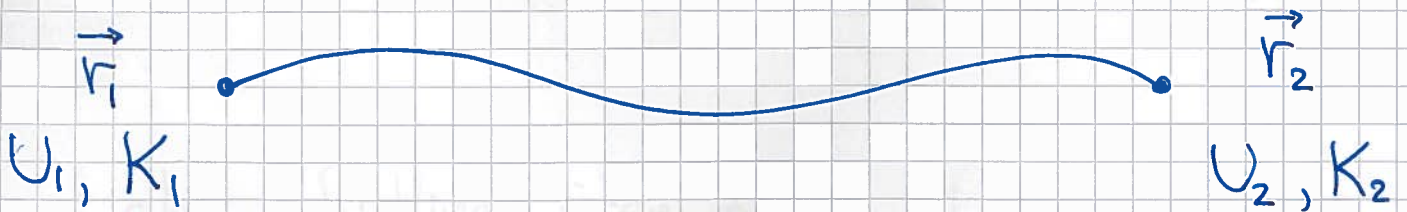


Potensiell energi [YF 7.1-7.4; LL 4.3-4.4] (35)

$$U(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

der $\vec{F}$ er en konservativ kraft, og der vi har valgt $U(\vec{r}_0) = 0$. Med andre ord, kun forskjeller i pot. energi har fysisk betydning.

Bevarelse av mekanisk energi [YF 7.1-7.3 ; LL 4.5]



$$\Delta K = K_2 - K_1 = W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$U_2 - U_1 = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \left(- \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \right) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W$$

$$\Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

Total mekanisk energi: $E = K + U$

(36)

$\Rightarrow E$ er bevart i et konservativt system

Friksjonsarbeid [YF 7.3; LL 4.5]



$$W_f = \int_{r_1}^{r_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \quad \text{da } \vec{f} \text{ alltid rettet } \underline{\text{mot}} d\vec{r}$$

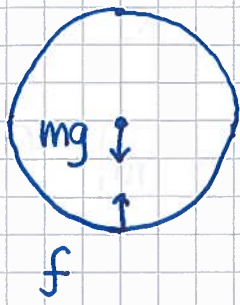
$\Rightarrow$ Mek. energi tapes; omdannes til varme, lyd etc.

$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \Rightarrow \vec{f} \text{ er } \underline{\text{ikke}} \text{ konservativ}$$

Lab: Rulling uten å gli ("ren rulling")
gir bevart mek. energi. Statisk friksjons-
kraft gjør ikke arbeid (ideelt sett).

Eks: Fallende bordtennisball

(37)



$$m = 2.7 \text{ g} , \quad r = 20 \text{ mm}$$

- Max hastighet?
- Tapet andel mek. energi?

Løsn: Antar $f = \frac{1}{2} \rho A C_d v_t^2$ når $v = v_{\max} = v_t$ (terminalhastighet); $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$, $A = \pi r^2$, $C_d = 0.5$.

$$N1: f = mg \Rightarrow v_t = \sqrt{2mg / \rho A C_d} \approx \underline{8.4 \text{ m/s}}$$

Anta at ballen slippes fra høyde h over gulvet.

$$\Rightarrow E_i = U_i = mgh ; \quad E_f = \frac{1}{2} m v_t^2$$

$$\frac{E_i - E_f}{E_i} = 1 - \frac{m}{\rho A C_d h}$$

$$\approx 64\% \quad \text{hvis } h = 10 \text{ m}$$

(Hvis fritt fall 10m: $v_f = \sqrt{2gh} \approx 14 \text{ m/s}$)

Impuls [YF 8 ; LL 5]

(38)

(= bevegelsesmengde = linear momentum)

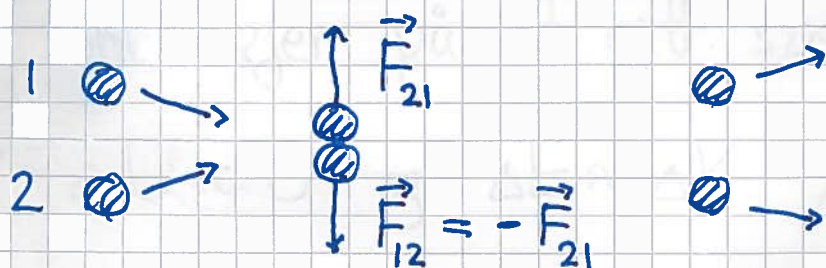
$$N2 \text{ for gitt } m: \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{p} \stackrel{\text{def}}{=} m\vec{v} = \text{massens impuls} ; [\vec{p}] = \text{kg m/s}$$

Vi ser da:

$$\text{Hvis } \vec{F} = \sum \vec{F}_{\text{ytre}} = 0, \text{ er impulsen } \vec{p} \text{ bevart}$$

Indre krefter mellom legemer endrer ikke hele systemets totale impuls:



$$N3 \Rightarrow \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0$$

$$\stackrel{N2}{\Rightarrow} d\vec{p}_1/dt + d\vec{p}_2/dt = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \{ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konst.}$$

Kollisjoner [YF 8.3, 8.4 ; LL 5] (39)

Total impuls er bevart i kollisjoner, mens mek. energi kan gå tapt.

Elastisk støt: $\Delta E = 0$

Uelastisk støt: $\Delta E < 0$

Fullstendig uelastisk støt: $\text{Max } |\Delta E|$.

Legemene henger sammen med felles hastighet etter kollisjonen.

Har typisk svært kortvarige kollisjoner som skjer på et gitt sted, slik at

$\Delta U \approx 0$ og $\Delta E \approx \Delta K$ i kollisjonen.

Tapt K $\rightarrow$ deformasjon, varme, lyd

Sentralt støt [YF 8.2-8.4 ; LL 5.3] (40)

Kollisjon i 1D:

Før $m \bullet \rightarrow v$ $V \leftarrow \bullet M$ $\rightarrow +$

Etter $v' \leftarrow \bullet m$ $M \bullet \rightarrow V'$

$$\Delta p_{\text{tot}} = 0 \Rightarrow mv + MV = mv' + MV' \quad (1)$$

(a) Fullst. uel.: $v' = V' = \frac{mv + MV}{m + M}$

(b) Delvis uel.: Har kun 1 ligning, 2 ukjente
 $\Rightarrow$ trenger en lign./opplysning til.

(c) Elastisk: $\Delta K = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2 \quad (2)$$

Skriver om (1) og (2):

$$m(v - v') = M(V' - V) \quad (1)$$

$$m(v - v')(v + v') = M(V' - V)(V' + V) \quad (2)$$

(2) dividert med (1):

$$v + v' = V' + V \quad (3)$$

(3) · M - (1) gir

$$u' = \frac{M}{m+M} \left\{ 2V + u \cdot \frac{m-M}{M} \right\}$$

(3) · m + (1) gir

$$V' = \frac{m}{M+m} \left\{ 2u + V \cdot \frac{M-m}{m} \right\}$$

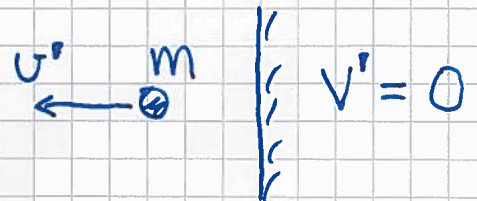
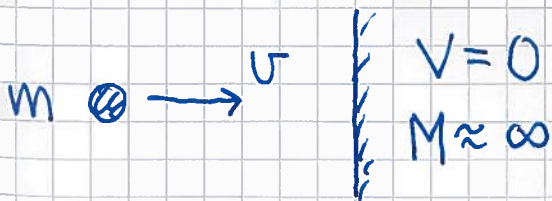
(opplagt, r/ombytte av små og store bokstaver!)

Eks 1: $m = M \Rightarrow V' = u, u' = V$

Kjent fra leketøy:



Eks 2: Ball mot vegg, elastisk støt



$$u' = \frac{M}{m+M} \left\{ 0 + u \cdot \frac{m-M}{M} \right\} \stackrel{m \ll M}{=} -u \quad (\text{OK})$$

(42)

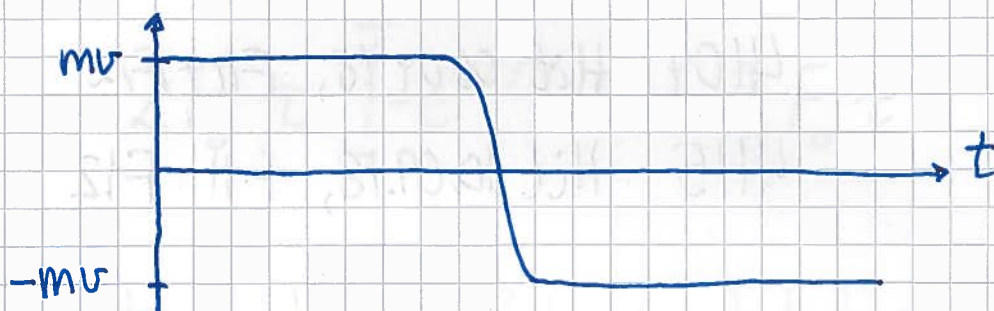
$$K' = \frac{1}{2} m v'^2 = \frac{1}{2} m v^2 = K \quad ; \quad \text{OK}$$

$$p' = m v' = -m v$$

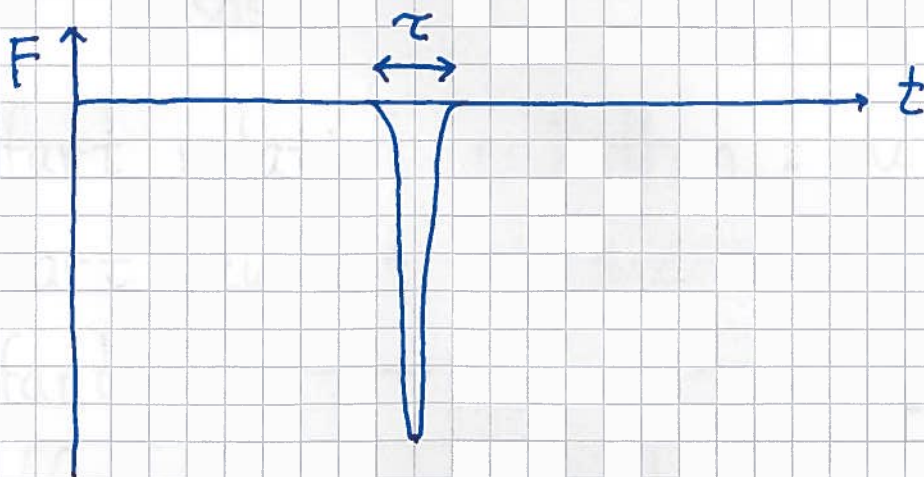
$$P' = M V' = M \frac{m}{M+m} \cdot 2v = 2m v \quad (!)$$

$$\Rightarrow p'_{\text{tot}} = m v = p_{\text{tot}} \quad ; \quad \text{OK}$$

$p(t)$ for ballen (kvalitativt):



$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt} :$$



Anta f.eks. $\tau = 2 \text{ ms}$ og $\Delta v = 40 \text{ m/s}$;
 da er $\langle a \rangle \approx 40 / 0.002 \text{ m/s}^2 = 20 \text{ km/s}^2$,
 så tyngden mg er neglisjerbar i kollisjonen.

"Kraftstøt" (eng: impulse) :

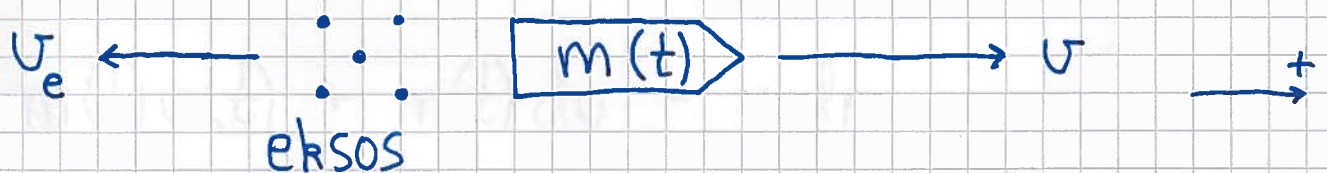
(43)

$$\Delta \vec{p} = \int d\vec{p} = \int \vec{F}(t) dt$$

Eks: $F(t) = F_0 \exp(-|t|/\tau)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta p &= F_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|/\tau} dt = 2F_0 \int_0^{\infty} e^{-t/\tau} dt \\ &= 2F_0 \tau \int_0^{\infty} e^{-t/\tau} = \underline{2F_0 \tau} \end{aligned}$$

Rakett [YF 8.6 ; LL 5.4]



Eksosfart relativt raketten : $u < 0$

Rakettfart relativt fast system : v

Eksosfart ——— " ——— : $u_e = u + v$

Drivstoff-forbruk pr tidsenhet : $dm/dt < 0$

Anta konstant u , og $F_{ytre} = 0$ (inntil videre).

Impulsbevarelse fra t til $t + dt$:

$m(t) \rightarrow v(t)$

Diagram illustrating the relationship between the velocity of the ejected mass $v_e(t+dt)$ and the velocity of the rocket $v(t+dt)$. The diagram shows a rocket mass $m(t+dt)$ moving to the right with velocity $v(t+dt)$. The ejected mass dm_e is shown moving to the left with velocity $v_e(t+dt)$. The relationship is given by $dm_e = -dm$.

Ved tid t : $p(t) = m(t) \cdot v(t)$

Ved tid $t + dt$:

$$p(t+dt) = m(t+dt)v(t+dt) + dm_e \cdot v_e(t+dt)$$

$$= [m(t) + dm] \cdot [v(t) + dv] - dm \cdot [u + v(t) + dv]$$

$$= m(t)v(t) + m(t)dv - vdm$$

$$\Rightarrow m dv - u dm = 0$$

$$\Rightarrow m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt}$$

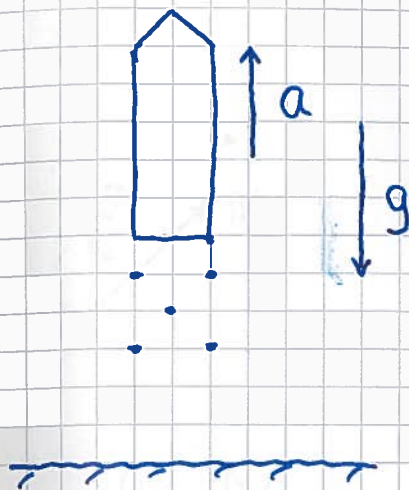
dwz: $ma = F_{\text{skyv}}$

med skyvkraft ("rekyl") $F_{\text{skyv}} = u \dot{m} > 0$

Hvis oppskyting fra bakken, virker

$$F_{\text{ytre}} = -mg \quad (\text{en stund})$$

(45)



$$\Rightarrow ma = u\dot{m} - mg$$

Dvs: $F = u\dot{m} - mg$ er
total kraft på raketten;
må ha $u\dot{m} > mg$ for å ta av

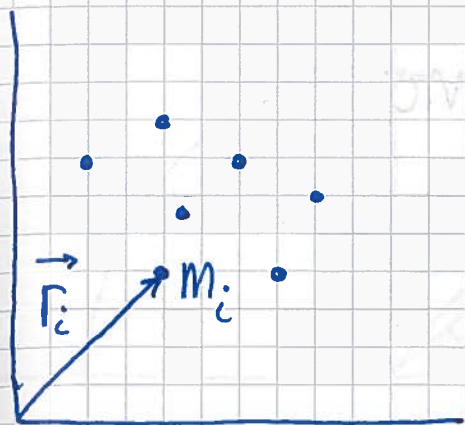
Øving:

$$-mg + u \frac{dm}{dt} = m \frac{dv}{dt} \quad / \cdot \frac{dt}{m}$$

$$\Rightarrow -g dt + u \frac{dm}{m} = dv$$

som kan integreres!

Massesenter [YF 8.5 + oppg. 8.115, 8.116; LL 5.6, 5.8, 6.1] (46)



Massesenter (CM) for N
punktmasser $m_1, m_2, \dots, m_N$
 i posisjoner $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

med $M = \sum_i m_i$ = systemets totale masse

For kontinuerlig massefordeling :

$$\left. \begin{array}{l} m_i \rightarrow dm \\ \sum_i \rightarrow \int \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} M = \int dm \\ \vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm \end{array}$$

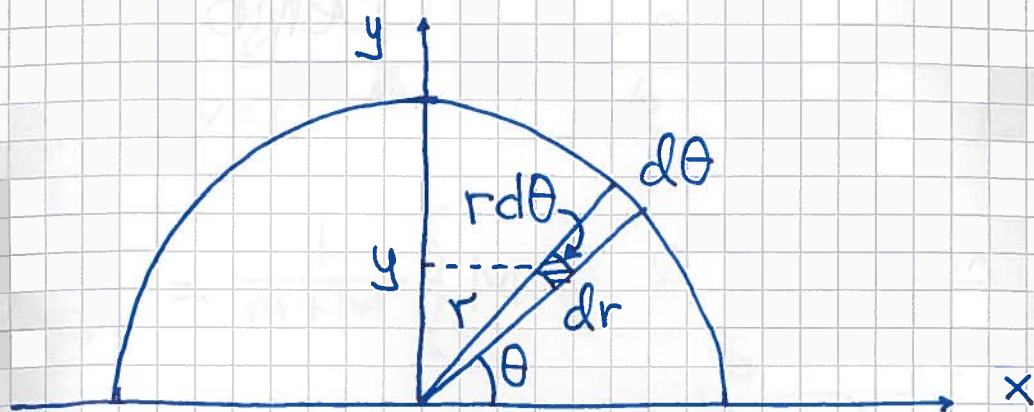
1D, 2D, 3D: λ, σ, ρ = masse pr hhv
lengde-, flate-, volumenet
 dl, dA, dV = hhv lengde-, flate-,
volumenelement

$\Rightarrow dm = \lambda dl, \sigma dA, \rho dV$ = masselement

Hvis uniform massefordeling: $dm/M = dV/V$ osv

Eks 1: $\vec{R}_{cm}$ for halvparten av tynn skive med radius R .

(47)



$X_{cm} = 0$ pga symmetri $\Rightarrow \vec{R}_{cm} = Y_{cm} \hat{y}$, med

$$Y_{cm} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{1}{A} \int y dA, \text{ med } A = \frac{\pi R^2}{2},$$

$$dA = dr \cdot r d\theta \text{ og } y = r \sin \theta$$

$$\Rightarrow Y_{cm} = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^\pi r \sin \theta \cdot dr \cdot r d\theta$$

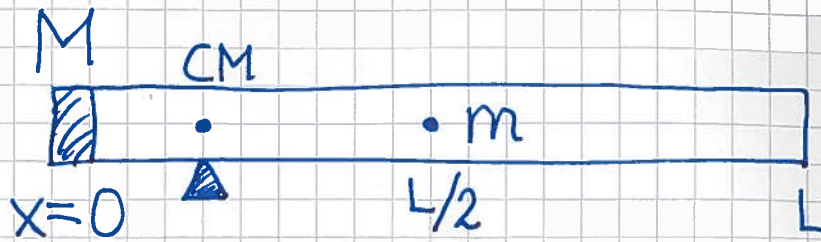
$$= \frac{2}{\pi R^2} \underbrace{\int_0^R r^2 dr}_{= R^3/3} \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta}_{= \int_0^\pi (-\cos \theta) = 2} = \frac{4R}{3\pi} \approx 0.42R$$

Halvparten av tynn ring: $Y_{cm} = \frac{2R}{\pi}$

Halvparten av kompakt kule: $Y_{cm} = \frac{3R}{8}$

Eks 2: Rør med lod i enden

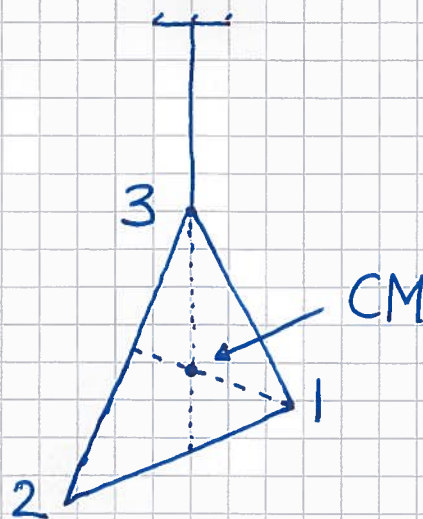
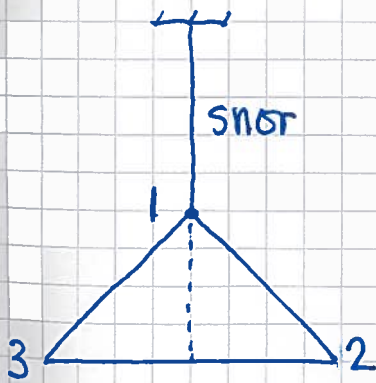
(48)



$$m = 165 \text{ g}$$
$$M = 305 \text{ g}$$

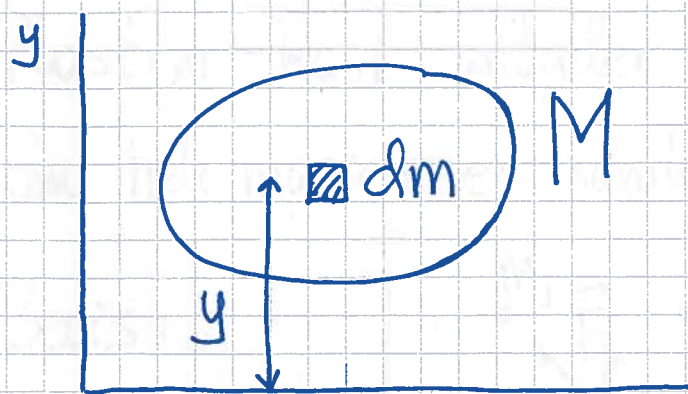
$$X_{\text{CM}} = \frac{1}{m+M} \left\{ M \cdot 0 + \underbrace{\int_0^L x \cdot \frac{m dx}{L}}_{= m \cdot L/2} \right\}$$
$$= \frac{m L}{2(m+M)} \approx \underline{0.18 L}$$

Eks 3: Eksperimentell lokalisering av CM



Potensiell energi i tyngdefeltet

(49)



Velger $U(0) = 0$

$$U = \int dU = \int g \cdot y \cdot dm$$

Anta $g = \text{konstant}$ (dvs $y_{\text{max}} - y_{\text{min}} \ll \text{jordradien}$)

$$\Rightarrow U = g \cdot \int y dm = g \cdot M \cdot Y_{\text{cm}}$$

dvs som om hele M var samlet i
høyden Y_{cm} , f.eks. i $\vec{R}_{\text{cm}}$

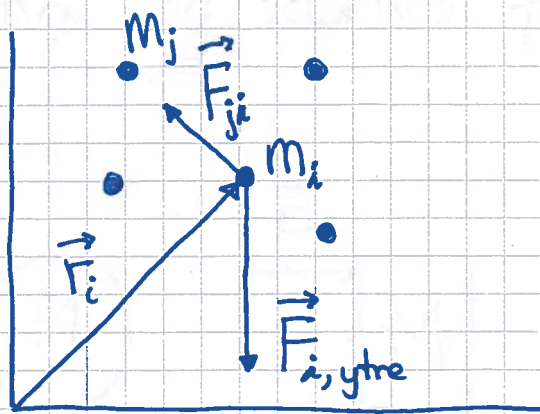
Tyngdepunkt: Der legemet balanserer.

Hvis g er konstant (for hele legemet),
er tyngdepunkt og massesenter samme sted.

Massesenterets bevægelse [YF 8.5; LL5.8] (50)

Plastrør-kast antyder at CM bevæger sig som om hele massen er samlet i CM. Dette stemmer!

Bewis:



N2 for m_i :

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \underbrace{\vec{F}_{i, \text{ytre}}}_{\text{Total ytre kraft p\aa } m_i} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{\text{Total indre kraft p\aa } m_i}$$

Tar $\sum_i$ p\aa begge sider.

$$\text{VS: } \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \sum_i m_i \vec{r}_i \right\} = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ M \vec{R}_{\text{CM}} \right\} = M \ddot{\vec{R}}_{\text{CM}}$$

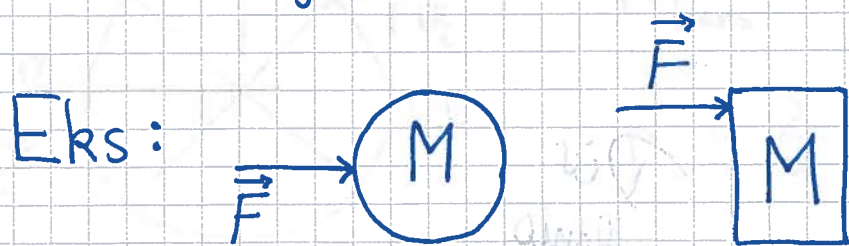
$$\text{HS: } \sum_i \vec{F}_{i, \text{ytre}} = \vec{F}_{\text{ytre}} = \text{netto ytre kraft p\aa systemet}$$

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \underbrace{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} + \dots}_{=0} + \underbrace{\vec{F}_{N, N-1} + \vec{F}_{N-1, N}}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{\text{ytte}} = M \ddot{\vec{R}}_{\text{cm}}}$$

(51)

Dvs: Bevegelsen til CM blir som om hele M er samlet i $\vec{R}_{\text{cm}}$ og utsettes for netto ytre kraft $\vec{F}_{\text{ytte}}$.



$$\Rightarrow \vec{A}_{\text{cm}} = \vec{F}/M ; \text{ den samme for de to legemene}$$

I tillegg til CMs bevegelse,

for stive legemer: rotasjon om CM

for ikke helt stive legemer: også vibrasjon