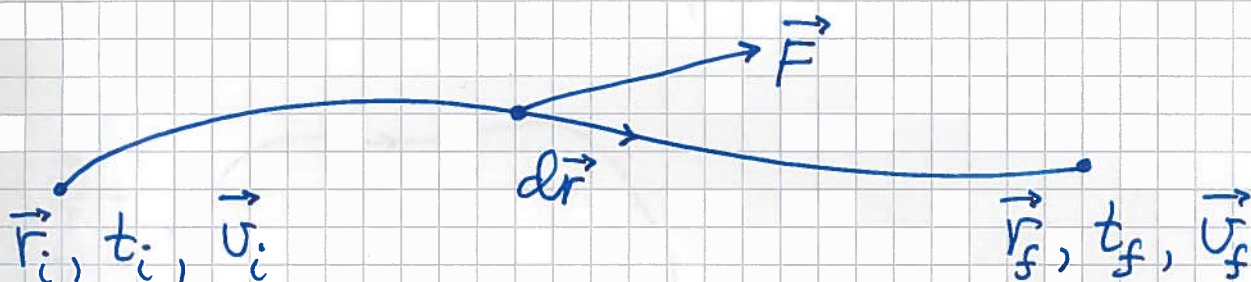
effekt $\stackrel{\text{def}}{=}$ arbeid (evt. energi) pr tidsenhet

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$[P] = \text{J/s} = \text{W (watt)}$$

$$\underline{1 \text{ kWh}} = 1000 \frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot 3600 \text{ s} = \underline{3.6 \text{ MJ}}$$

Kinetisk energi [YF 6.2 ; LL 4.2]



$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_i^f m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \int_i^f \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} (\vec{v} \cdot d\vec{v} + d\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} d(v^2)$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} m \int_{v_i^2}^{v_f^2} d(v^2) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

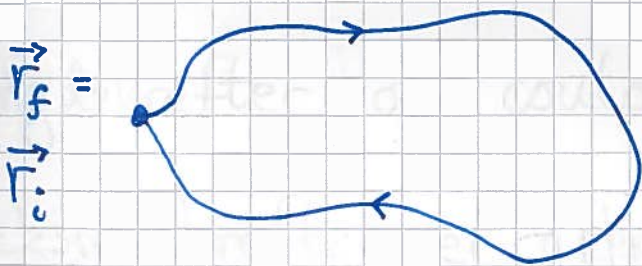
$K = \text{kinetisk energi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}mv^2$

Dermed:
$$W = \Delta K = K_f - K_i$$

Arbeid W utført på et legeme tilsvarer endringen i legemets kin. energi, ΔK .

Konservative krefter [YF 7.3 ; LL 4]

Anta at $\vec{F}$ virker på et legeme som kommer tilbake der det startet, dvs $\vec{r}_f = \vec{r}_i$:

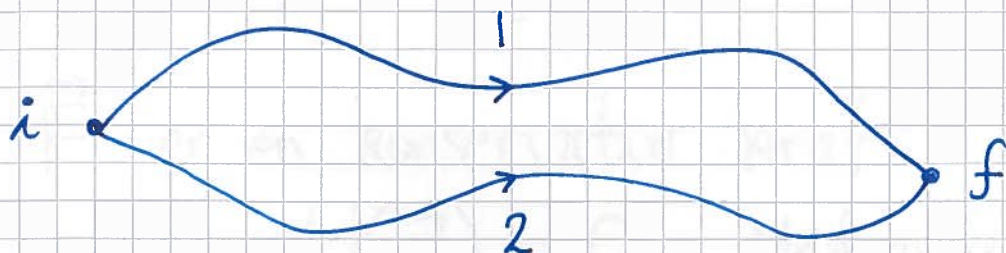


Hvis $K_f = K_i$, er $W = \Delta K = 0$, dvs

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Da er $\vec{F}$ en konservativ kraft.

Når $\vec{F}$ er konservativ, er arbeidet W uavhengig av veien :



$$0 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_1 + \left\{ \int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_2$$

$$= W_1 - W_2$$

$$\Rightarrow W_1 = W_2 \quad (\text{qed})$$

Tyngdekrefter og coulombkrefter er konservative.

Friksjonskrefter er ikke konservative.