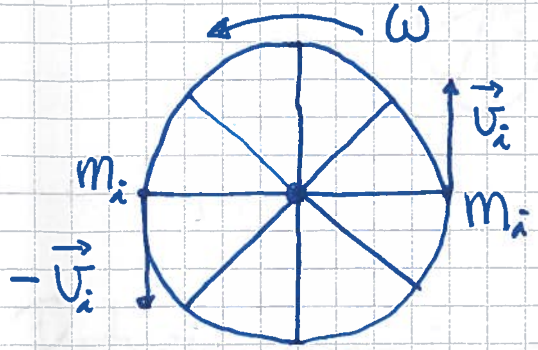
Rotasjon [YF 9,10; LL 6 (5)]

Innledende kommentarer:

- Ren rotasjon (typisk om CM, men ikke nødv.vis)



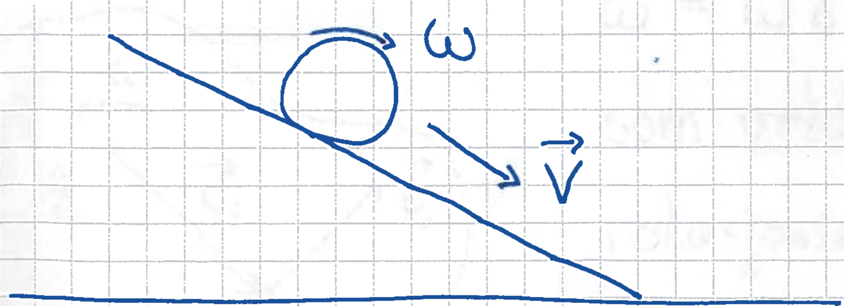
$$K_{trans} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_{CM}^{\,2} = 0$$

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = 0$$

$$K_{rot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \neq 0$$

$$\vec{L} = \text{hjulets dreieimpuls} \neq 0$$

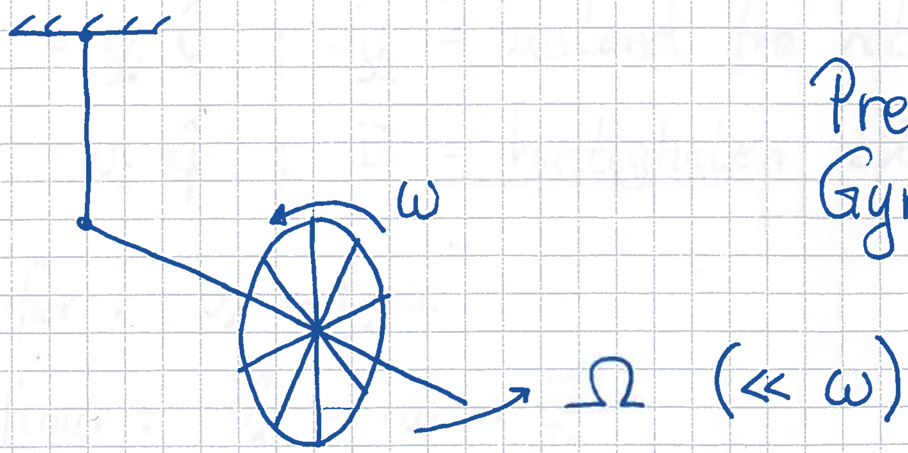
- Rulling = Translasjon av CM + Rotasjon om CM



$\dot{V} > 0$ pga ytre <u>kraft</u> (langs skråplanet)

$\dot{\omega} > 0$ pga ytre <u>dreiemoment</u> (mhp CM)

- Overraskende (?) dynamikk



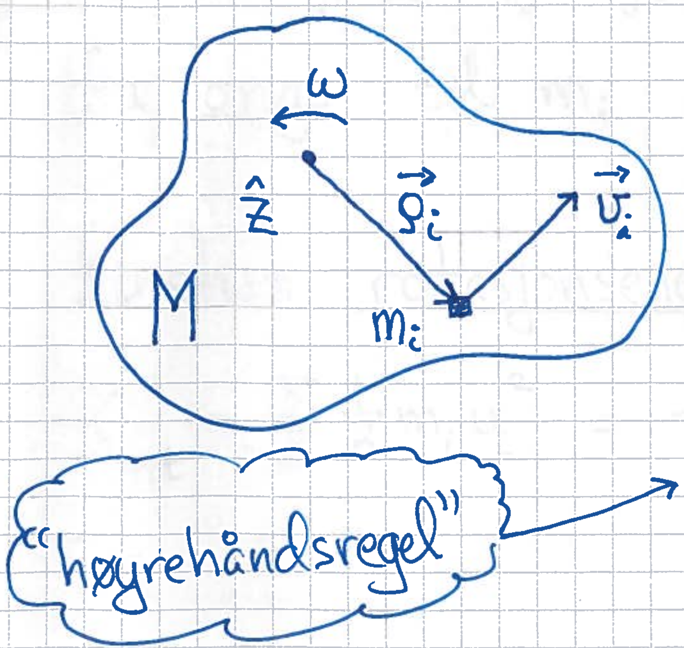
Presesjon.
Gyroskop.

Rotasjonsenergi og treghetsmoment

[YF 9.4 ; LL 6.4, 6.3]

Ser først på ren rotasjon av stivt legeme, om fast akse, ikke nødv.vis gjennom CM.

Med rotasjonsaksen langs $\hat{z}$, ut av planet:



$\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ = vinkelhast. som vektor, langs rotasjonsaksen; 4 fingre på høyre hånd i rotasjonsretningen (her: mot klokka) gir tommelen langs $\vec{\omega}$

Videre er:

$\vec{\rho}_i = \rho_i \, \hat{\rho}$; ρ_i = avstand fra rot.aksen til m_i

$\vec{v}_i = v_i \, \hat{\varphi}$; $\vec{v}_i$ = hastigheten til m_i

Fra før: $v_i = \rho_i \, \omega$

Fra figur: $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$

Høyrehåndsregel for kryssprodukt:

4 fingre langs $\vec{a}$ bøyes over i retning langs $\vec{b}$; da peker tommelen langs vektoren $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Vi bruker her <u>sylinderkoordinater</u> ρ, φ, z ; dvs polarkoordinater ρ, φ samt z.

[Unngår å bruke $\vec{r}_i$ for avstandsvektoren fra z-aksen til m_i fordi $\vec{r}_i$ forbeholdes posisjonsvektoren fra <u>origo</u> til m_i ; derfor $\vec{\rho}_i$!]

Kinetisk <u>rotasjonsenergi</u> for det stive legemet:

$$K_{rot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i \rho_i^2 \right\} \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Her er I legemets treghetsmoment, mhp den aktuelle aksen:

$$\boxed{I \overset{\text{def}}{=} \sum_i m_i \rho_i^2}$$

Hvis kontinuerlig massefordeling: $m_i \to dm$, $\sum_i \to \int$

$$\Rightarrow \boxed{I = \int \rho^2 \, dm} \qquad \rho = \text{avstand fra aksen til } dm$$

Generell bevegelse for et stivt legeme er translasjon av CM, med hastighet $\vec{V}$, samt rotasjon om en akse gjennom CM, med vinkelhastighet $\vec{\omega}$. Total kinetisk energi blir da

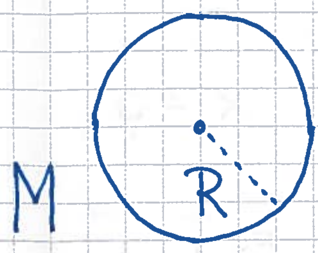
$$\boxed{K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2}$$

[Se utlagt notat for bevis.]

Notasjon: I_0 betyr at aksen går gjennom CM.

Treghetsmoment; eksempler [YF 9.6 ; LL 6.3]

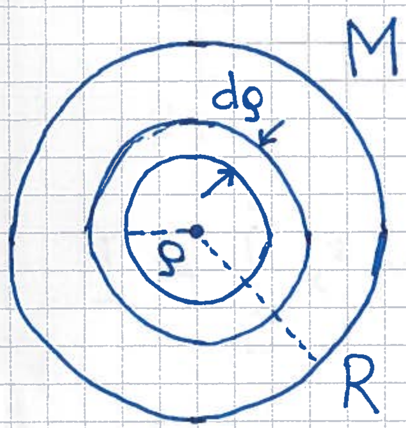
- Ring (og hul sylinder)



$$I_0 = \int \rho^2 dm = R^2 \int dm = \underline{\underline{MR^2}}$$

[Må <u>kunnes</u> ; oppgis ikke til eksamen.]

- Skive (og kompakt sylinder)



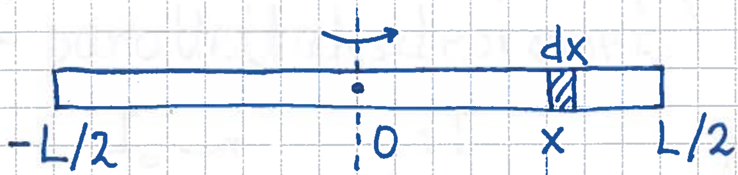
Bidrag fra tynn ring med radius ρ, tykkelse $d\rho$, areal $dA = 2\pi\rho \cdot d\rho$ og masse $dm = M \cdot dA/\pi R^2$:

$$dI_0 = \rho^2 dm = 2M\rho^3 d\rho / R^2$$

$$\Rightarrow I_0 = \int dI_0 = \frac{2M}{R^2} \int_0^R \rho^3 d\rho = \underline{\underline{\tfrac{1}{2} MR^2}}$$

(oppgis)

- Tynn stang (og tynn plate)

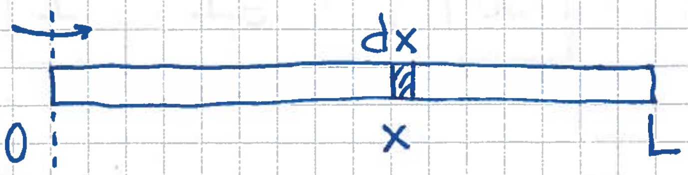


$\rho = x, \quad dm = M \cdot dx/L$

$$\Rightarrow \quad I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot M \cdot \frac{dx}{L} = \frac{M}{L} \Big|_{-L/2}^{L/2} x^3/3 = \underline{\underline{\frac{1}{12} ML^2}}$$

(oppgis)

Mhp akse ved stangas ende:



$$I = \int_0^L x^2 M \, dx/L = \underline{\underline{\frac{1}{3} ML^2}} \qquad \text{(oppgis ikke)}$$

- Kuleskall

$I_0 = \frac{2}{3} MR^2$

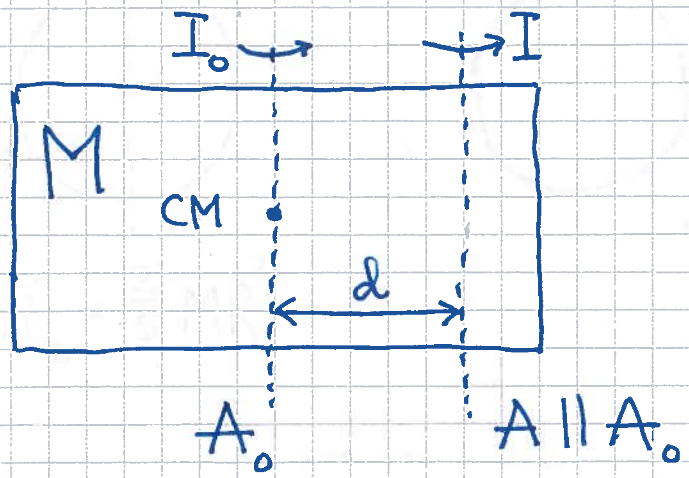
- Kompakt kule

$I_0 = \frac{2}{5} MR^2$

Se øving og LF for detaljer. Oppgis.

Steiners sats [YF 9.5 ; LL 6.3]

(= parallellakseteoremet)

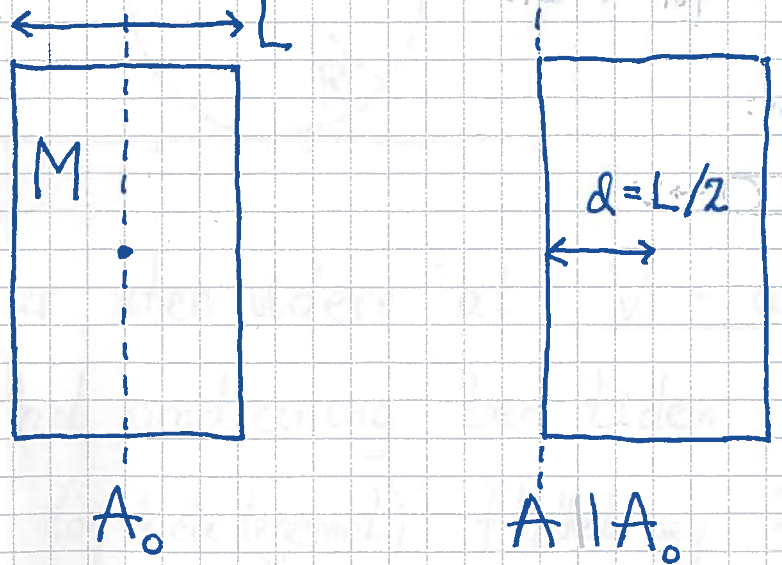


A: akse parallell med aksen A_0

$$\boxed{I = I_0 + Md^2}$$

[Se notat for bevis]

Eks 1: Dør



$$\Rightarrow I = I_0 + M \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3} ML^2$$

(som s. 57)

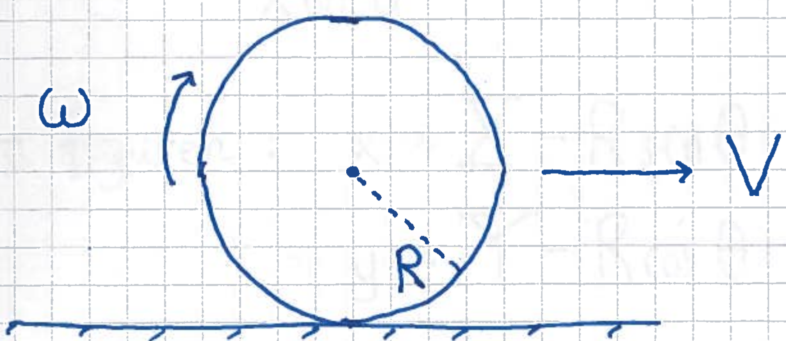
$$I_0 = \frac{1}{12} ML^2$$

Eks 2: Kompakt kule

$$I = I_0 + MR^2 = \frac{7}{5} MR^2$$

$$I_0 = \frac{2}{5} MR^2$$

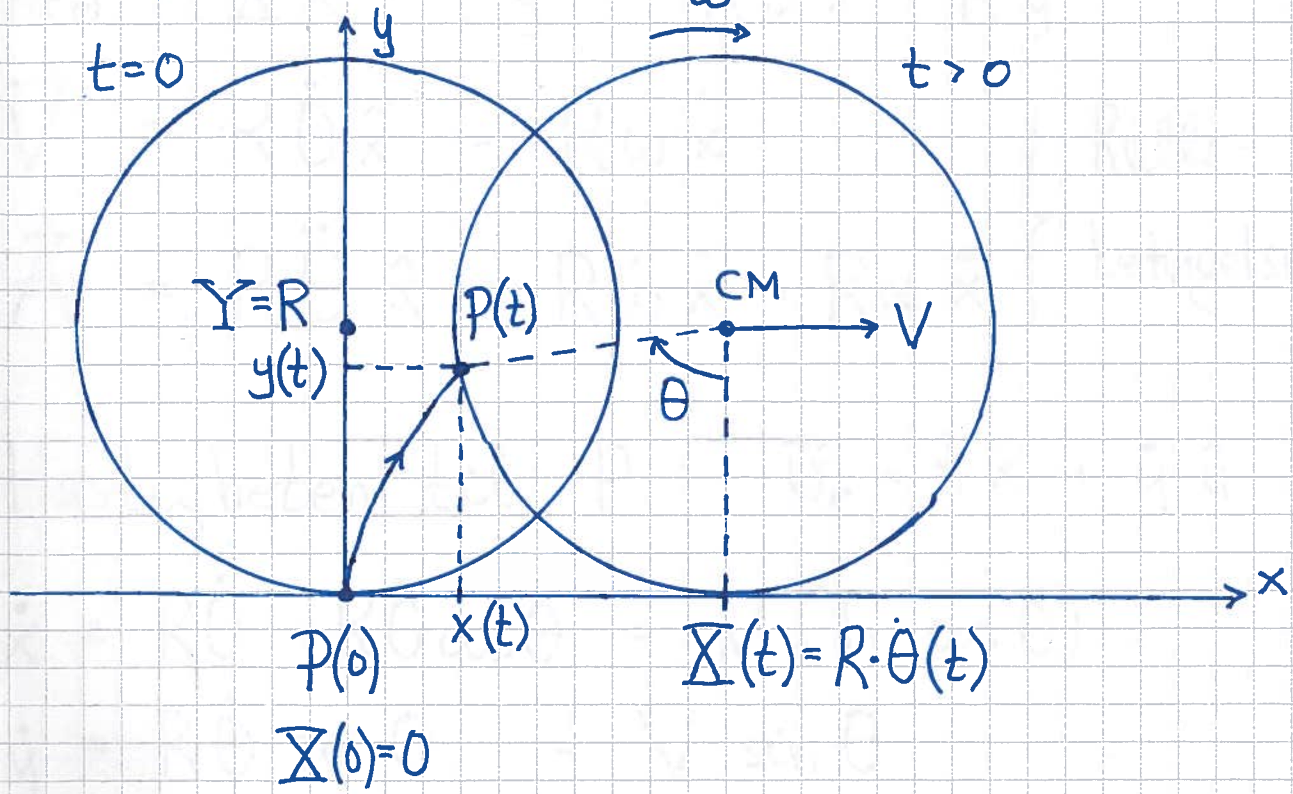
Ren rulling [YF 10.3; LL 6.7]



Vi ser uten videre at $V = \omega R$:

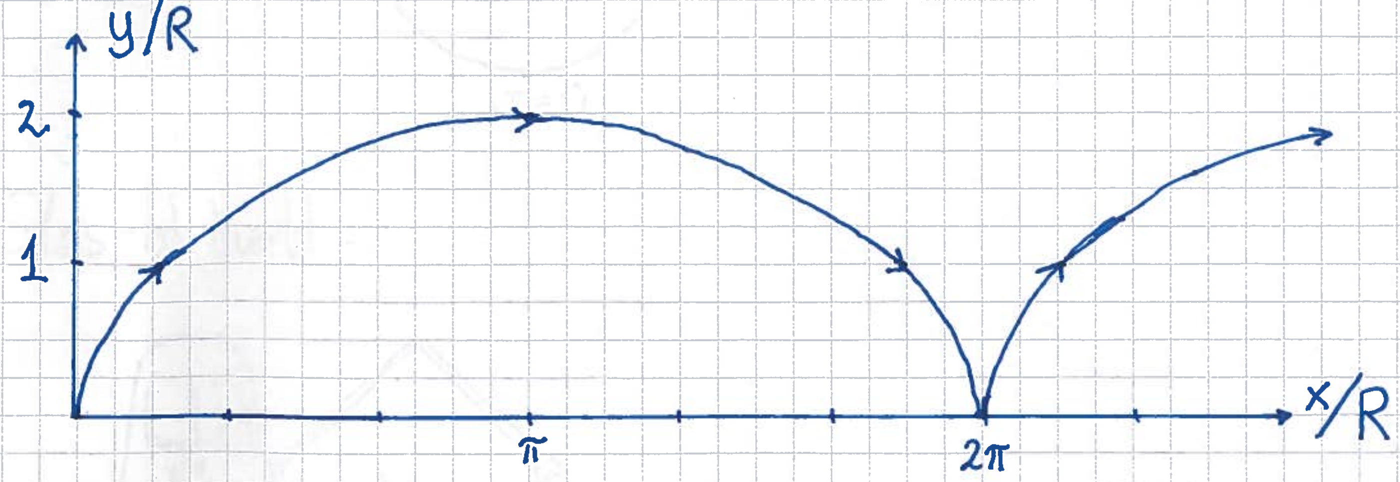
En hel omdreining tar tiden $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Da har CM (og hele legemet) flyttet seg $2\pi R$ mot høyre. Det gir $V = 2\pi R / T = \omega R$. Evt: Liten rotasjon $d\theta = \omega\, dt$ flytter CM liten lengde $dx = R\, d\theta = R\omega\, dt$, som gir $V = dx/dt = R\omega$. Som er rullebetingelsen.

Banen til et punkt P på periferien er en <u>sykloide</u> :



Fra figuren : $x = X - R\sin\theta = R\theta - R\sin\theta$

$y = Y - R\cos\theta = R - R\cos\theta$



Bevegelsen til CM:

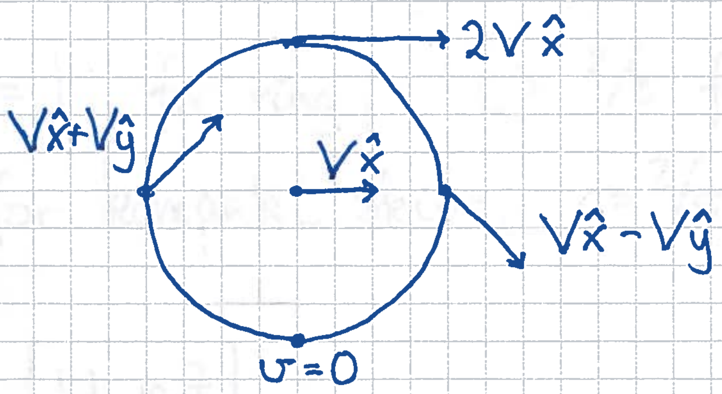
$$\vec{R}_{CM} = X\hat{x} + Y\hat{y} = R\theta\,\hat{x} + R\,\hat{y}$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \vec{V} &= R\dot{\theta}\,\hat{x} = R\omega\,\hat{x} \\ \Rightarrow \vec{A} &= R\ddot{\theta}\,\hat{x} = R\dot{\omega}\,\hat{x} = R\alpha\,\hat{x} \end{aligned}\right\} \text{Rulle-betingelse(r)}$$

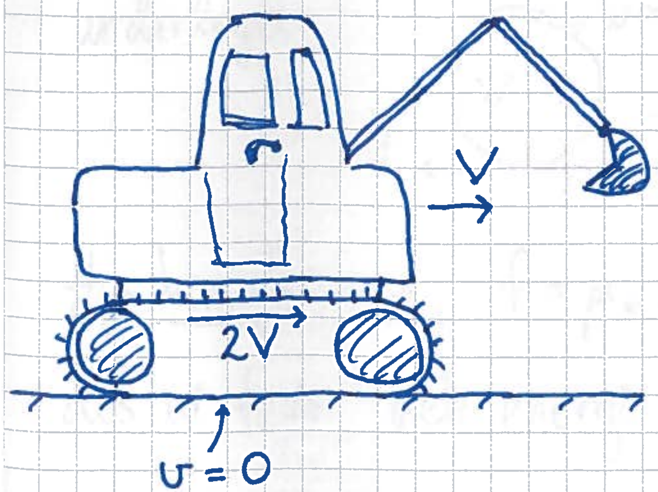
Hastigheten til P: $\vec{v}_P = \dot{x}\,\hat{x} + \dot{y}\,\hat{y}$

$$\dot{x} = R\dot{\theta} - R\dot{\theta}\cos\theta = V(1-\cos\theta)$$

$$\dot{y} = R\dot{\theta}\sin\theta = V\sin\theta$$



Gløs-aktuelt:



Ser at $v = 0$ for $\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots,$

dvs når P er i <u>kontakt</u> med underlaget.

Da er effekttapet pga friksjon

$$P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} = \underline{0} \quad \text{(som nevnt s. 36)}$$

Kinetisk energi ved ren rulling:

$$K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2} \cdot cMR^2 \cdot \frac{V^2}{R^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{K = (1+c)\frac{1}{2}MV^2}$$

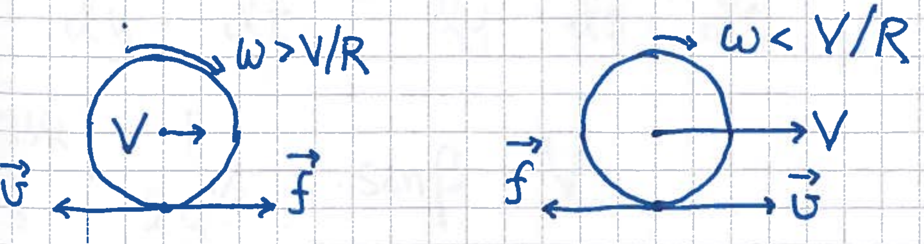
med $c = 1$ for ring, $c = 2/3$ for kuleskall,

$c = 1/2$ for kompakt skive, $c = 2/5$ for kompakt kule.

<u>Sluring</u> [LL 6.7]

Hvis $\omega \neq \frac{V}{R}$, er $v = V - \omega R \neq 0$, dvs objektet <u>glir</u> på

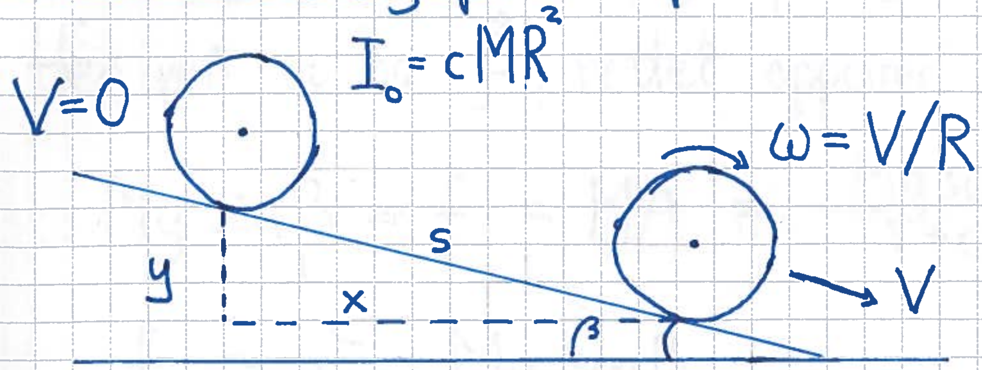
underlaget:



Har <u>kin. friksjon</u>, $f = \mu_k N$, og effekttap, $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$,

dvs vi taper mek. energi pr tidsenhet lik $|P_f|$.

Eks: Ren rulling på skråplan [YF 10.3; LL 6.8]



Finn V, A, friksjonskraften f, og minste μ_s (evt største β) som gir ren rulling.

Energibevarelse : $Mgy = (1+c)\frac{1}{2}MV^2$

$\Rightarrow \underline{\underline{V = \left\{\frac{2gy}{1+c}\right\}^{1/2}}}$; avtar med økende c

$\Rightarrow V(\text{kule}) > V(\text{skive}) > V(\text{kuleskall}) > V(\text{hul sylinder})$

Akselerasjon :

$$A = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{dV}{dy}\cdot\frac{dy}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$$

$$= \left\{\frac{2g}{1+c}\right\}^{1/2}\cdot\frac{1}{2y^{1/2}}\cdot\sin\beta\cdot V$$

$$= \left\{\frac{2g}{1+c}\right\}^{1/2}\cdot\frac{\sin\beta}{2y^{1/2}}\cdot\left\{\frac{2gy}{1+c}\right\}^{1/2} = \underline{\underline{\frac{g\sin\beta}{1+c}}}$$

Uten friksjon er $F_{\parallel} = Mg\sin\beta$ og $A = g\sin\beta$.

$\Rightarrow$ Her må vi ha $\vec{f}$, rettet oppover skråplanet

$$\Rightarrow \quad Mg\sin\beta - f = MA = \frac{Mg\sin\beta}{1+c}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{f = \frac{c}{1+c} Mg\sin\beta}}$$

Maksimal statisk friksjon er $f_{max} = \mu_s N$, og $N = Mg\cos\beta$. Må derfor, for å ha ren rulling, oppfylle ulikheten $f \leq f_{max}$, dvs

$$\frac{c}{1+c} Mg\sin\beta \leq \mu_s Mg\cos\beta$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\mu_s \geq \frac{c}{1+c}\tan\beta}}, \quad \text{evt.} \quad \underline{\underline{\beta \leq \arctan\left\{\mu_s \cdot \frac{1+c}{c}\right\}}}$$

Lab: Krum bane. Ren rulling gir fortsatt energibevarelse og

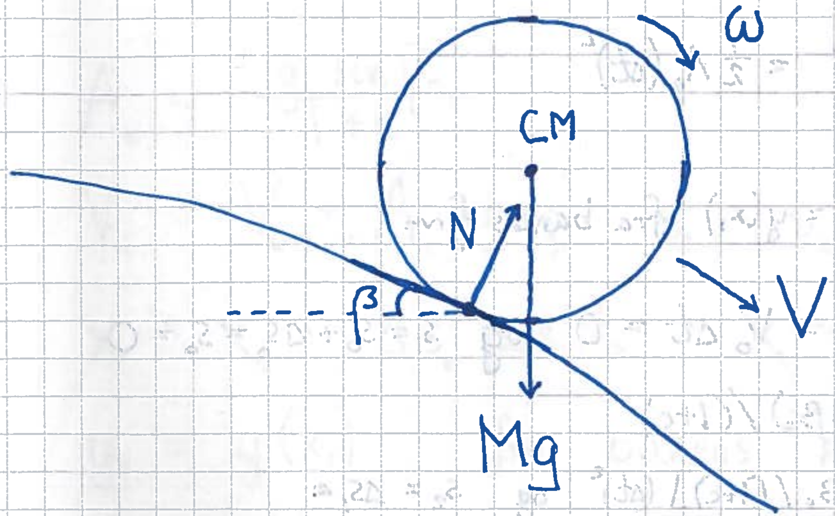
$$A = \frac{g\sin\beta}{1+c}$$

tangentielt med banen, men ikke lenger konstant.

Har også akselerasjon normalt på banen,

$$A_\perp = V^2/\rho \quad ; \quad \rho = [1 + (y')^2]^{3/2} / |y''|$$

slik at normalkraften N varierer langs banen y(x).



N2 ⊥ banen gir

$$MA_\perp = \pm (Mg\cos\beta - N) \quad ; \quad \text{krumning} \begin{matrix}\text{nedover}\\ \text{oppover}\end{matrix}$$

dvs N kan beregnes når V og y(x) er kjent. Merk at $y' = dy/dx = \tan\beta$.

<u>Målt</u> bevegelse gir x(t) og y(t).
<u>Beregnet</u> / Teoretisk bevegelse fås ved å løse "N2" langs banen numerisk, f.eks med Euler-metoden:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{g \sin\beta}{1+c} \Rightarrow \Delta V = \frac{g\sin\beta}{1+c}\Delta t = A\,\Delta t$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = V \Rightarrow \Delta s = V\,\Delta t$$

Med f.eks. $t_0 = 0$, $V_0 = V(t_0) = 0$ og $s_0 = s(t_0) = 0$:

$$A_0 = \frac{g \sin\beta_0}{1+c}$$

$$V_1 = V_0 + A_0\,\Delta t \;; \quad s_1 = s_0 + V_0\,\Delta t\;;$$

$$x_1 = x_0 + \Delta s_0 \cos\beta_0 = x_0 + V_0\,\Delta t \cos\beta_0$$

$y_1 = y(x_1)$, fra banens kjente form

$$A_1 = \frac{g\sin\beta_1}{1+c}$$

$$V_2 = V_1 + A_1\,\Delta t \;; \quad s_2 = s_1 + V_1\,\Delta t\;;$$

$$x_2 = x_1 + \Delta s_1 \cos\beta_1 = x_1 + (s_2 - s_1)\cos\beta_1$$

$$y_2 = y(x_2)$$

osv