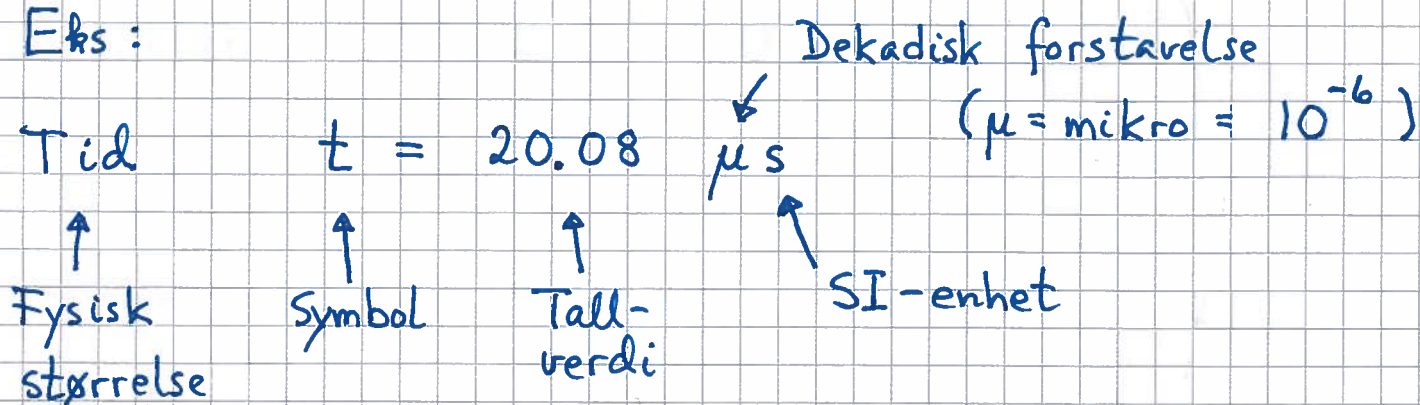


Størrelser og enheter [OS1-1 ; YF1]

①

Eks :



Notasjon : $[t] = s$

"SI-enhet for tid er sekund"

Grunnenheter i SI-systemet :

Lengde	$[x] = m$	} mekanikk
Masse	$[m] = kg$	
Tid	$[t] = s$	
Strømstyrke	$[I] = A$	} elmag
Temperatur	$[T] = K$	
Stoffmengde	$[n] = mol$	} termisk fysikk
Lysstyrke	$[I] = cd$	

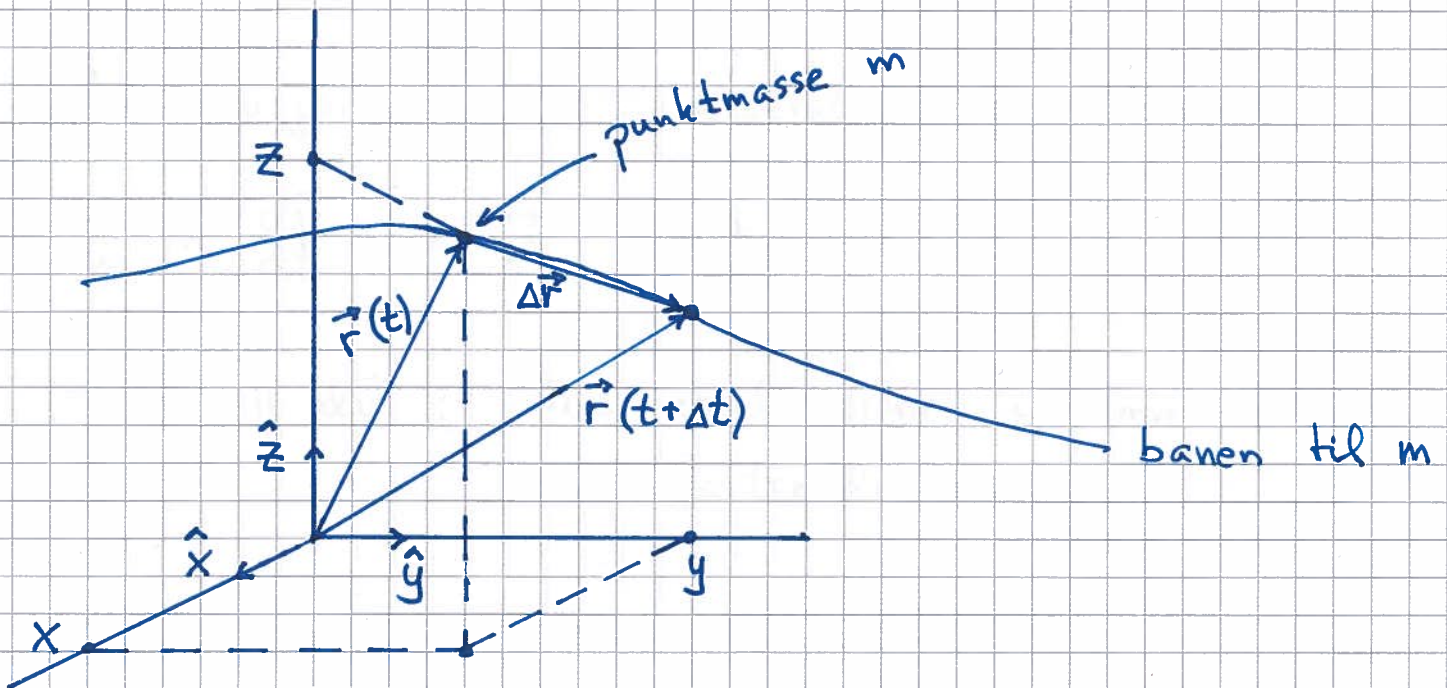
(Fra 20.05.2019 er alle disse definert med utgangspunkt i eksakte tallverdier for ulike naturkonstanter, se SI-base-unit på wikipedia.)

(2)

Sammensatte enheter :

Hastighet $[v] = m/s$ Akselerasjon $[a] = m/s^2$ osu,

Avledete enheter :

Kraft $[F] = kg \cdot m/s^2 = N$ Energi $[W] = N \cdot m = J$ osu,MEKANIKK [OS1 1-12, 15; YF 1-11, 14; LL 1-6, 9⁽⁷⁾]Kinematikk [OS1 3, 4; YF 2, 3; LL 1]

$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y} + z(t) \hat{z}$$

= posisjonen til m ved tid t

(3)

Enhetsvektorer : $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$$

$$[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1 \quad (\text{dvs dimensjonsløse})$$

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 ; \quad \hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \dots = 0$$

Forflytning i løpet av Δt :

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

Hastighet $\stackrel{\text{def}}{=}$ forflytning pr tidsenhet

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

 $\Rightarrow \vec{v} \parallel \Delta \vec{r}$; dvs $\vec{v}$ er tangent til banenAkselerasjon $\stackrel{\text{def}}{=}$ hastighetsendring pr tidsenhet

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

 $\Rightarrow \vec{a} \parallel d\vec{v}$; dvs akselerasjonen i samme retning som fartsendringen

Vektorrelasjoner gjelder komponentvis :

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} ; \quad v_x = dx/dt = \dot{x} \quad \text{osv.}$$

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z} ; \quad a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \quad \text{osv.}$$

Integrasjon av $\vec{v}$ gir $\vec{r}$:

(4)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

Integrasjon av $\vec{a}$ gir $\vec{v}$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a} dt$$

$\Rightarrow$ som ovenfor ...

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t) dt$$

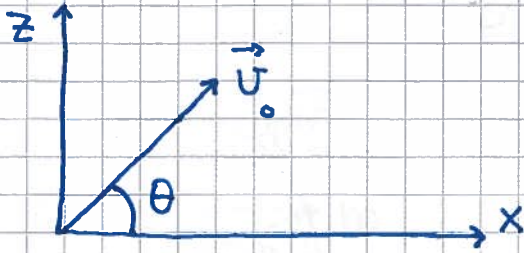
Hvis $\vec{a}$ er konstant :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} t \quad ; \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

$$\text{der } \vec{v}(0) = \vec{v}_0, \quad \vec{r}(0) = \vec{r}_0$$

(5)

Eks: Skrått kast; $a = g = \text{tyngdens akselerasjon}$



$$\vec{a} = -g \hat{z}$$

$$\vec{r}(0) = 0, \quad \vec{v}(0) = \vec{u}_0$$

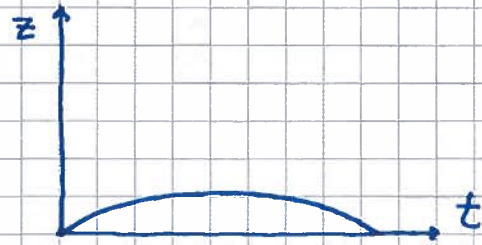
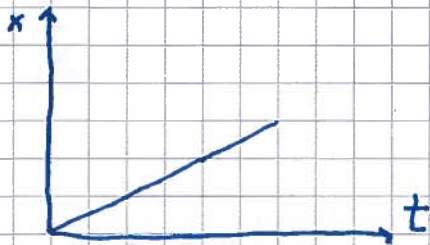
Finn $\vec{r}(t)$ og banen $z(x)$

Løsning:

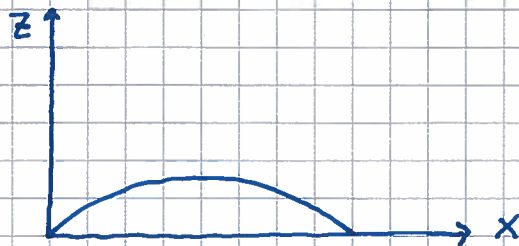
$$\vec{v}(t) = \vec{u}_0 + \vec{a}t = \vec{u}_0 - gt \hat{z}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{u}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 = \vec{u}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \hat{z}$$

$$\Rightarrow x(t) = u_0 t \cos \theta, \quad z(t) = u_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2$$



Banen: $t = \frac{x}{u_0 \cos \theta} \Rightarrow z(x) = x \tan \theta - \frac{g x^2}{2 u_0^2 \cos^2 \theta}$

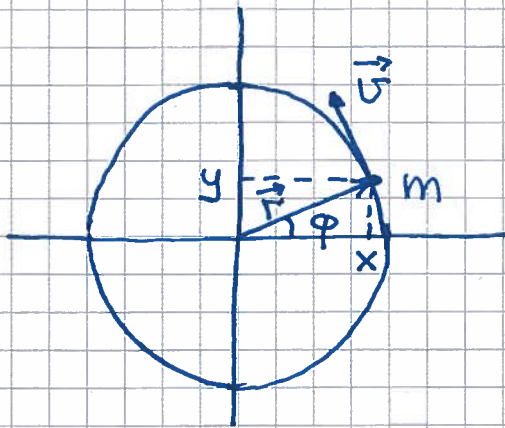


Parabel

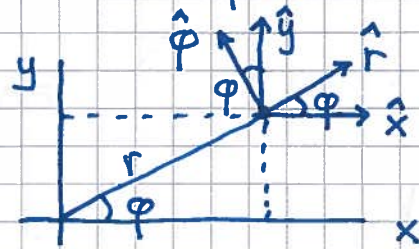
Sirkelbevegelse

[OS1 4.4; YF 3.4; LL 1.7, 1.8]

⑥



⇒ Lurt med polarkoordinater:



r = avstand fra origo

φ = vinkel mellom $\hat{x}$ og $\hat{r}$
(positiv mot klokke)

Ser fra figuren:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

$$\vec{r} = \hat{x}x + \hat{y}y = \hat{x}r \cos \varphi + \hat{y}r \sin \varphi = r \hat{r}$$

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi, \quad \hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi$$

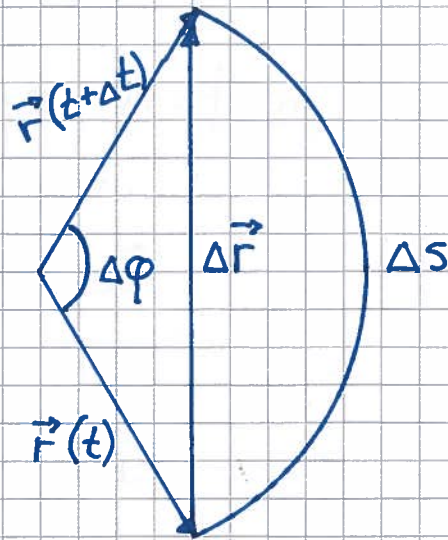
Vinkelhastighet $\stackrel{\text{def}}{=}$ omløpt vinkel pr tidsenhet

$$\omega = d\varphi/dt = \dot{\varphi} ; \quad [\omega] = 1/s$$

Vinkel $\stackrel{\text{def}}{=}$ buelengde / radius

$$\Delta\varphi = \Delta s/r ; \quad [\varphi] = 1 \quad (\text{evt. rad})$$

(7)



Når $\Delta t \rightarrow 0$, blir $\Delta\varphi$ liten og $\Delta r \approx \Delta s = r \Delta\varphi$

$$\Rightarrow v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r \Delta\varphi}{\Delta t} = r \frac{d\varphi}{dt} = r\omega$$

Retning: Ser at $\Delta \vec{r} \perp \vec{r}$ når $\Delta\varphi \rightarrow 0$

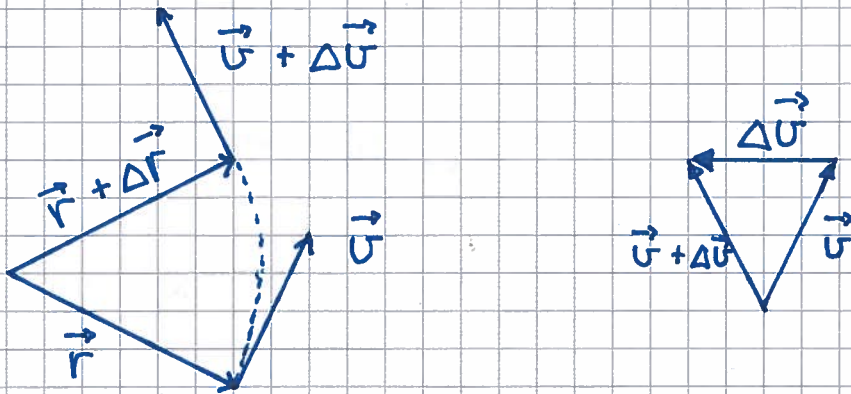
Vet fra før at $\vec{v} \parallel \Delta \vec{r}$

Dermed: $\vec{v} \perp \vec{r}$, dvs $\vec{v} \parallel \hat{\varphi}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = v \hat{\varphi} = r\omega \hat{\varphi}}$$

Akselerasjon:

Vi antar først uniform sirkelbevegelse, dvs konstant ω .



Vi ser at $\Delta \vec{v}$, og dermed $\vec{a}$, har retning inn mot sirkelens sentrum.

Antar $\varphi(0) = 0$ og regner ut $\vec{a}_\perp$:

$$\omega = d\varphi/dt \Rightarrow \int_0^\varphi d\varphi = \omega \int_0^t dt \Rightarrow \varphi(t) = \omega t$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \hat{x} r \cos \omega t + \hat{y} r \sin \omega t$$

$$\vec{v}(t) = -\hat{x} \omega r \sin \omega t + \hat{y} \omega r \cos \omega t \quad (= \omega r \hat{\phi})$$

$$\vec{a}_\perp(t) = -\hat{x} \omega^2 r \cos \omega t - \hat{y} \omega^2 r \sin \omega t$$

$$= -\omega^2 \vec{r}(t)$$

$$= -\omega^2 r \hat{r}(t)$$

$$= \underline{\text{sentrifetalakselerasjonen}}$$

⑨

Hvis v og ω endres, har vi

baneakselerasjon,

$$a_{\parallel} = \dot{v} = r \dot{\omega}$$

og inkelakselerasjon,

$$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\phi} \quad ; \quad [\alpha] = 1/s^2$$

Total akselerasjon ved sirkelbevegelse:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\perp} + \vec{a}_{\parallel} = -\omega^2 r \hat{r} + \dot{\omega} r \hat{\phi}$$

$$\text{evt. } \vec{a}_{\perp} = -\frac{v^2}{r} \hat{r} \quad (\text{siden } \omega = v/r)$$

Periode = tid pr omløp:

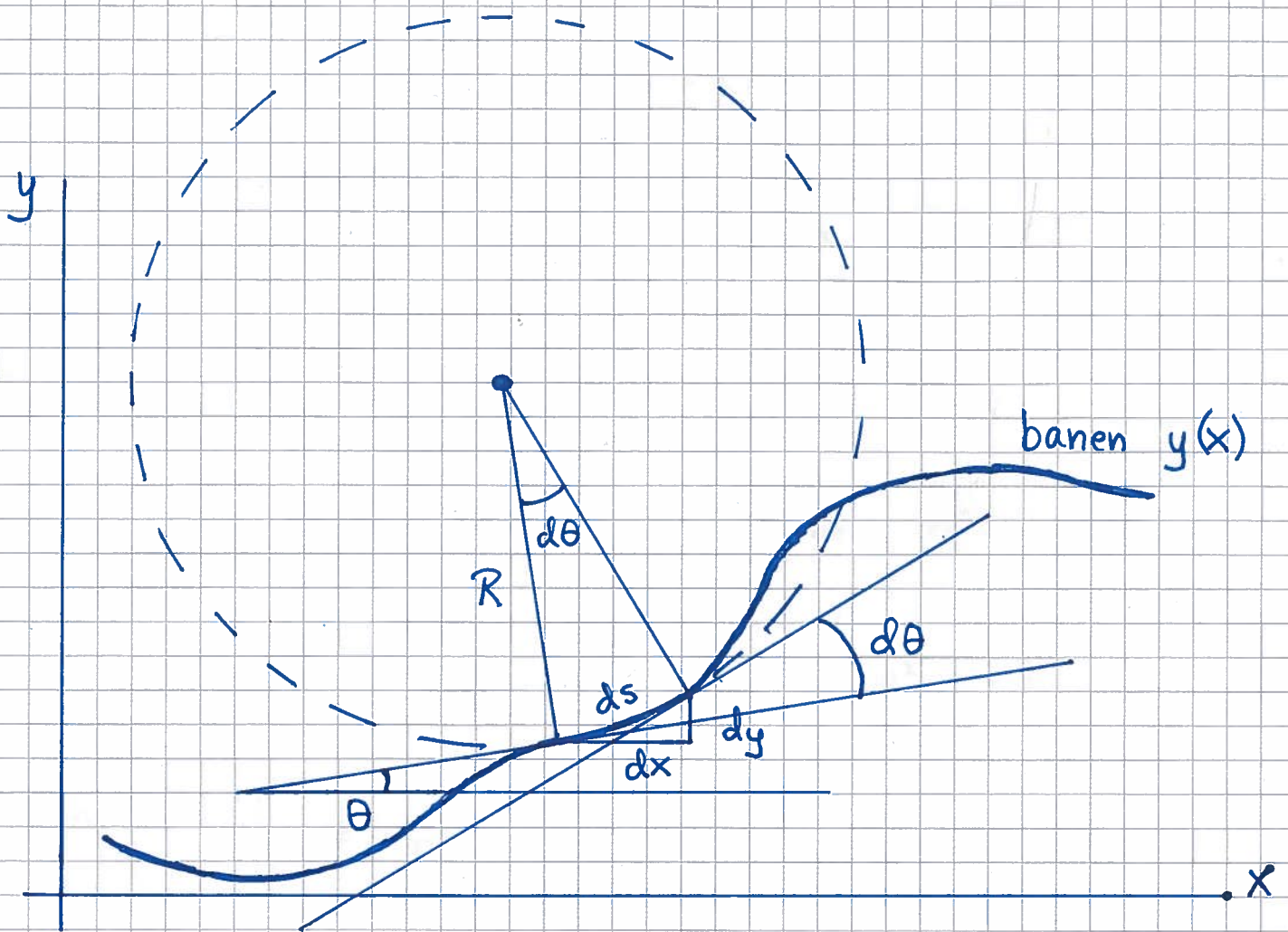
$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \quad ; \quad [T] = s$$

Frekvens = antall omløp pr tidsenhet:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad ; \quad [f] = \frac{1}{s} = \text{Hz} \quad (\text{hertz})$$

Krumlinjet bevægelse

(Lab!)



Langs banen er $a_{\perp} = v^2/R$, der krumningsradius R er radius i sirkelen som best tangerer banen. Vi skal vise at

$$\frac{1}{R} = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$$

der $y' = dy/dx$ og $y'' = d^2y/dx^2$

Def. av vinkel: $d\theta = \frac{ds}{R} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds}$ (11)

Pythagoras: $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$
 $\Rightarrow ds = dx \sqrt{1 + (dy/dx)^2}$

Kjerneregel: $\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}}$

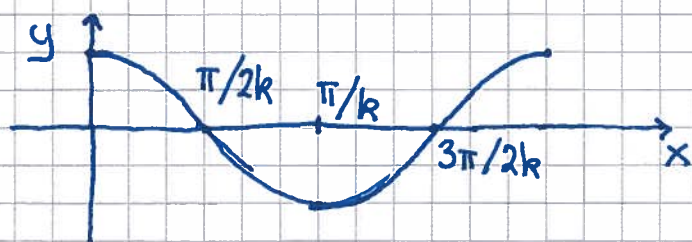
Fra figur: $\tan \theta = \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right) = \text{banens helningsvinkel}$

$\Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{1 + (y')^2} \cdot y''$

Dermed: $\frac{1}{R} = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$ (der vi velger R som positiv)

Eks: $y(x) = A \cdot \cos kx$



$y' = -kA \sin kx$

$y'' = -k^2A \cos kx$

$\Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{|k^2A \cos kx|}{[1 + k^2A^2 \sin^2 kx]^{3/2}}$

Topp- og bunnpunkter: $\cos kx = \pm 1$, $\sin kx = 0 \Rightarrow \frac{1}{R} = k^2A$

Vendepunkter: $\cos kx = 0 \Rightarrow \frac{1}{R} = 0$ ($R \rightarrow \infty$) $\Rightarrow a_{\perp} = 0$

Newtons lover [OS1 5,6 ; YF 4,5 ; LL 2,3] (12)

m , $\vec{v}$ og $\vec{a}$ er hhv legemets masse, hastighet og akselerasjon

$\vec{F}$ = netto ytre kraft på legemet

N1 : $\boxed{\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \text{konstant}}$

N2 : $\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$

N3 : $\boxed{\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}}$

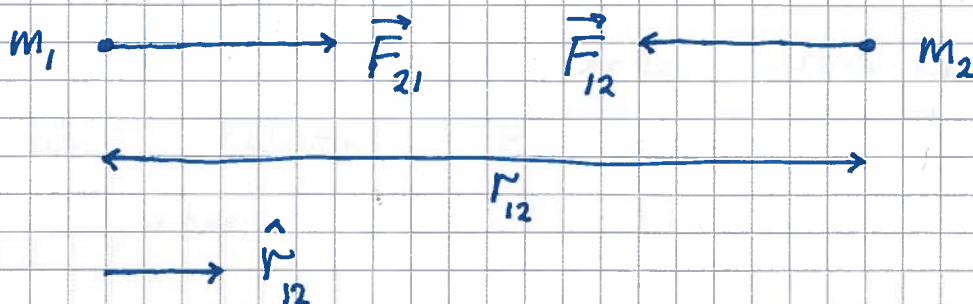
dvs krefter er vekselvirkning mellom legemer.

Når A påvirker B med $\vec{F}_{AB}$, påvirker B A med $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

$$[F] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{N} \quad (\text{newton})$$

Fundamentale krefter [YF 5.5; LL 2.1; OS1 13.1; OS2 5.3]

- Gravitasjon. Svak tiltrekning mellom masser.

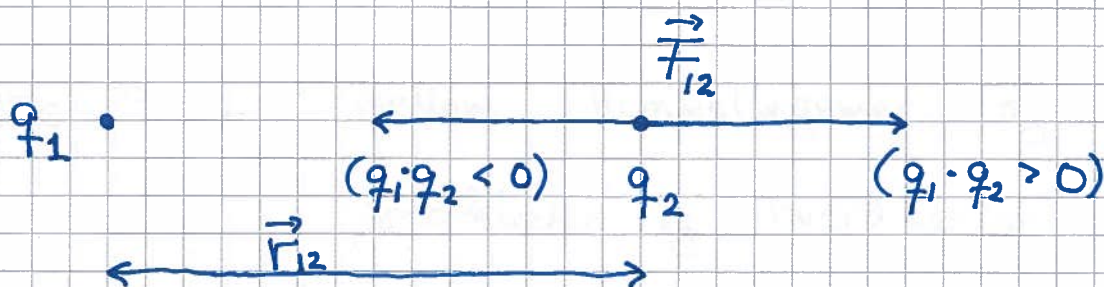


Newtons gravitasjonslov:

$$\vec{F}_{21} = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Gravitasjonskonstanten: $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$

- Elektromagnetisk vekselvirkning.
Tiltrekning og frastøtning mellom ladninger.



Coulombs lov:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

$$[q] = C \text{ (coulomb)} ; 1 C = 1 As$$

(14)

$$\text{Vakuumpermittiviteten: } \epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$

- Kjernekrefter. Svake og sterke. Svært kort rekkevidde. Relevans: Radioaktivitet. Stabilitet av atomkjerner.

Vår hverdag styres av gravitasjon (F_G) og coulombkrefter (F_E).

$$\text{Proton: } m_p \approx 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}, q = e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\text{Elektron: } m_e \approx 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}, q = -e$$

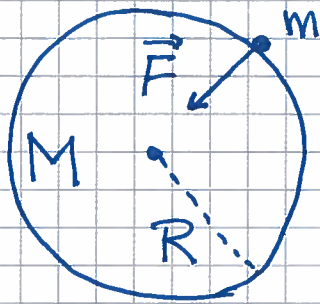
Dermed:

$$F_E \gg F_G \text{ mellom atomer og hverdagslige objekter}$$

$$F_G \gg F_E \text{ mellom himmellegemer, og mellom jordkloden og hverdagslige objekter}$$

Tyngde [os1 13.2 ; YF 4.4 ; LL 2.5]

⑮



Tyngden av m =
Gravitasjonskraften på m fra M

$$F = G M m / R^2$$

Jorda : $M \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $R \approx 6370 \text{ km}$

$$\Rightarrow g = GM/R^2 \approx 9.81 \text{ m/s}^2$$

= tyngdens akselerasjon på/nær jordas overflate

Fritt fall dersom tyngden mg er
eneste kraft på m . N2 gir da

$$mg = ma$$

dvs

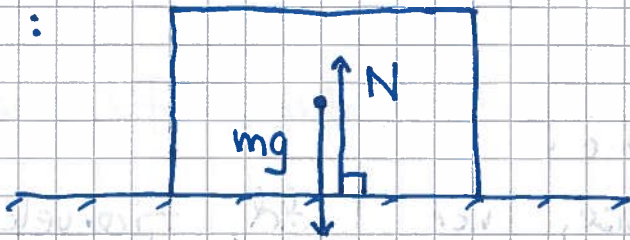
$$\underline{a = g}$$

Kontaktkrefter

[OS1 5.6, 6.2, 6.4^(14,3); YF 4.1, 5.3; LL 3, 8] (16)

Normalkraft : N = normalkomponenten av frastøtende coulombkraft mellom to legener i kontakt

Eks :



Hvis klossen ligger i ro :

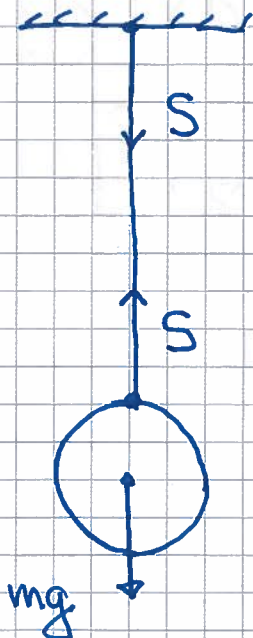
$$N = mg \quad (N1)$$

Snorkraft (strekk, "tension") :

S = netto tiltrekkende coulombkraft mellom snora og legemet som er festet til snora ;

$\vec{S}$ i snoras retning

Eks :

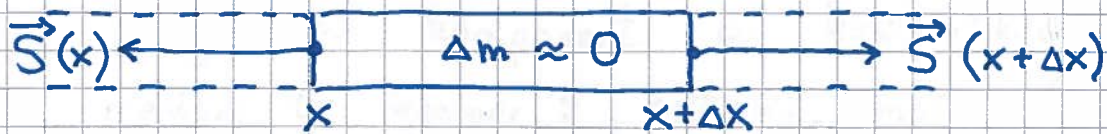


Hvis kula henger i ro :

$$S = mg \quad (N1)$$

[Hva er "motkreftene" til N , S og mg ?]

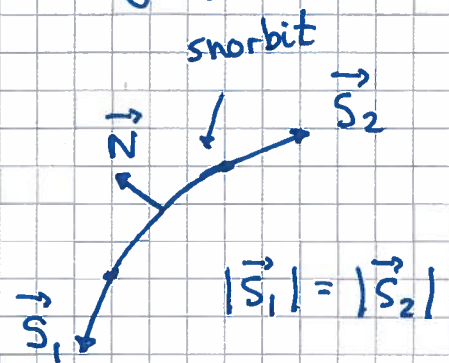
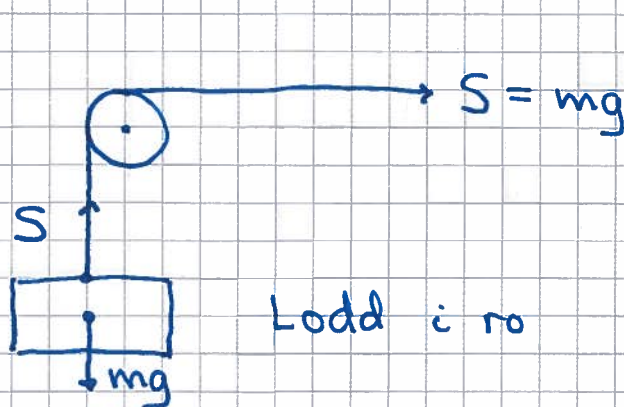
Let, stram snor blir rett, og med konstant S : (17)



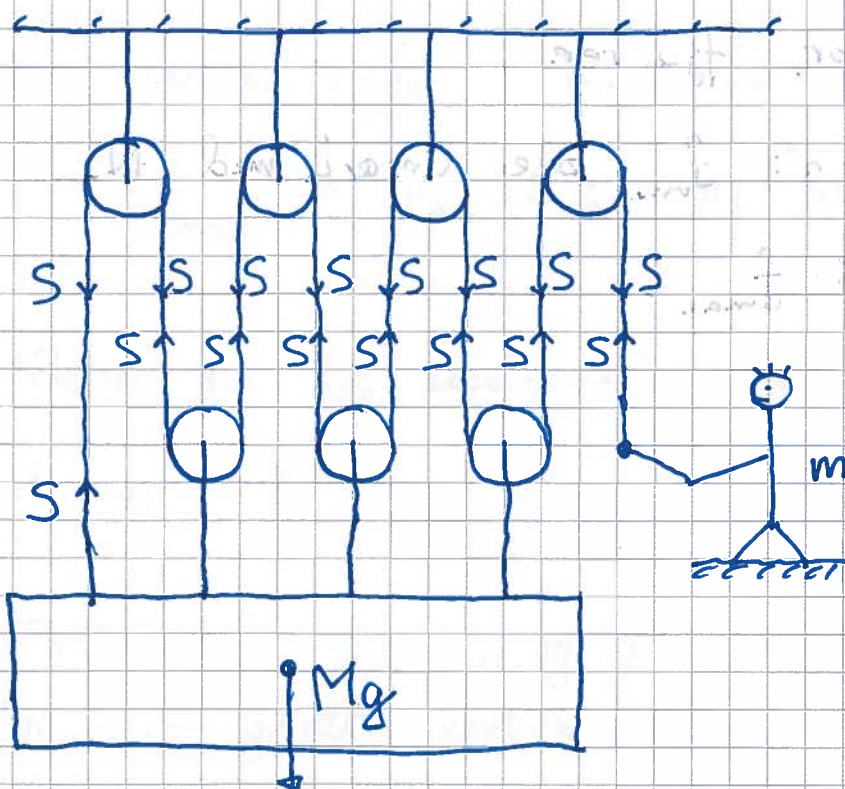
$$N1, N2 \Rightarrow \vec{S}(x) + \vec{S}(x+\Delta x) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{S}(x+\Delta x) = -\vec{S}(x) \Rightarrow S = \text{konst.}$$

Trinse (friksjonsfri) endrer (kun) retning på $\vec{S}$:



Talje:



N1 for kassa:

$$7S - Mg = 0$$

$\Downarrow$

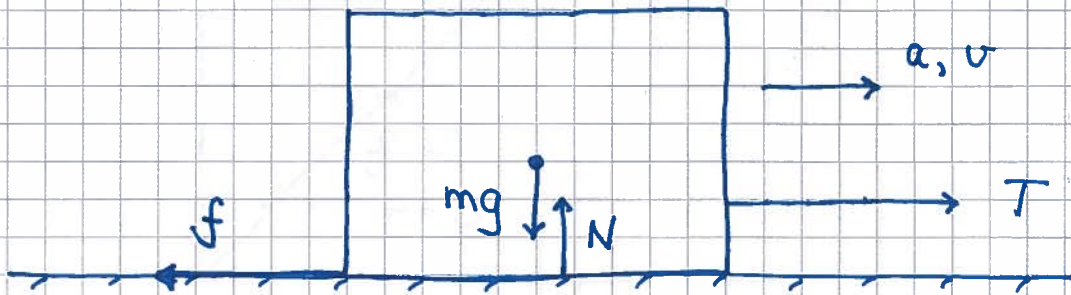
$$S = \frac{1}{7} Mg$$

$$(S_{\max} = mg)$$

Frisksjonskrefter [OS1 6.2; YF 5.3; LL 3.1] (18)

f = tangentiell komponent av kontaktkraft mellom to legemer; retning mot ("ønsket") relativ bevegelse

Tørr frisksjon:



T = trekk-kraft, f = frisksjonskraft

$$NR: T - f = ma$$

Hvis klossen ligger i ro ($a=0$): $f = T$;

$$f_{\max} = \mu_s \cdot N; \quad \mu_s = \text{statisk frisksjonskoeffisient}$$

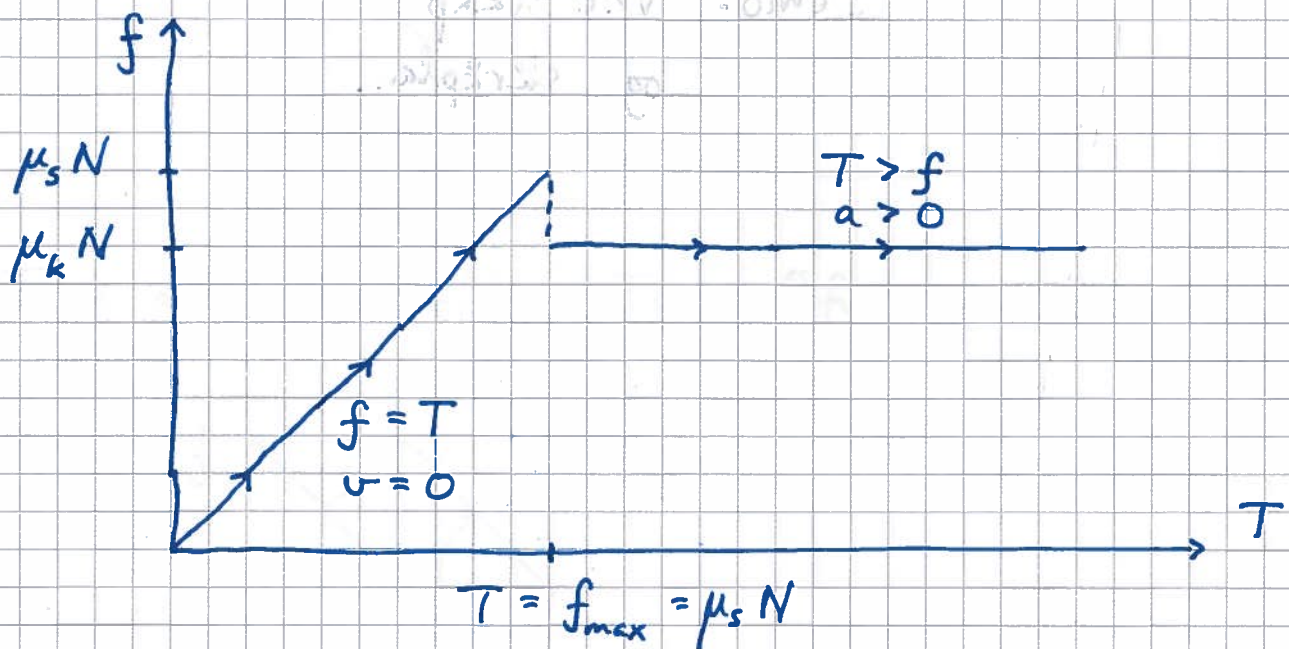
Klossen glir (og akselererer) hvis $T > f_{\max}$;

$$\text{da er } f = \mu_k \cdot N; \quad \mu_k = \text{kinetisk frisksjonskoeffisient}$$

Tallverdier for μ_s og μ_k avhenger av type materialer og hvor glatte kontaktflatene er.

Vanligvis er $\mu_s > \mu_k$: Ujevnheter i overflatene gir best grep når $v = 0$.

Grafisk :



Et par tallverdier :

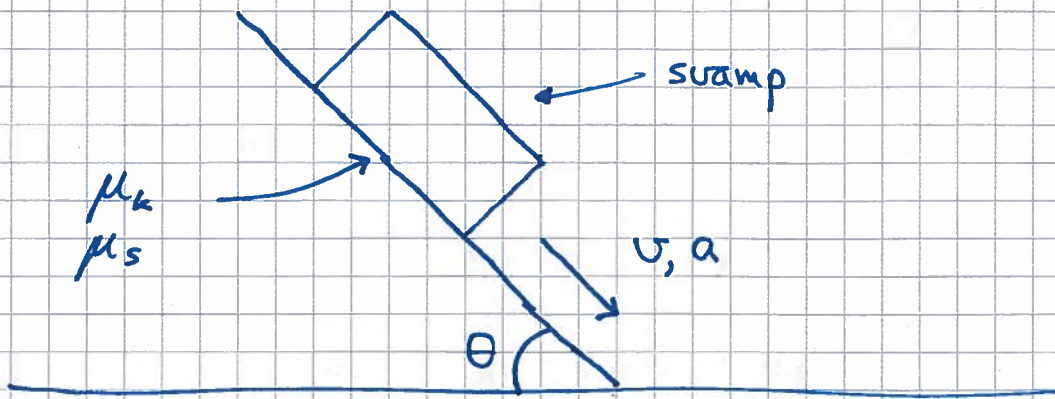
Stål mot is : $\mu_s \approx 0.03$

Gummi mot plast : $\mu_s \approx 1$ (Lab)

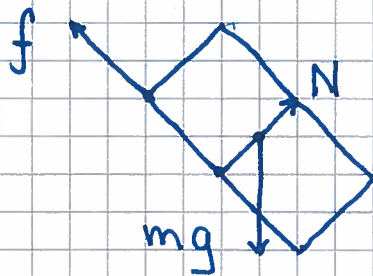
Våt svamp mot bordplate : $\mu_s > 1$

(se eks. neste side)

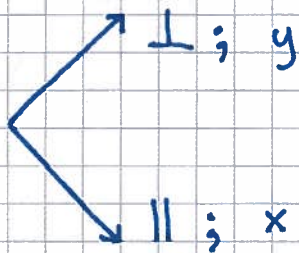
Problemløsningsstrategi via et eksempel:



- Finn alle ytre krefter. Tegn "fritt-legeme-diagram".



- Velg koordinatsystem. Dekomponer.



$$N = N_y, \quad N_x = 0$$

$$f = f_x, \quad f_y = 0$$

$$G_x = mg \sin \theta, \quad G_y = mg \cos \theta$$

- Bruk N1, $\sum_i \vec{F}_i = 0$, eller N2, $\vec{a} = \frac{\sum_i \vec{F}_i}{m}$, og løs resulterende ligninger.

Her: N1 i y -retn. $\Rightarrow N = mg \cos \theta$

N2 i x -retn. $\Rightarrow mg \sin \theta - f = ma$

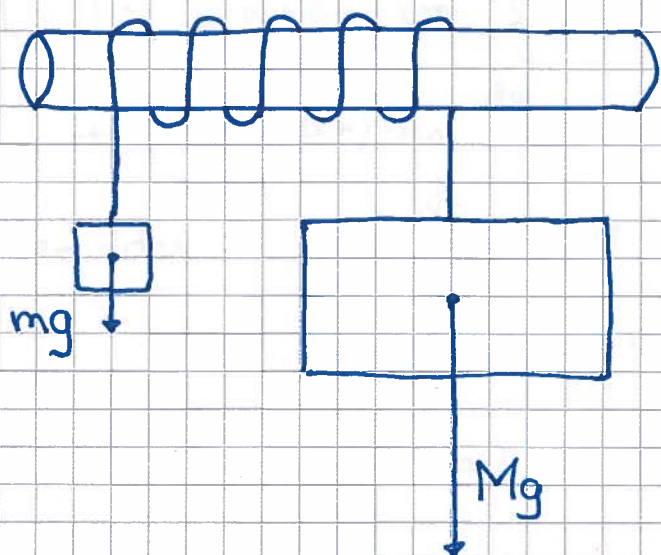
Hvis svæmp i ro : $f = mg \sin \theta$ ($a=0$)

Gir dersom $mg \sin \theta > f_{\max} = \mu_s N = \mu_s mg \cos \theta$,
dvs dersom $\tan \theta > \mu_s$.

Da er $f = \mu_k N = \mu_k mg \cos \theta$, dvs
 $a = g (\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$

Exp. med våt svæmp gir max θ med svæmp i ro,
og dermed $\mu_s = \tan \theta_{\max}$.

Eks : Snorfiksjon ["Med livet som innsats"]

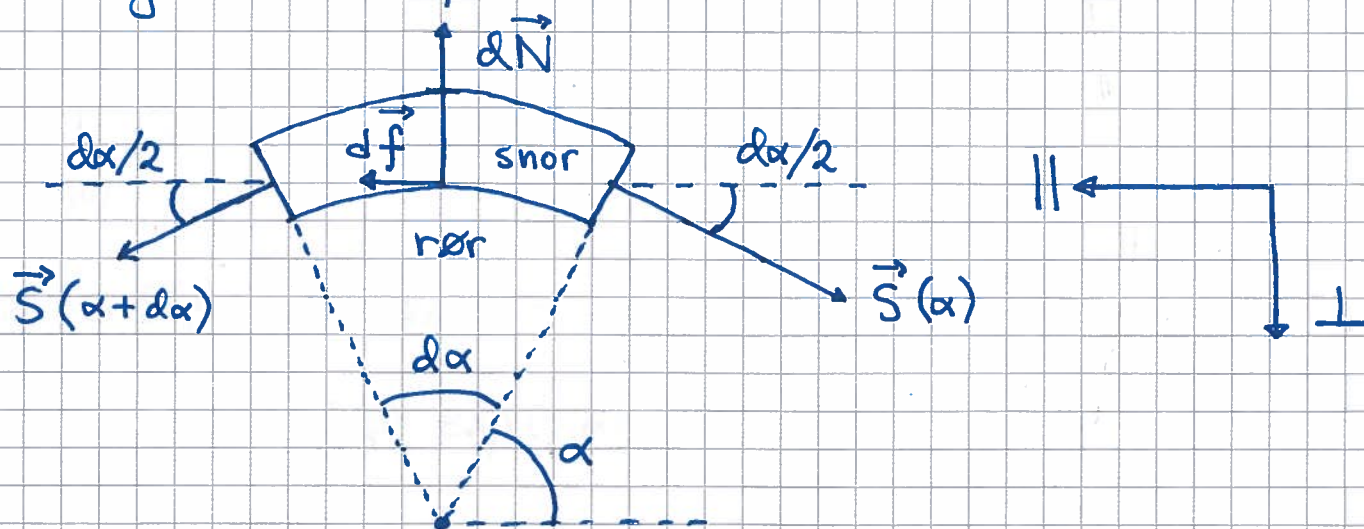


μ = statisk friksjonskoeff.
mellom rør og snor

Finn minste m som holder M oppe for gitt
kontaktvinkel φ mellom rør og snor.

(I figuren : $\varphi = 9\pi$)

Løsning : N1 for bitteliten snorbit



$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \underbrace{\vec{S}(\alpha+d\alpha) + \vec{S}(\alpha)}_{\text{snordrag (fra resten av snora)}} + \underbrace{d\vec{N} + d\vec{f}}_{\text{normalkraft og friksjonskraft (fra røret)}} = 0$$

Minimal m når df er maksimal : $df = df_{\max} = \mu \cdot dN$

$$N1, ||: S(\alpha+d\alpha) \cos \frac{d\alpha}{2} - S(\alpha) \cos \frac{d\alpha}{2} + \mu dN = 0$$

$$N1, \perp: S(\alpha+d\alpha) \sin \frac{d\alpha}{2} + S(\alpha) \sin \frac{d\alpha}{2} - dN = 0$$

$$\text{Liten } d\alpha: \cos \frac{d\alpha}{2} \approx 1, \quad \sin \frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$$

$$S(\alpha+d\alpha) - S(\alpha) = dS$$

$$S(\alpha+d\alpha) + S(\alpha) = 2S$$

$$\text{Dermed: } dS = -\mu dN; \quad 2S \cdot \frac{d\alpha}{2} = dN$$

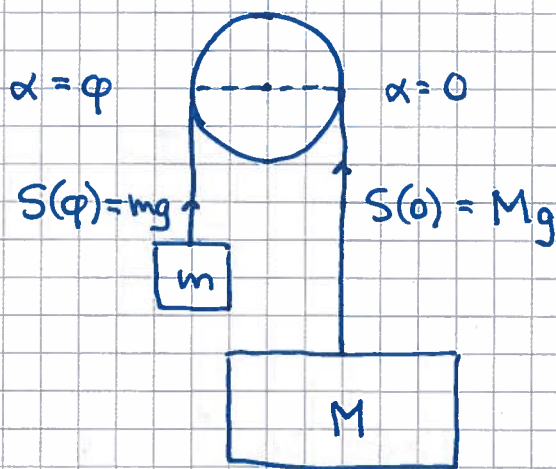
$$\Rightarrow dS/S = -\mu d\alpha$$

Finner $S(\varphi)$ ved å integrere, fra $\alpha=0$ til $\alpha=\varphi$: (23)

$$\int_{S(0)}^{S(\varphi)} \frac{dS}{S} = -\mu \int_0^\varphi d\alpha$$

$$\Rightarrow \ln S(\varphi) - \ln S(0) = -\mu\varphi$$

$$\Rightarrow S(\varphi) = S(0) \exp(-\mu\varphi)$$



Hvis $\mu \approx 0.17$, $M = 1 \text{ kg}$ og $\varphi = 9\pi$, blir

$$m = 1000\text{g} \cdot \exp(-0.17 \cdot 9\pi) \approx 8\text{g}$$

Omvendt: Påkrevd m for å heise M oppover er

bestemt av $S(\varphi) = S(0) \exp(+\mu\varphi)$, dvs

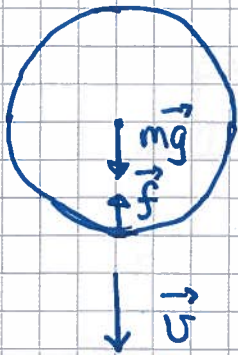
$$m = 1\text{kg} \cdot \exp(+0.17 \cdot 9\pi) \approx 122\text{kg}$$

Friksjon i fluider [OS1 6.4, 14.7; YF 5.3; LL 8]

(24)

Ser på symmetriske legemer med hastighet $\vec{v}$ relativt omgivende fluid (gass eller væske) med massetetthet ρ og dynamisk viskositet μ

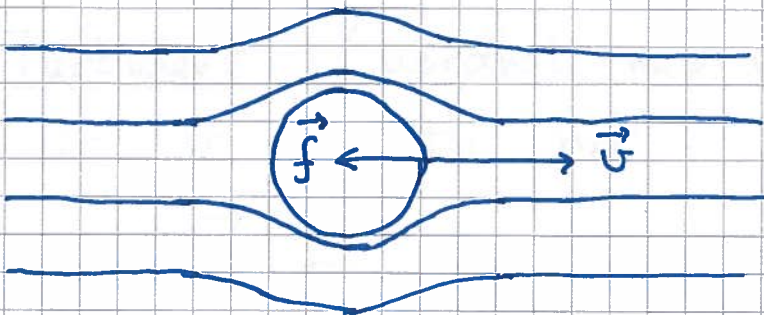
Eks: Ball i luft



$\vec{f}$ = luftmotstand

areal πr^2 på tvers av $\vec{v}$

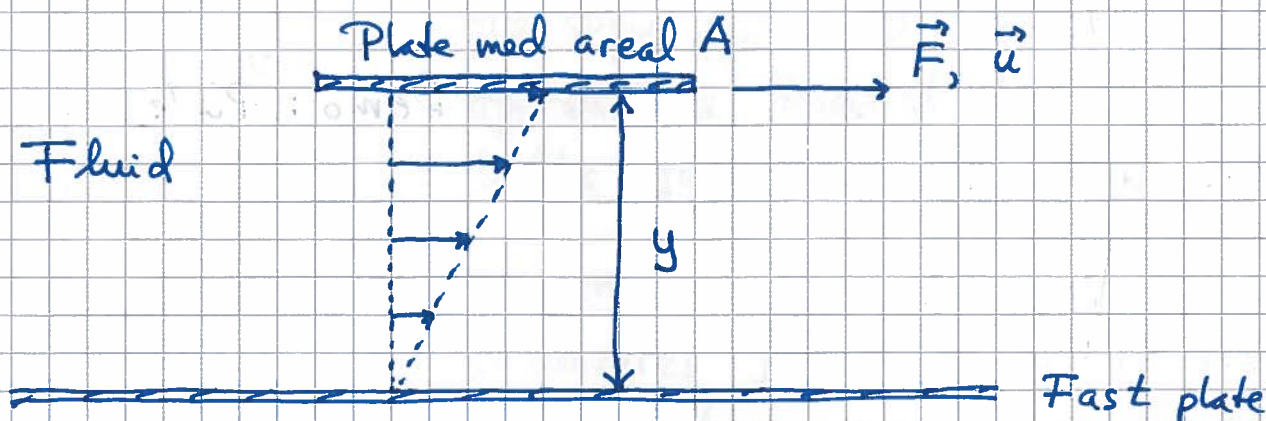
Laminær (pen, lagdelt) strømning av fluidet når v er liten nok :



$$\vec{f} = -k \cdot \vec{v}$$

Kule, radius r : $k = 6\pi \mu r$ (Stokes' lov)

Dynamisk viskositet μ ; definisjon og måling:



Liten fart u på fri plate gir lineær fartsprofil i fluidet mellom platene.

Empirisk (dvs: eksperimentelt) finner man

$$F = \mu \cdot \frac{A \cdot u}{y}$$

der μ kalles fluidets dynamiske viskositet; $[\mu] = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$

Tallverdier $\nu / 20^\circ\text{C}$:

Fluid	Luft	Vann	Glyserol	Sirup
μ	$2 \cdot 10^{-5}$	10^{-3}	1	10^2

Turbulent (uordnet, med virvler) strømning når v er stor nok:

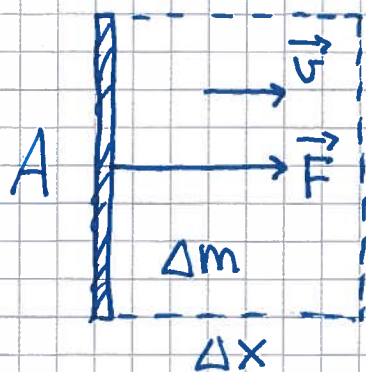
$$\vec{f} = -\left(\frac{1}{2} \rho A C_d\right) v^2 \hat{v}$$

C_d = drag-koeffisient (Kule: $C_d \approx 0.5$)

A = legemets areal på tvers av $\vec{v}$

Eks 1: C_d for plate

(26)



Må skyve plata med kraft F for å opprettholde konstant fart v , fordi lufta foran må settes i bevegelse.

Massen $\Delta m = \rho \cdot \Delta V = \rho \cdot A \cdot \Delta x$
akselereres fra 0 til v på tiden
 $\Delta t = \Delta x / v$.

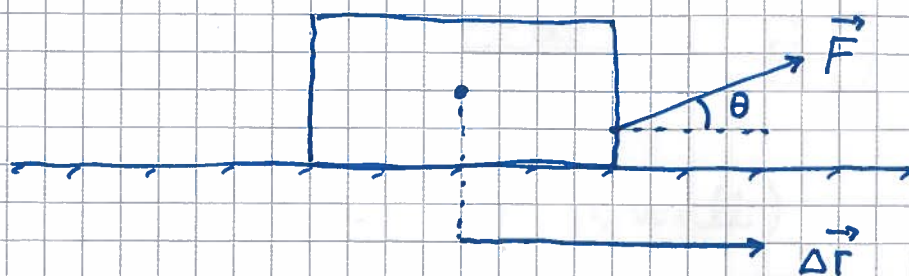
N2 gir da: $F = \Delta m \cdot \frac{v}{\Delta t} = \rho A \Delta x \cdot \frac{v}{\Delta t} = \rho A v^2$, som
stemmer med $\frac{1}{2} \rho A C_d v^2$ dersom $C_d = 2$

Eks 2: Bilen Revolve har $A \approx 1.1 \text{ m}^2$ og $C_d \approx 1.35$.
Hva er luftmotstanden ved 100 km/h?

Løsning:

$$f = \frac{1}{2} \rho A C_d v^2$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 1.1 \text{ m}^2 \cdot 1.35 \cdot \left(\frac{100}{3.6}\right)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$
$$\approx \underline{\underline{690 \text{ N}}}$$

(Luft har $\rho \approx 1.2 \text{ kg/m}^3$)

Arbeid [OS1 7.1 ; YF 6.1-6.3 ; LL 4.1]

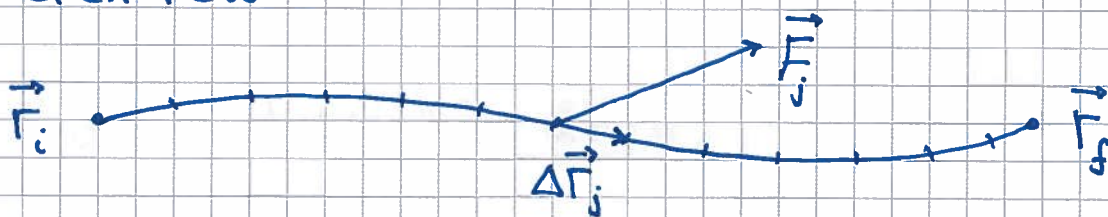
arbeid $\stackrel{\text{def}}{=}$ kraft $\times$ forflytning

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta$$

= arbeid utført av $\vec{F}$ på klossen når
klossens forflytning er $\Delta \vec{r}$

$$[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J} \quad (\text{joule})$$

Generelt :



$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j \xrightarrow{\Delta r_j \rightarrow 0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_j} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

= arbeid utført av $\vec{F}$ ved forflytningen
fra $\vec{r}_i$ til $\vec{r}_j$

Effekt [OS1 7.4 ; YF 6.4 ; LL 4.1]

(28)

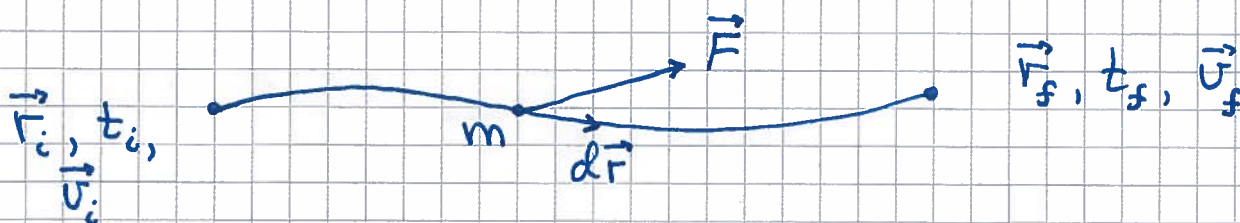
effekt $\stackrel{\text{def}}{=}$ arbeid (eller energi) pr tidsenhet

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$[P] = J/s = W \text{ (watt)}$$

$$1 \text{ kWh} = 1000 \frac{J}{s} \cdot 3600 s = 3.6 \text{ MJ}$$

Kinetisk energi [OS1 7.2 ; YF 6.2 ; LL 4.2]



$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_i^f m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \int_i^f \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} (\vec{v} \cdot d\vec{v} + d\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} d(v^2)$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} m \int_{v_i^2}^{v_f^2} d(v^2) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$K = \text{kinetisk energi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} m v^2$$

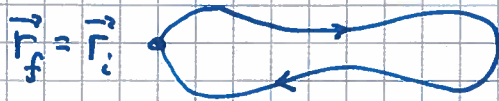
$$\Rightarrow \boxed{W = \Delta K = K_f - K_i}$$

Arbeidet W utført på legemet tilsvarer endringen i legemets kin. energi, ΔK

Konservative krefter [os1 8.2 ; YF 7.3 ; LL 4]

(29)

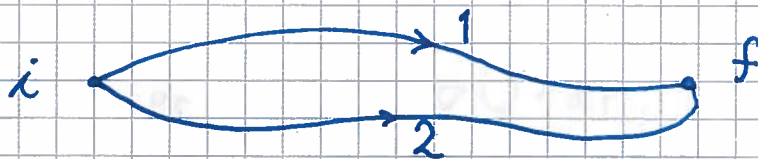
Anta at $\vec{F}$ virker på legeme som returnerer til startposisjonen:



Hvis $K_f = K_i$, er $W = \Delta K = 0$, dvs

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Da er $\vec{F}$ en konservativ kraft, og arbeidet W er uavhengig av veien:



$$\begin{aligned} 0 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_1 + \left\{ \int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_2 \\ &= W_1 - W_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{W_1 = W_2}$$

Konservative krefter: Tyngdekraft, coulombkraft

Friksjonskrefter er ikke konservative

Potensiell energi [OS1 8.1-8.4; YF 7.1-7.4; LL4.3-4.4] (30)

Hvis $\vec{F}$ er konservativ, defineres den potensielle energien slik:

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Her har vi valgt å sette $U=0$ i $\vec{r} = \vec{r}_0$.

Dvs: Bare forskjeller i pot. energi har fysisk betydning

For liten forflytning er altså $dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Generelt er $dU = \nabla U \cdot d\vec{r}$, med

$$\nabla U = \hat{x} \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial U}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial U}{\partial z} = \text{gradienten til } U$$

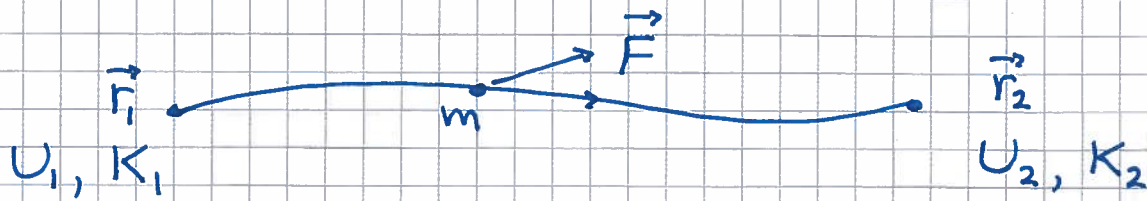
$$d\vec{r} = \hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz$$

Sammenligning gir nå

$$\boxed{\vec{F} = -\nabla U}$$

Bevaring av mekanisk energi

[OS1 8.3 ; YF 7.1-7.3 ; LL 4.5]



$$\Delta K = K_2 - K_1 = W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\begin{aligned} \Delta U &= U_2 - U_1 = - \int_0^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} - \left\{ - \int_0^1 \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\} \\ &= \int_2^0 \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_0^1 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_2^1 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W \end{aligned}$$

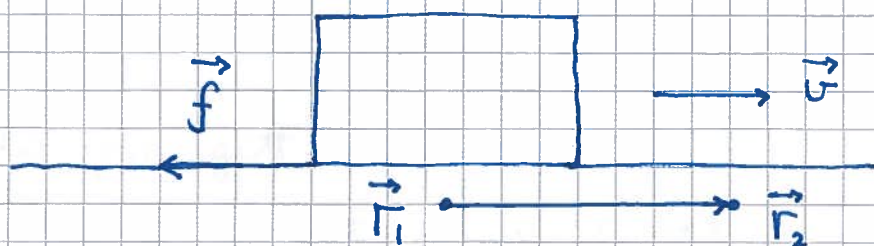
$$\Rightarrow K_2 - K_1 = U_1 - U_2$$

$$\Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

Dvs: Total mekanisk energi,

$$E = K + U$$

er bevarat i et konservertiert system



$$W_f = \int_1^2 \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \quad \text{siden } \vec{f} \text{ alltid har retning mot } d\vec{r}$$

Mekanisk energi tapes ; omdannes til varme, lyd etc.

Siden $\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$, er $\vec{f}$ ikke konservativ

Ved ren rulling er kontaktpunktet i ro, dvs statisk frøksjon, $d\vec{r} = 0 \Rightarrow W_f = 0$, og mek. energi er bevart.

Ekse : Bordtennisball som faller



$$\begin{aligned} m &= 2.7 \text{ g} \\ r &= 20 \text{ mm} \\ C_d &= 0.5 \end{aligned}$$

- Hva er max fart ?
- Anta max fart og bestem $|W_f|$ når ballen har falt 20 m. ($v_i = 0$)

Løsning :

$$\bullet \text{ Vi antar } f = \frac{1}{2} \rho A C_d v_t^2 \quad \text{når } v = v_{\max} = v_t = \text{terminal-hastigheten}$$

$$N1 \Rightarrow f = mg \Rightarrow v_t = \sqrt{2mg / \rho A C_d} \approx \underline{8.4 \text{ m/s}} \quad (\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3 ; A = \pi r^2)$$

$$\bullet E_i = U_i = mgh ; \quad E_f = \frac{1}{2} m v_t^2$$

$$\begin{aligned} |W_f| &= E_i - E_f = mgh - \frac{m^2 g}{\rho A C_d} = mg(h - m / \rho A C_d) \\ &= \underline{0.43 \text{ J}}, \text{ som er } 82\% \text{ av opprinnelig mek. energi.} \end{aligned}$$

$$(\text{Fritt fall } 20 \text{ m} \Rightarrow v_f = \sqrt{2gh} \approx 20 \text{ m/s})$$

Impuls [OS1 9 ; YF 8 ; LL 5]

(= bevægelsesmængde = linear momentum)

N2, for gitt masse m :

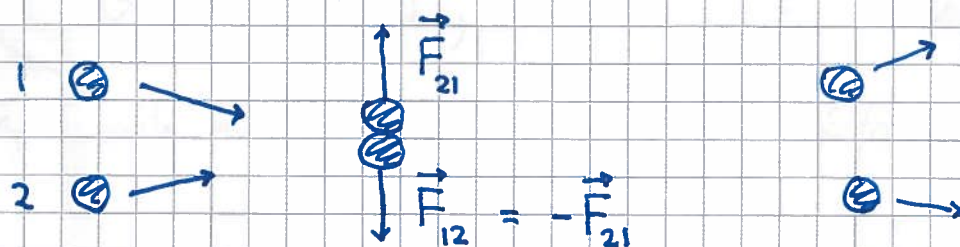
$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{p} \stackrel{\text{def}}{=} m\vec{v} = \text{massens impuls} ; [\vec{p}] = \text{kg m/s}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Hvis } \vec{F} = 0, \text{ er } \vec{p} \text{ bevart}}$$

Loven om
impulsbevarelse

Indre krefter i et system endrer ikke total impuls:



$$N3 \Rightarrow \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0$$

$$\stackrel{N2}{\Rightarrow} \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \{ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konstant}$$

Kollisjoner [OS1 9.2-9.4; YF 8.3, 8.4 ; LL 5] (34)

Hvis ytre krefter kan neglisjeres, er total impuls bevart i en kollisjon; men ikke nødv.vis mek. energi E .

Elastisk støt: $\Delta E = 0$

Uelastisk støt: $\Delta E < 0$

Fullstendig uelastisk støt: Legemene henger sammen med felles hastighet etter kollisjonen. Gir maksimalt tap av mekanisk energi E .

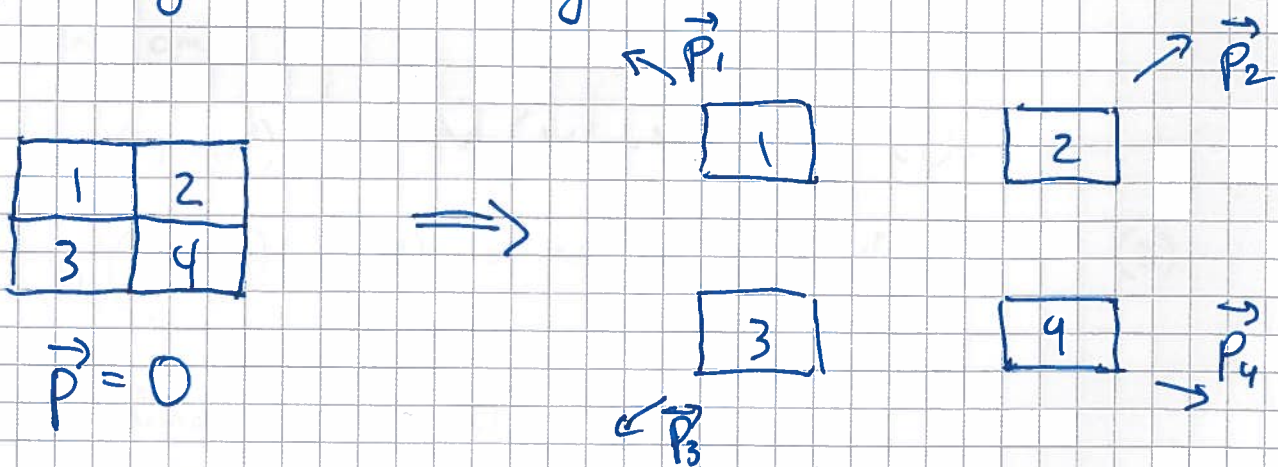
De fleste kollisjoner er kortvarige og skjer på et gitt sted

$$\Rightarrow \Delta U \approx 0, \quad \Delta E \approx \Delta K \text{ i kollisjonen}$$

Tapt mek. energi transformeres til deformasjon, varme, lyd.

En eksplosjon kan betraktes som en "omvendt"

fullstendig uelastisk kollisjon:



$$\sum_{j=1}^4 \vec{p}_j = 0$$

Sentralt støt [OS1 9.4; YF 8.2-8.4; LL 5.3]

(35)

Støt mellom m og M langs ei linje:

Før: $m \rightarrow v$ $V \leftarrow M$ ($\rightarrow +$)

Etter: $v' \leftarrow m$ $M \rightarrow V'$

Altid: $\Delta p = 0 \Rightarrow mv + MV = mv' + MV' \quad (1)$

(a) Fullst. uel. støt:

$$v' = V' = \frac{mv + MV}{m + M}$$

(b) Delvis uel. støt: Ikke løsbart (1 lign., 2 ukjente)

(c) Elastisk støt:

$$\Delta K = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}m(v')^2 + \frac{1}{2}M(V')^2 \quad (2)$$

Skir om (1) og (2):

$$m(v - v') = M(V' - V) \quad (1)$$

$$m(v - v')(v + v') = M(V' - V)(V' + V) \quad (2)$$

(2) dividert med (1) gir

$$v + v' = V' + V \quad (3)$$

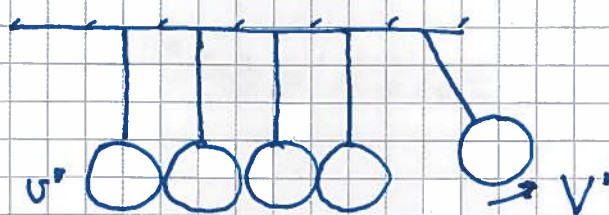
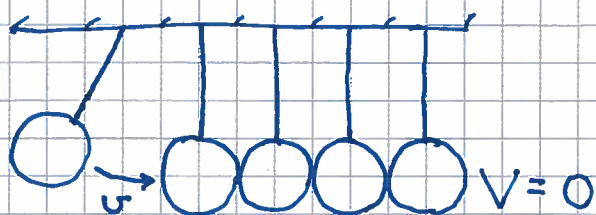
Tar hvor $(3) \cdot M - (1)$ og $(3) \cdot m + (1)$ og får

(36)

$$u' = \frac{M}{m+M} \left\{ 2V + u \cdot \frac{m-M}{M} \right\}$$

$$V' = \frac{m}{M+m} \left\{ 2u + V \cdot \frac{M-m}{m} \right\}$$

Eks 1: Newtons kugge



$$m = M \Rightarrow V' = u, \quad u' = V = 0$$

Eks 2: Elastisk ball mot vegg



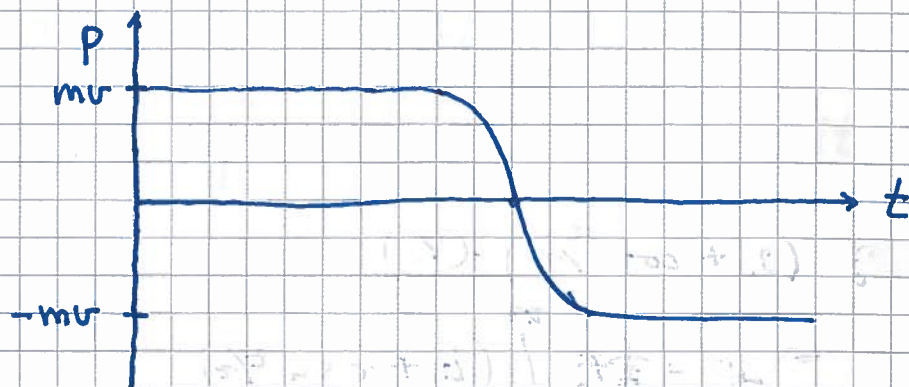
$$u' = \frac{M}{m+M} \left\{ 0 + u \cdot \frac{m-M}{M} \right\} \stackrel{m \ll M}{=} -u$$

$$\Rightarrow K' = \frac{1}{2} m (u')^2 = \frac{1}{2} m u^2 = K \quad ; \quad \text{OK}$$

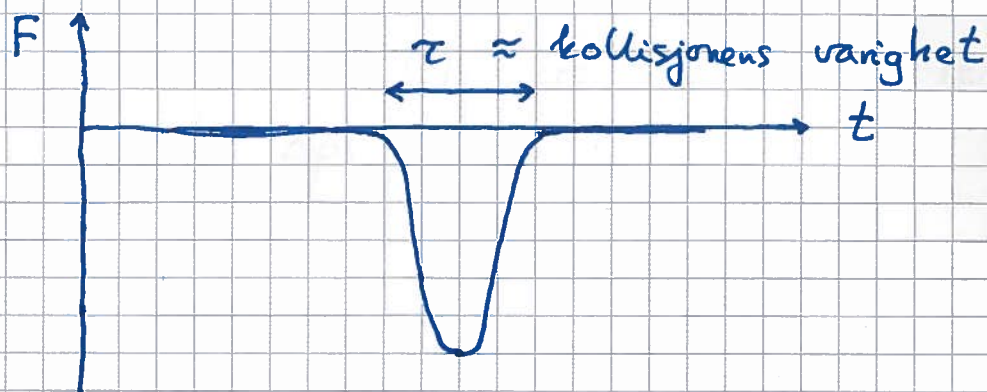
$$p' = m u' + M V' = -m u + M \cdot \frac{m}{m+M} \cdot 2u$$

$$= -m u + 2m u = m u = p \quad ; \quad \text{OK}$$

Ballens impuls $p(t)$ (kvalitativt) :



Kraften fra veggen på ballen, $\vec{F}(t) = d\vec{p}/dt$:



Anta f.eks. $\tau \approx 2 \text{ ms}$ og $|\Delta \vec{v}| \approx 40 \text{ m/s}$.

Gir en midlere akselerasjon i støtet

$$\langle a \rangle \approx \frac{40 \text{ m/s}}{0.002 \text{ s}} = 20 \text{ km/s}^2 \gg g$$

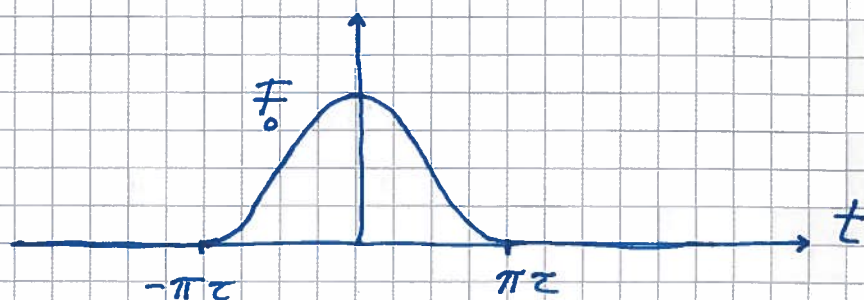
Dvs, tyngden mg kan trygt neglisjeres i selve kollisjonen

Kraftstøt ("impulse") :

Ytre kraft $\vec{F}(t)$ gir legemet en impulsending

$$\Delta \vec{p} = \int d\vec{p} = \int \vec{F}(t) dt$$

Eks :



Anta $F(t) = \frac{1}{2} F_0 (1 + \cos t/\tau)$ for $|t| \leq \pi\tau$
og regn ut Δp .

Løsn :

$$\Delta p = \int_{-\pi\tau}^{\pi\tau} F(t) dt$$

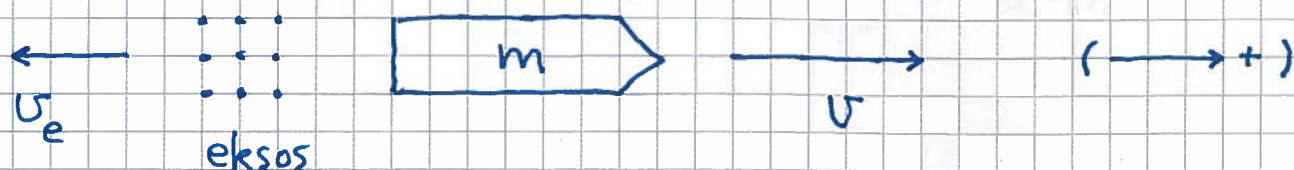
$$= \frac{1}{2} F_0 \int_{-\pi\tau}^{\pi\tau} (t + \tau \sin t/\tau) dt$$

$$= \frac{1}{2} F_0 \cdot 2\pi\tau$$

$$= \underline{\underline{\pi F_0 \tau}}$$

Rakett [OS1 9.7; YF 8.6; LL 5.4]

(39)



Eksosfart relativt raketten : $u < 0$

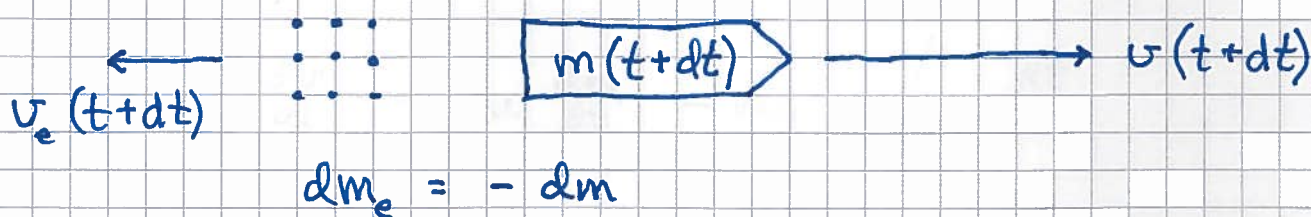
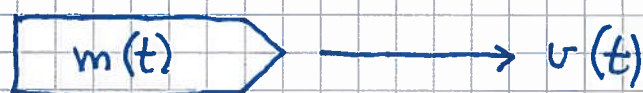
Rakettfart — " — fast system: $v > 0$

Eksosfart — " — — " — : $u_e = u + v$

Drivstoff-forbruk pr tidsenhet : $dm/dt < 0$

Anta $u = \text{konstant}$ og (foreløpig) $F_{ytre} = 0$

$\Rightarrow$ Impulsen er bevart for en gitt masse :



$$p(t) = m(t) \cdot v(t)$$

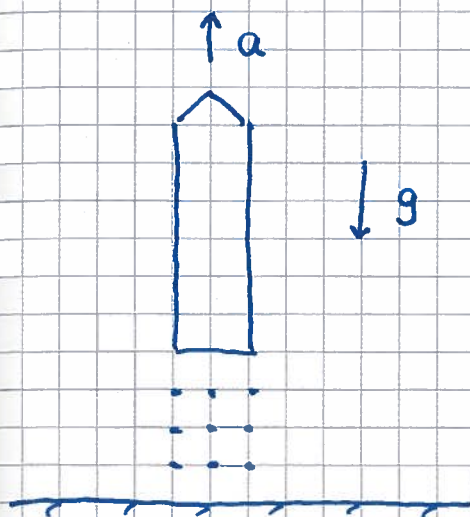
$$\begin{aligned} p(t+dt) &= m(t+dt) \cdot v(t+dt) + dm_e \cdot u_e(t+dt) \\ &= [m(t) + dm] \cdot [v(t) + dv] - dm \cdot [u + v(t) + dv] \\ &= m(t) \cdot v(t) + m(t) \cdot dv - dm \cdot u \end{aligned}$$

$$p(t+dt) = p(t) \quad \Rightarrow \quad m dv - u dm = 0$$

(40)

Derivasjon med dt gir $m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt}$, som er N2,
 $ma = F_{\text{skyr}}$, med skyrkraft $F_{\text{skyr}} = u \cdot \dot{m} > 0$.

For oppskyting fra bakken: $F_{\text{ytte}} = -mg$



$$\Rightarrow ma = u\dot{m} - mg$$

Må (selvsagt) ha
 $u\dot{m} > mg$
for å kunne ta av
fra bakken.

Øving:

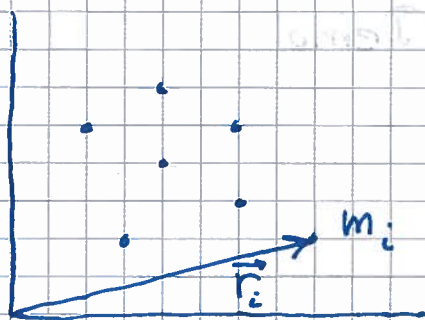
$$m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt} - mg \quad / \cdot \frac{dt}{m}$$

$$\Rightarrow dv = u \frac{dm}{m} - g dt$$

som kan integreres.

Massesenter [OS1 9.6; YF 8.5 + oppg 8.115, 116;
(Tyngdepunkt) LL 5.6, 5.8, 6.1]

(41)



N punktmasser $m_1, m_2, \dots, m_N$
i posisjoner $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$

Systemets massesenter: $\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$

Systemets totale masse: $M = \sum_i m_i$

Med kontinuerlig massefordeling:

$$m_i \rightarrow dm; \quad \sum_i \rightarrow \int$$

$$\Rightarrow \vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm; \quad M = \int dm$$

Masseelementet dm :

1D: $dm = \lambda dl$; $\lambda =$ masse pr lengde^{enhet}; $dl =$ lengdeelement

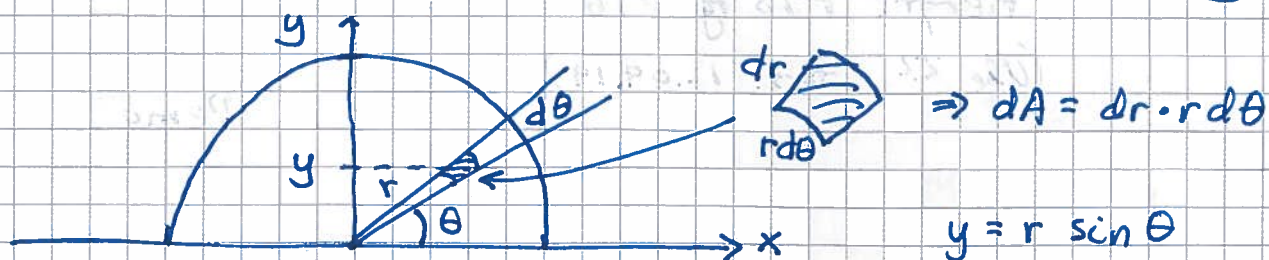
2D: $dm = \sigma dA$; $\sigma =$ " " flateenhet; $dA =$ flateelement

3D: $dm = \rho dV$; $\rho =$ " " volum^{enhet}; $dV =$ volumelement

Uniform massefordeling: $\frac{dm}{M} = \frac{dV}{V}$ osv

Eks 1: Halv sirkulær plate, radius R

(42)



$$\vec{X} = 0 \text{ pga symmetri} \Rightarrow \vec{R}_{cm} = Y \cdot \hat{y}$$

$$\vec{Y} = \frac{1}{M} \int y \, dm = \frac{1}{A} \int y \, dA ; A = \frac{1}{2} \pi R^2$$

$$= \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^\pi r \sin \theta \, dr \, r \, d\theta$$

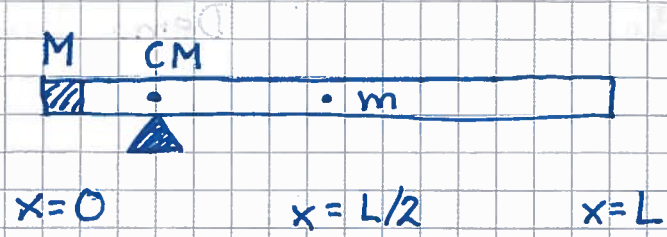
$$= \frac{2}{\pi R^2} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \cdot \left[-\cos \theta \right]_0^\pi = \frac{2}{\pi R^2} \cdot \frac{1}{3} R^3 \cdot 2 = \frac{4R}{3\pi} \approx 0.42R$$

Beregn selv disse:

$$\text{Halv tynn ring: } Y = \frac{2}{\pi} R$$

$$\text{Halv kompakt kule: } Y = \frac{3}{8} R$$

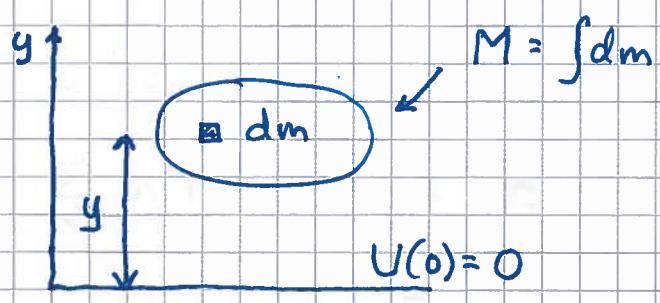
Eks 2: Rør med "punktmasse" i enden



$m = 165 \text{ g}$
 $M = 305 \text{ g}$

$$\bar{x}_{CM} = \frac{1}{m+M} \left\{ M \cdot 0 + \int_0^L x \cdot \frac{m dx}{L} \right\} = \frac{mL}{2(m+M)} \approx \underline{0.18L}$$

Eks 3: Potensiell energi i tyngdefeltet



$U = \int dU = \int g y dm = g M Y$, dvs som om hele massen M er plassert i CM's høyde Y

Legemets tyngdepunkt er der det vil balansere (som røret i Eks 2).

Som regel er g like stor for hele systemet. Da er CM og tyngdepunktet samme sted.

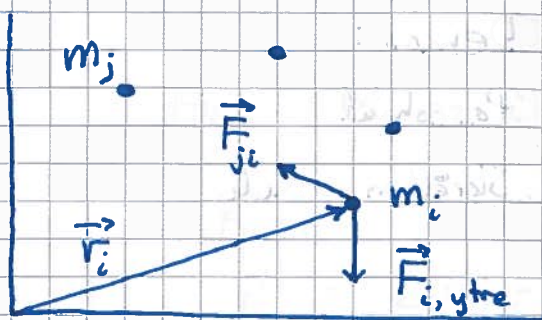
CM's bevegelse

[OS1 9.6 ; YF 8.5 ; LL 5.8]

(44)

Exp. med rør viser / antyder at CM beveger seg som om hele massen er samlet i CM.

Bevis:



$$N2 \text{ for } m_i: m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i,ytre} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$$

Vi tar $\sum_i$ på begge sider.

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \sum_i m_i \vec{r}_i \right\} = \frac{d^2}{dt^2} \{ M \vec{R}_{cm} \} = M \ddot{\vec{R}}_{cm}$$

$$\sum_i \vec{F}_{i,ytre} = \vec{F}_{ytre} = \text{netto ytre kraft på systemet}$$

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \underbrace{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}}_{=0} + \dots + \underbrace{\vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N}}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{ytre} = M \ddot{\vec{R}}_{cm}}$$

CM's bevegelse er som om hele massen M er samlet i $\vec{R}_{cm}$ og blir påvirket av netto ytre kraft $\vec{F}_{ytre}$.

Eks: $\vec{F} \rightarrow \boxed{M}$ $\vec{F} \rightarrow \boxed{M}$ $\vec{A}_{cm} = \frac{\vec{F}}{M}$ for begge klosser

Men klossen til høyre vil også få en rotasjon om CM.

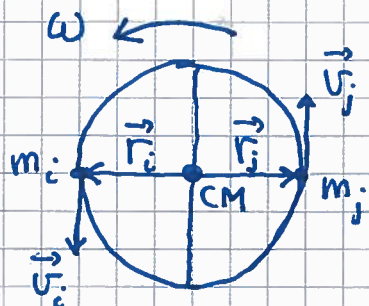
Ikke helt stive legemer kan også få indre vibrasjon.

Rotasjon [OS1 10,11; YF 9,10; LL 5,6]

(45)

De neste 2-3 ukene:

- Rotasjon om akse gjennom CM



Hvis CM er i ro (ren rotasjon):

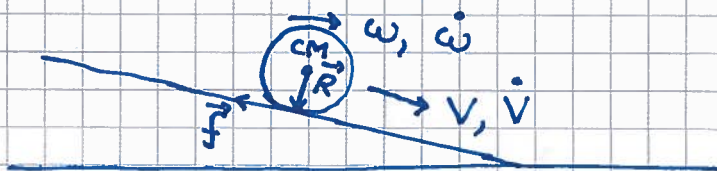
$$K_{CM} = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 = 0$$

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = 0$$

Men vi har rotasjonsenergi $K_{rot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 > 0$

og dreieimpuls (mhp CM) $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \neq 0$

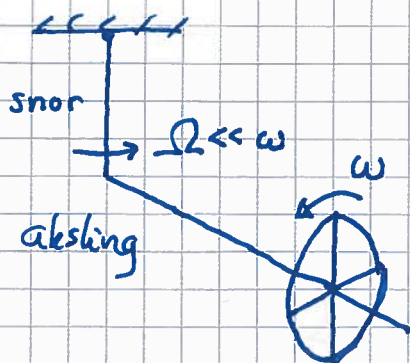
- Rulling: Translasjon av CM + Rotasjon om CM



$\dot{v} > 0$ pga netto ytre kraft $\vec{F} = \vec{G}_{||} - \vec{f}$

$\dot{\omega} > 0$ pga netto ytre dreiemoment (mhp CM) $\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{f}$

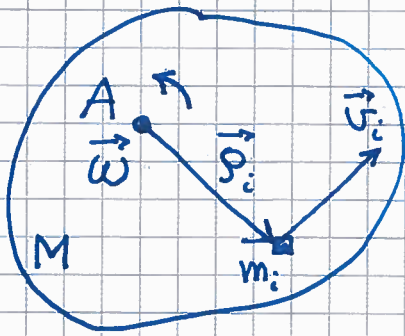
- Kompleks dynamikk



Presesjon
Gyroskop

Rotasjonsenergi. Trehetsmoment [OS1 10.4; YF 9.4; LL 6.2-6.4] (46)

Ser (stort sett!) på stive legemer, og først ren rotasjon om fast akse (ikke nødvis gjennom CM) :



Antar rotasjonsaksen A langs $\hat{z}$ ut av planet.

Lar vinkelfarten være en vektor langs rot.aksen :

$$\vec{\omega} = \omega \hat{z}$$

Høyrehåndsregel (HHR) for "fortegnet" på $\vec{\omega}$:

4 fingre på HH følger rot. bevegelsen. (Her: Mot klokke)

Da peker tommelen langs $\vec{\omega}$.

Fra figur :

$$\vec{r}_i = r_i \hat{r} \quad ; \quad r_i = \text{avstand fra A til } m_i$$

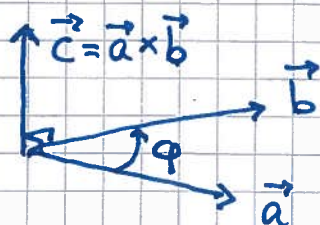
$$\vec{v}_i = v_i \hat{\phi} \quad ; \quad \vec{v}_i = \text{farten til } m_i$$

$$\vec{r}_i \perp \vec{v}_i, \quad \vec{r}_i \perp \vec{\omega}, \quad \vec{v}_i \perp \vec{\omega}$$

$$\text{Fra før: } v_i = r_i \omega$$

$$\text{Dermed: } \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

HHR for kryssprodukt: 4 fingre langs $\vec{a}$ bøyes mot $\vec{b}$;
da peker tommelen langs $\vec{a} \times \vec{b}$:



$$c = |\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$= a \cdot b \cdot \sin \phi$$

Braker her synderkoordinater = polarkoord. + z

= ρ, φ, z [Reserverer $\vec{r}$ som posisjonsvektor relativt origo!]

Rotasjonsenergi:

$$K_{\text{rot}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i \rho_i^2 \right\} \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

der I = legemets treghetsmoment mhp rot. aksen A:

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i \rho_i^2$$

Med kontinuerlig massefordeling: $m_i \rightarrow dm$; $\sum_i \rightarrow \int$

$$I = \int \rho^2 dm$$

ρ = avstand fra A til dm

Generell bevegelse for stivt legeme: Translasjon av CM, med fart $\vec{V}$, og rotasjon om akse gjennom CM, med vinkel fart $\vec{\omega}$.

Total kin. energi blir (ganske enkelt!)

$$K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

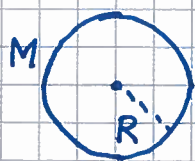
Se utlagt notat for utledning. [og YF 10.3; LL 6.6]

Notasjon: I_0 betyr mhp akse gjennom CM.

Trehetsmoment, eksempler [OS1 10.5; YF 9.6; LL 6.3]

(48)

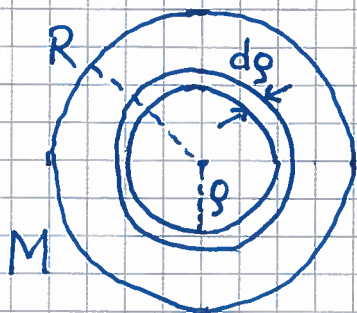
- Ring eller hul sylinder



$$I_o = \int r^2 dm = R^2 \int dm = \underline{\underline{MR^2}}$$

[Oppgis ikke til eksamen]

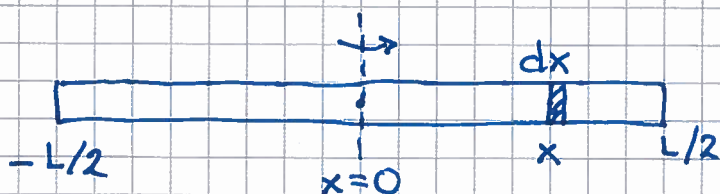
- Skive eller kompakt sylinder = sum av tynne ringer med radius g og tykkelse dg



$$\begin{aligned} dI_o &= g^2 dm = g^2 \cdot M \cdot dA / \pi R^2 \\ &= g^2 \cdot M \cdot 2\pi g dg / \pi R^2 = 2Mg^3 dg / R^2 \end{aligned}$$

$$I_o = \int dI_o = \frac{2M}{R^2} \int_0^R g^3 dg = \underline{\underline{\frac{1}{2} MR^2}} \quad [\text{Oppgis}]$$

- Tynn stang eller tynn plate (f.eks. ei dør)



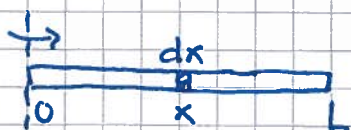
eller



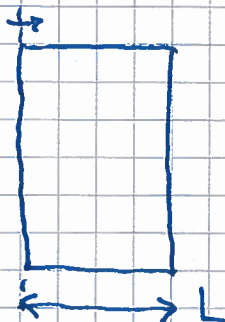
$$g = x, \quad dm = M \cdot dx / L$$

$$\Rightarrow I_o = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot M dx / L = \underline{\underline{\frac{1}{12} ML^2}} \quad [\text{Oppgis}]$$

Mhp akse ved enden:



eller

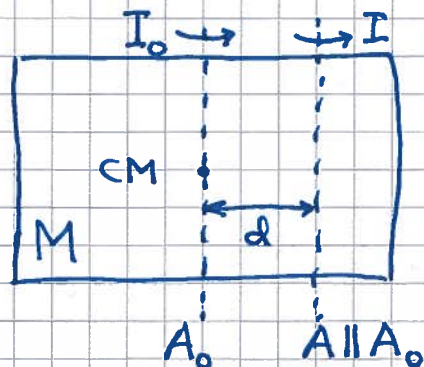


$$I = \int_0^L x^2 M dx / L = \underline{\underline{\frac{1}{3} ML^2}}$$

[Oppgis ikke pga Steiners sets, som oppgis]

- Kuleskall : $I_o = \frac{2}{3}MR^2$
 - Kompakt kule: $I_o = \frac{2}{5}MR^2$
- Oppgis. Se øving/LF for detaljer.

Steiners sats [OS1 10.5; YF 9.5; LL 6.3]

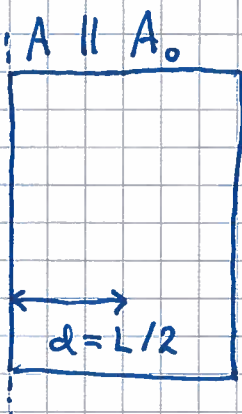
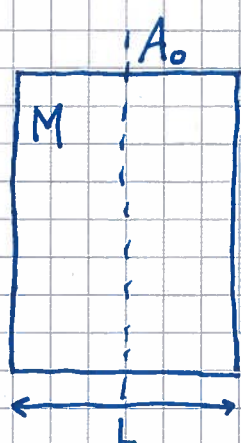


Med A parallell med A_o er

$$I = I_o + Md^2$$

[Se notat for utledning]

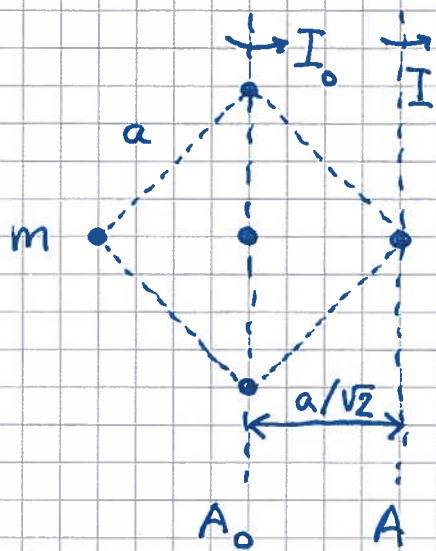
Eks 1: Dør



$$I = I_o + M \cdot (L/2)^2$$

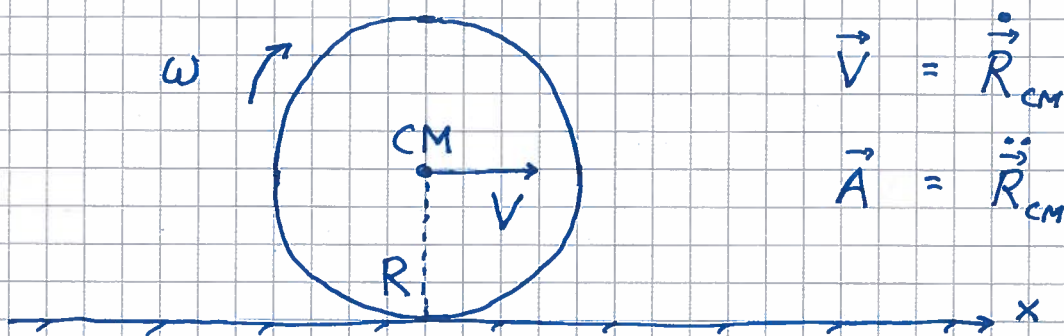
$$= \underline{\frac{1}{3} ML^2} \quad (\text{OK!})$$

Eks 2: System med 5 punktmasser



$$I_o = 2 \cdot m \cdot (a/\sqrt{2})^2 = \underline{ma^2}$$

$$\Rightarrow I = I_o + 5m \cdot (a/\sqrt{2})^2 = \underline{\frac{7}{2} ma^2}$$



$$\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{CM}$$

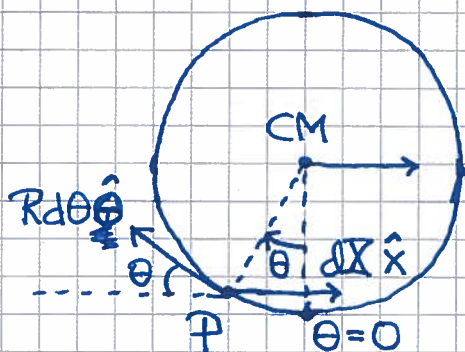
$$\vec{A} = \ddot{\vec{R}}_{CM} = \dot{\vec{V}}$$

Ren rulling : Ved rotasjon en liten vinkel $d\theta = \omega dt$ om CM flyttes CM lengden $dx = R d\theta = R\omega dt$ mot høyre, slik at $dx/dt = R\omega$, dvs

$$\boxed{V = R\omega}$$

Rullebetingelsen ($\Rightarrow A = R\ddot{\omega}$)

Punkt P på periferien følger en sykloide :



Forflytning av P ved vinkelendring fra θ til $\theta + d\theta$:

$$d\vec{r} = R d\theta \hat{\theta} + dX \hat{x}$$

Her er

$$\hat{\theta} = -\hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta \quad \text{og} \quad dX = R d\theta$$

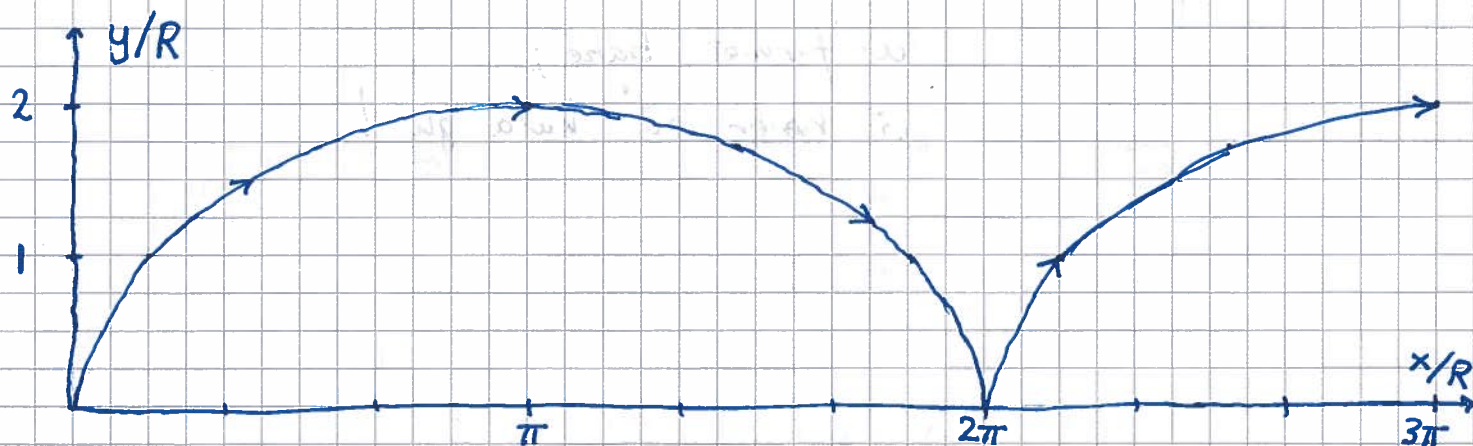
slik at

$$d\vec{r} = \hat{x} R d\theta (1 - \cos \theta) + \hat{y} R d\theta \sin \theta$$

Anta P i origo, $x=y=0$, når $\theta=0$. Da er

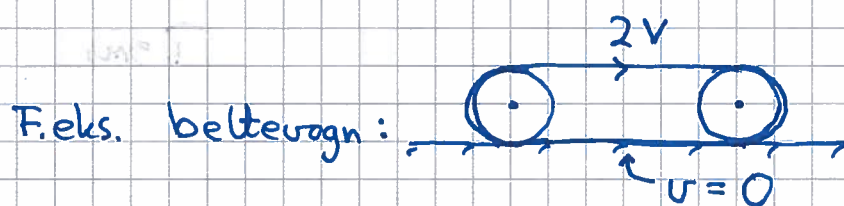
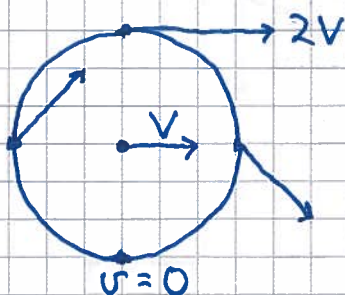
$$\vec{r} = \int d\vec{r} = \int_0^\theta \{ \hat{x} R d\theta (1 - \cos \theta) + \hat{y} R d\theta \sin \theta \}$$

$$= \underline{\hat{x} R (\theta - \sin \theta) + \hat{y} R (1 - \cos \theta)}$$



Hastigheten til P:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \hat{x} (R \dot{\theta} - R \dot{\theta} \cos \theta) + \hat{y} R \dot{\theta} \sin \theta \\ &= \hat{x} V (1 - \cos \theta) + \hat{y} V \sin \theta \end{aligned}$$



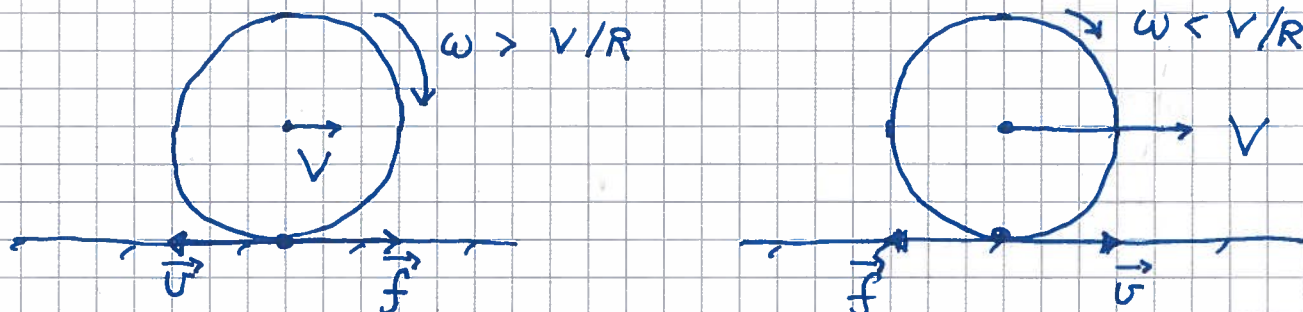
Merk: $v=0$ når P har kontakt med underlaget; da er $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0$, dvs null effekttap, selv med $f \neq 0$.

Med ren rulling er $K = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} c M R^2 \cdot \frac{V^2}{R^2}$

$$= \underline{(1+c) \cdot \frac{1}{2} M V^2} ; \quad c = \frac{2}{5} \text{ for kompakt kule, osv.}$$

Sluring: Ruller og glir. [OS1 11.1 ; LL 6.7] (52)

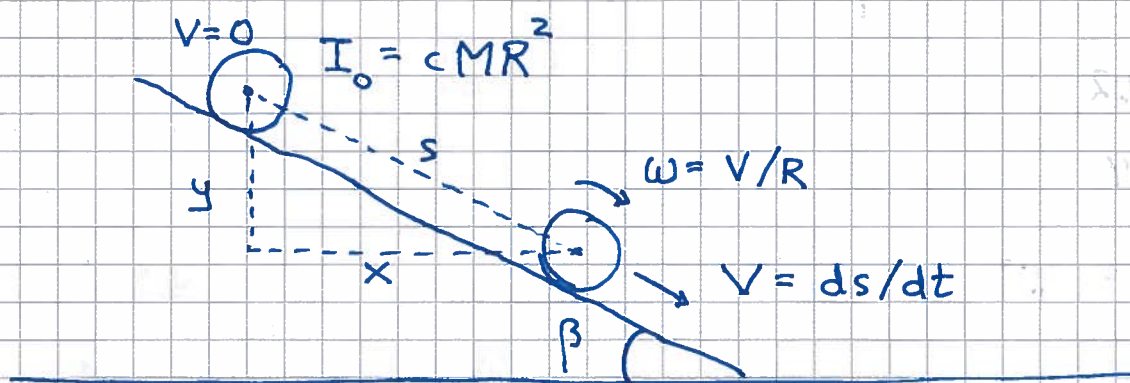
Hvis $\omega \neq V/R$, har legemets kontaktpunkt farten
 $v = V - \omega R \neq 0$, dvs det glir:



$$f = \mu_k \cdot N \quad ; \quad P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$$

⇒ taper mek. energi pr tidsenhed lik $|P_f|$

Ren rulling på skråplan [OS1 11.1 ; YF 10.3 ; LL 6.8]



Bestem V , A , f og største β som gir ren rulling

Løses enklast med energibevarelse: $|\Delta U| = |\Delta K|$

$$\Rightarrow Mgy = (1+c)\frac{1}{2}MV^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{V = \sqrt{2gy/(1+c)}}$$

$$\Rightarrow V(\text{kule}) > V(\text{skive}) > V(\text{kuleskall}) > V(\text{hul sylinder})$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \\
 &= \sqrt{\frac{2g}{1+c}} \cdot \frac{1}{2} y^{-1/2} \cdot \sin \beta \cdot V \quad (V = \sqrt{\frac{2g}{1+c}} \cdot y^{1/2}) \\
 &= \underline{\underline{\frac{g \sin \beta}{1+c}}}
 \end{aligned}$$

Uten friksjon: $F_{||} = Mg \sin \beta \Rightarrow A (f=0) = g \sin \beta$
 $\Rightarrow$ Vi må ha $\vec{f}$, rettet oppover skråplanet.

$$N2: Mg \sin \beta - f = MA = Mg \sin \beta / (1+c)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f = \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta}}$$

Ren rulling bare dersom

$$f \leq f_{\max} = \mu_s \cdot N = \mu_s Mg \cos \beta$$

$$\Rightarrow \frac{c}{1+c} \sin \beta \leq \mu_s \cos \beta$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\beta \leq \arctan \left\{ \mu_s \cdot \frac{1+c}{c} \right\}}}$$

Eks: Stålkule på plastbane, med $\beta = 30^\circ$
 $\mu_s \approx 0.2$, $c = 0.4$

$$\Rightarrow A = 0.36g$$

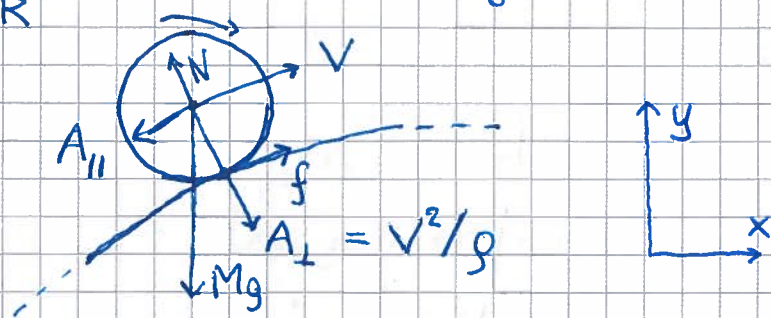
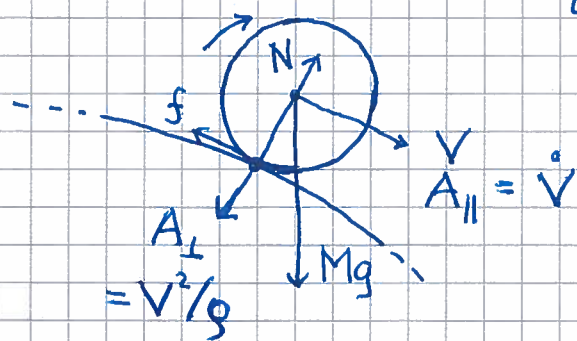
$$f = 0.14 Mg$$

$$\beta_{\max} = \arctan(0.7) = 35^\circ$$

Lab: Ren rulling på krum bane

$$\omega = V/R$$

$$I_0 = c \cdot MR^2$$



$$A_{\parallel} = \dot{V} = g \sin \beta / (1+c) \quad ; \quad \tan \beta = dy/dx = y'$$

$$A_{\perp} = V^2/\rho \quad ; \quad 1/\rho = |y''| / [1 + (y')^2]^{3/2}$$

$N \perp$ banen:

$$MA_{\perp} = MV^2/\rho = \begin{cases} Mg \cos \beta - N & (\text{krumning ned}) \\ N - Mg \cos \beta & (\text{--- opp}) \end{cases}$$

Eksperimentelt:

- Film av bevegelsen
- "Tracking" av CM gir $\{x(t), y(t)\}_{\text{exp}}$
- Måling av $y(x)$ i 8 festepunkter.

Gir god tilnærming til hele banen $y(x)$ med såkalte kubiske splines (se neste side).

Numerikk:

- Beregn $\{x(t), y(t)\}_{\text{num}}$ med utgangspunkt i $dV/dt = g \sin \beta / (1+c)$, startbetingelser $\{x(0), y(0)\}$ og kjent bane $y(x)$, dvs kjent $\beta = \arctan(dy/dx)$

Kubisk spline: Labbanen $y(x)$ tilnærmes med 3. grads - polynomer

$$S_j(x) = a_j x^3 + b_j x^2 + c_j x + d_j \quad ; \quad j = 0, 1, \dots, 6$$

på hver av de 7 intervallene (x_j, x_{j+1}) , der de 8 festepunktene $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_7, y_7)$ er kjent, og på kben med fast avstand horisontalt, $h = x_{j+1} - x_j = 20.0 \text{ cm}$. Polynomene $S_j(x)$ velges slik at $S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1}) = y_{j+1}$, og dessuten slik at $S'(x)$ og $S''(x)$ er kontinuerlige i festepunktene (og dermed overalt). En velger gjerne $y_0'' = y_7'' = 0$, dvs null krumning i de ytterste festepunktene.

Skrives nå polynomene på formen

$$S_j(x) = \frac{y_j'' \cdot (x_{j+1} - x)^3}{6h} + \frac{y_{j+1}'' \cdot (x - x_j)^3}{6h} + \left(\frac{y_{j+1}}{h} - \frac{y_{j+1}'' \cdot h}{6} \right) \cdot (x - x_j) + \left(\frac{y_j}{h} - \frac{y_j'' \cdot h}{6} \right) \cdot (x_{j+1} - x) \quad ; \quad j = 0, 1, \dots, 6$$

blir de ukjente størrelsene $y_1'', y_2'', \dots, y_6''$ løsningen av de 6 lineære ligningene $A \vec{y}'' = \vec{b}$, dvs

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ y_3'' \\ y_4'' \\ y_5'' \\ y_6'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} \quad \text{med} \quad b_j = \frac{6}{h^2} (y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1})$$

Når alle $S_j(x)$ er beregnet, kan $y'(x)$ og $y''(x)$ beregnes, hvor som helst mellom x_0 og x_7 . Dvs, helningsvinkel β og krumningsradius ρ kan beregnes langs hele banen.

Numenikk: Bruker Euler - metoden her.

(56)

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{g \sin \beta}{1+c} \Rightarrow \Delta V = \frac{g \sin \beta}{1+c} \Delta t$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = V \Rightarrow \Delta S = V \Delta t$$

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \Delta t, \quad \dots, \quad t_n = n \Delta t, \quad \dots$$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad V_0 = V(t_0), \quad \beta_0 = \arctan \{y'(x_0)\}$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x_0 = V_{0x} \Delta t = V_0 \cos \beta_0 \cdot \Delta t$$

$$y_1 = y(x_1)$$

$$V_1 = V_0 + \Delta V_0 = V_0 + \frac{g \sin \beta_0}{1+c} \Delta t; \quad \beta_1 = \arctan \{y'(x_1)\}$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x_1 = x_1 + V_{1x} \Delta t = x_1 + V_1 \cos \beta_1 \cdot \Delta t$$

$$y_2 = y(x_2)$$

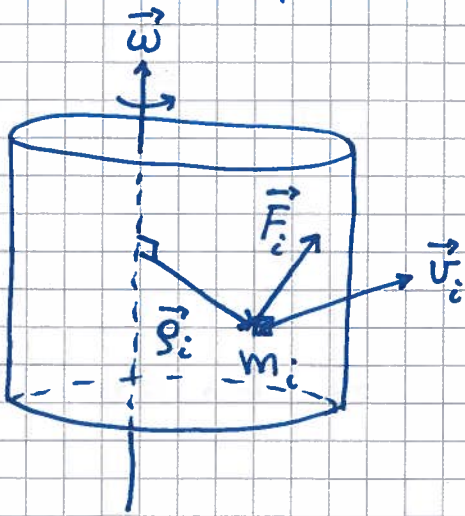
$$V_2 = V_1 + \frac{g \sin \beta_1}{1+c} \Delta t; \quad \beta_2 = \arctan \{y'(x_2)\}$$

osv.

-
- Deretter kan exp. og num. beregelse sammenlignes, dvs $\{x(t), y(t)\}_{\text{exp}}$ vs $\{x(t), y(t)\}_{\text{num}}$
 - Kraftene $\vec{N}$ og $\vec{f}$ fra banen på objektet kan (og skal!) beregnes, og framstilles grafisk på hensiktsmessig vis.
 - Dissipative krefter — dvs slike som fører til tap av mekanisk energi — kan modelleres, på "laminær form" som $\vec{f} = -k \cdot \vec{V}$, og/eller på "turbulent form" som $\vec{f} = -D \cdot V^2 \cdot \hat{V}$.

Rotasjonsdynamikk

Akse med fast orientering [OS1 10.6, 10.7; YF 10.1, 10.2; LL 6.2]



Legemet tilføres effekten

$$\begin{aligned} P &= \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i F_{i,\parallel} v_i \\ &= \left\{ \sum_i F_{i,\parallel} \rho_i \right\} \omega \\ &= \tau \omega \end{aligned}$$

Her er $\tau = \sum_i F_{i,\parallel} \rho_i$ = netto ytre dreiemoment på legemet, mhp rot.aksen; $F_{i,\parallel}$ er komponenten langs $\vec{v}_i$ av ytre kraft $\vec{F}_i$ på masseelement m_i .

Tilført effekt tilsvarer økning i kin. energi pr tidsenhet:

$$P = \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} I \omega^2 \right\} = \frac{1}{2} I \cdot 2\omega \cdot \frac{d\omega}{dt} = I \omega \dot{\omega}$$

der $I = \sum_i m_i \rho_i^2$ er legemets treghetsmoment mhp rot.aksen

Sammenligning gir

$$\boxed{\tau = I \dot{\omega}}$$

som er N2 for rotasjon om akse med fast orientering.

Jf. N2 for translasjon: $F = m \dot{v}$

Arbeid utført av τ [OS1 10.8; YF 10.4; LL 6.4]

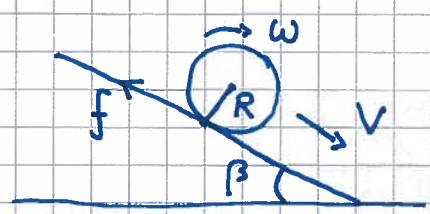
$$P = \tau \omega = \tau \frac{d\phi}{dt} \quad \text{og} \quad P = \frac{dW}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{dW = \tau d\phi}$$

= arbeid utført av τ ved
omløpt vinkel $d\phi$

Jf. arb. utf. ved transl. : $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Eks 1: Ren rulling på skråplan



$$I_o = cMR^2, \quad \omega = v/R, \quad \dot{\omega} = \dot{v}/R$$

$$N2, II: Mg \sin \beta - f = M\dot{v}$$

$$N2 \text{ for rot. om akse gjennom CM: } \tau = I_o \dot{\omega}$$

Her er $\tau = f \cdot R$; både $\vec{N}$ og $M\vec{g}$ har null arm relativt aksen gjennom CM.

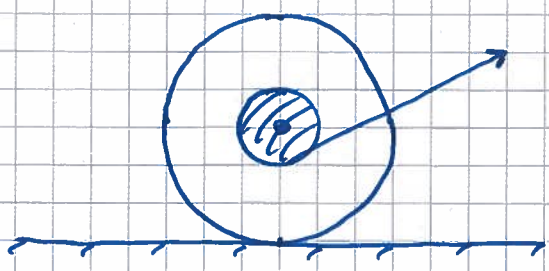
(Kraftens arm = Avstanden fra aksen til kraftens forlengelseslinje)

$$\text{Dermed: } f \cdot R = cMR^2 \cdot \frac{\dot{v}}{R} \Rightarrow f = cM\dot{v}$$

som innsatt i N2, II gir $Mg \sin \beta - cM\dot{v} = M\dot{v}$,
dvs

$$\underline{\dot{v} = \frac{g \sin \beta}{1+c}} \quad (\text{som s. 53})$$

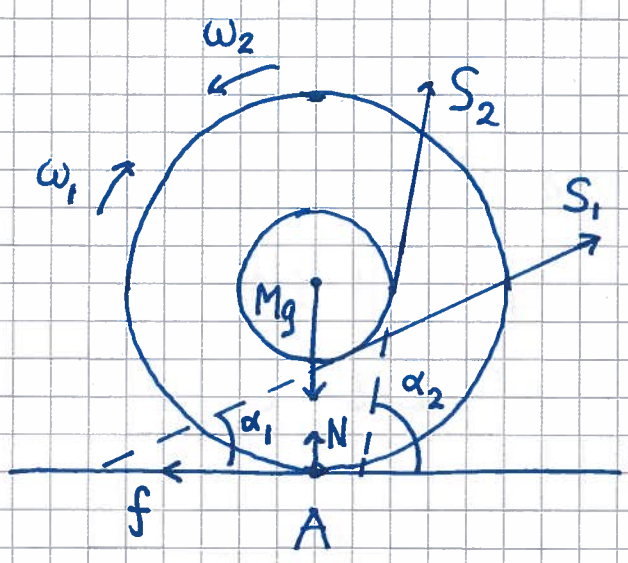
Eks 2: Trådsnelle på flatt underlag



S = snordraget

Når ruller snella mot høyre og mot venstre?

"Triks": Velg "kontaktlinja" som referanseakse A.

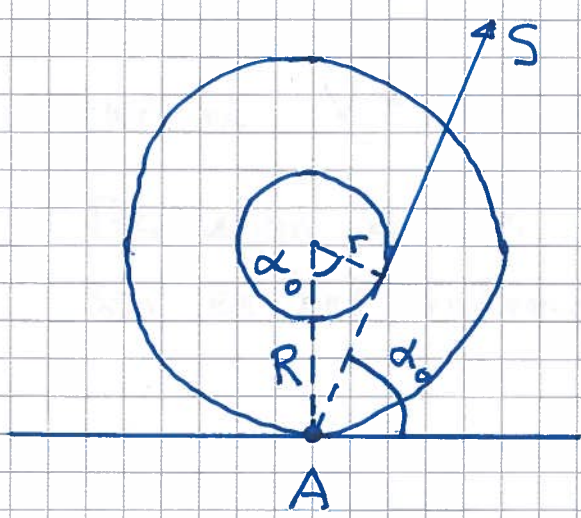


Bare S som har en arm, og dermed dreiemoment τ_A mhp aksen A.

$S_1 \Rightarrow$ (rot.) mot høyre

$S_2 \Rightarrow$ (rot.) mot venstre

Hvis forlengelsen av $\vec{S}$ går gjennom A, må snella bli liggende i ro:

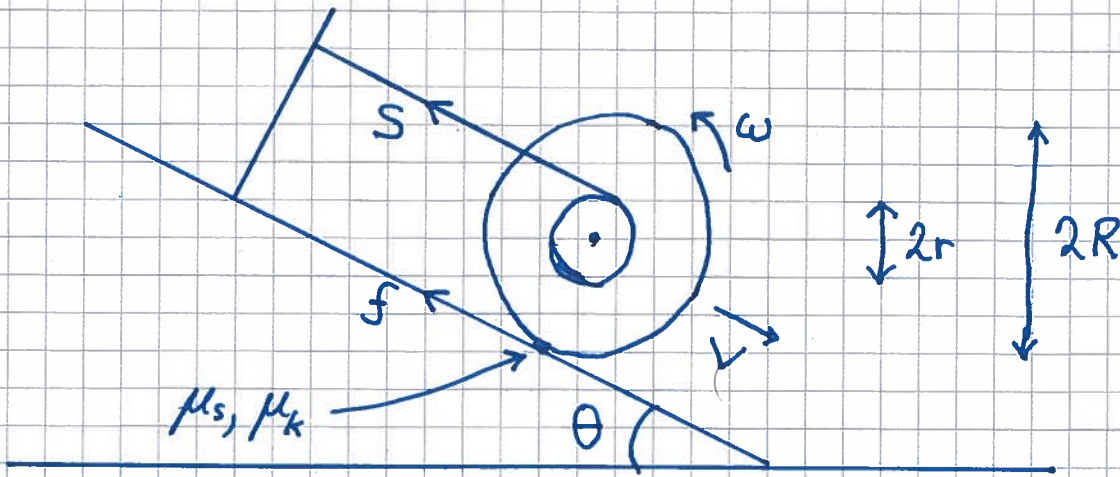


$$\begin{aligned} \sum \tau_A = 0 &\Rightarrow \dot{\omega} = 0 \\ &\Rightarrow \text{ingen rotasjon} \end{aligned}$$

Fra figur:

$$\cos \alpha_0 = \frac{r}{R}$$

(Hvis $S_x > f_{\max}$, glir snella mot høyre, uten å rotere)



- Hvor stor er max vinkel θ_0 uten at snella slurer baklengs nedover skråplanet?

Løsn: $N1 \parallel$ skråplanet og $N1$ for rot. om CM

$$f = f_{\max} = \mu_s N \quad \text{når } \theta = \theta_0$$

- Hvis $\theta > \theta_0$, hva blir S og $\dot{V}$?

Løsn: $N2 \parallel$ skråplanet og $N2$ for rot. om CM

$$f = \mu_k N$$

Her må $V = \omega r$ være oppfylt:

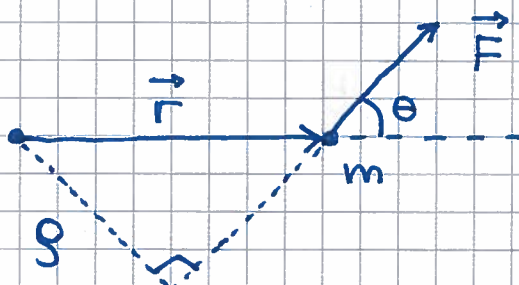
Translasjon av CM en lengde $2\pi r$ tar samme tid som en hel omdreining, dvs omløpt vinkel 2π

Rotasjonsdynamikk i 3D

(61)

Generelt må dreiemoment $\vec{\tau}$ og dreieimpuls $\vec{L}$ beregnes relativt et fritt valgt referansepunkt $\vec{r}_0$. Posisjonen til en punktmasse m , relativt $\vec{r}_0$, er da $\vec{r} - \vec{r}_0$, dersom $\vec{r}$ er dens pos. relativt origo. For enkelhets skyld velger vi her $\vec{r}_0 = 0$.

Dreiemoment [OS1 10.6; YF 10.1; LL 5.5, 6.4]



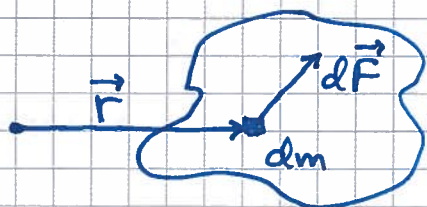
$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}} = \text{kraftens dreiemoment p\aa } m \text{ (rel. origo)}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau} \perp \vec{r} \text{ og } \vec{\tau} \perp \vec{F} \quad (\text{Her: } \vec{\tau} \text{ ut av planet})$$

$$\tau = |\vec{\tau}| = r \cdot F \cdot \sin \theta = g \cdot F$$

der g = kraftens arm = avstand fra refpunktet til kraftens forlengelseslinje

For partikkelsystem:

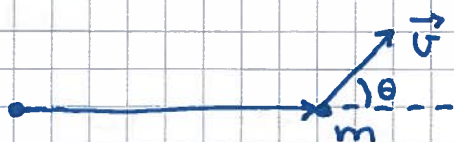


$$\vec{\tau} = \int d\vec{\tau} = \int \vec{r} \times d\vec{F}$$

= netto dreiemoment p\aa systemet

Dreieimpuls

[OS1 11.2; YF 10.5; LL 6.6]



$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

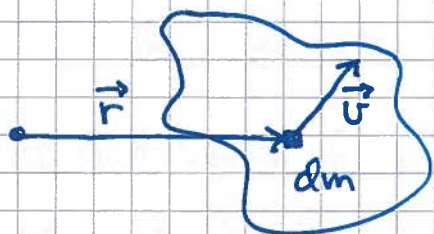
= massens dreieimpuls (rel. origo)

$$\vec{L} \perp \vec{r}; \quad \vec{L} \perp \vec{p} \quad \text{og} \quad L = |\vec{L}| = r \cdot p \cdot \sin \theta$$

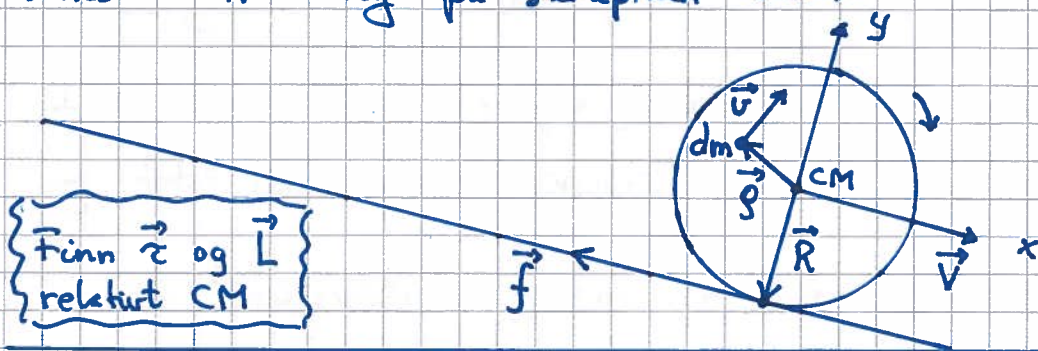
For partikkelsystem:

$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} dm = \int \vec{r} \times d\vec{p}$$

= systemets totale dreieimpuls



Eks: Rulling på skråplan (⊙)



$$\vec{V} = V \hat{x}$$

$$\vec{\omega} = -\omega \hat{z}$$

$$\vec{R} = -R \hat{y}$$

$$\vec{f} = -f \hat{x}$$

$$\vec{\rho} = \rho \hat{\phi}$$

$$\vec{v} = -v \hat{\phi}$$

$$\vec{z} = \vec{R} \times \vec{f} = \underline{\underline{-Rf \hat{z}}}$$

$$\vec{L} = \int \vec{\rho} \times \vec{v} dm = \int \rho \cdot \omega \rho \cdot dm \cdot (-\hat{z}) = \left(\int \rho^2 dm \right) \cdot (-\omega \hat{z}) = \underline{\underline{I_0 \vec{\omega}}}$$

Merk at vektoren $d\vec{L}/dt = I_0 \dot{\vec{\omega}}$ peker langs $-\hat{z}$ (siden vinkelfarten øker i absoluttverdi), dvs $\dot{\vec{L}}$ og $\vec{z}$ peker i samme retning. Vi skal straks vise at $\vec{z} = \dot{\vec{L}}$.

N2 for rotasjon [OSI 11.2 ; YF 10.5 ; LL 6.6]

("Spinningsatsen")

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \{ \vec{r} \times \vec{p} \} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

dvs $\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$ (Jf. N2 for translasjon: $\vec{F} = d\vec{p}/dt$)

der $\vec{\tau}$ = netto ytre dreiemoment på systemet

$\vec{L}$ = systemets totale dreieimpuls

Statisk likevekt [OSI 12.1, 12.2 ; YF 11.1-11.3 ; LL 7.1]

Et stivt legeme forblir i ro, med $\vec{p} = 0$ og $\vec{L} = 0$, bare dersom netto ytre kraft $\vec{F}$ og netto ytre dreiemoment $\vec{\tau}$ begge er null.

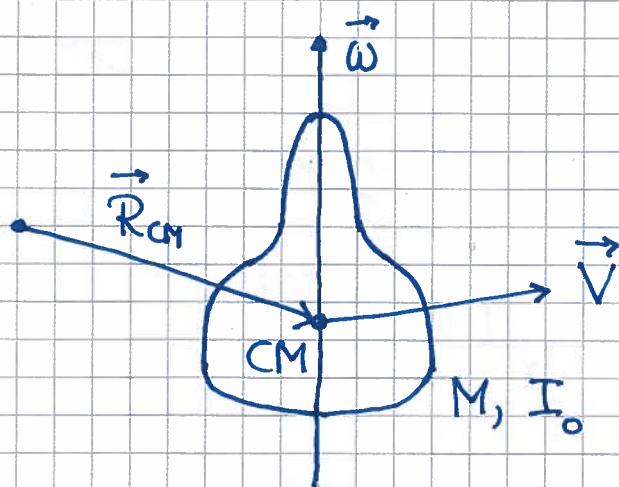
Bevaringslover oppsummert

- I et isolert system (ingen ytre krefter) er total energi, total impuls og total dreieimpuls bevart.
- I et konservativt system er total mekanisk energi, $K+U$, bevart.
- Hvis netto ytre kraft $\vec{F}$ på et system er null, er total impuls $\vec{p}$ bevart
- Hvis netto ytre dreiemoment $\vec{\tau}$ på et system er null, er total dreieimpuls $\vec{L}$ bevart

Total dreieimpuls for sturt legeme [os1.... ; YF 10.5; LL 6.6]

(64)

Anta at rotasjonsaksen er en 2-tallig rotasjonsakse; dvs at legemet ser likedan ut etter å ha blitt rotert 180° ($= 360^\circ/2$).



Legemets banedreieimpuls, pga CMs translasjonsbevegelse:

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}$$

Legemets indre dreieimpuls ("spinn"), pga rotasjon om CM:

$$\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega}$$

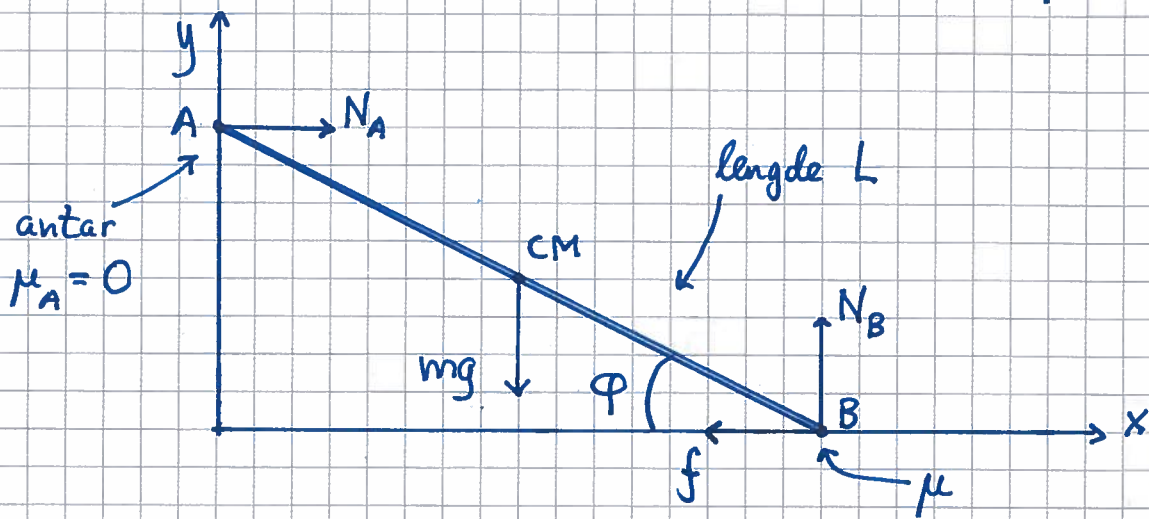
Legemets totale dreieimpuls:

$$\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s$$

(Se notat for detaljert utledning.)

Eksempler

Eks 1: Glir stigen? Finn minste φ uten at den glir.



Stigen i ro når $\sum F_x = \sum F_y = \sum \tau = 0$.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow f = N_A ; \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow N_B = mg$$

Beregner τ relativt B: $\sum \tau_B = 0$

$$\Rightarrow mg \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos \varphi - N_A \cdot L \cdot \sin \varphi = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} mg \cos \varphi = f \sin \varphi = \mu N_B \sin \varphi = \mu mg \sin \varphi$$

(siden $\varphi_{\min}$ må tilsvare $f = f_{\max} = \mu N_B$)

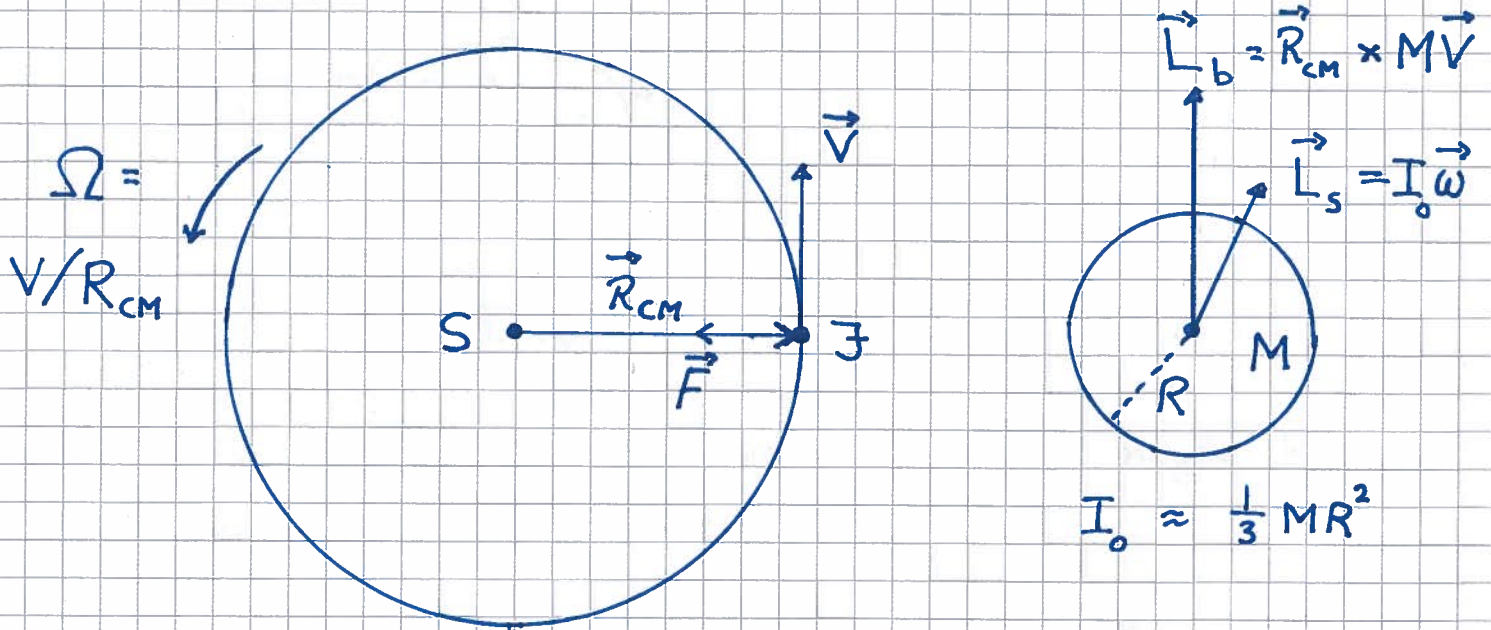
$$\Rightarrow \tan \varphi_{\min} = \frac{1}{2} \mu \Rightarrow \varphi_{\min} = \arctan \left(\frac{1}{2} \mu \right)$$

[Kommentar: Hva hvis $\mu_A > 0$? Har da 4 ukjente krefter, men bare 3 ligninger. Systemet er "statisk ubestemt".

En fjerde ligning oppnås f.eks. ved å ta hensyn til at stigen i virkeligheten ikke er helt stiv, men at den bøyes litt ned på midten.]

Eks 2: Hva er jordas dreieimpuls relativt sola?

Anta sirkelbane, stivt legeme og fast sol i origo.



$$\vec{\tau} = \vec{R}_{cm} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = \text{konstant}$$

(Ikke helt riktig, av diverse grunner. F.eks. er J ikke et helt stivt legeme.)

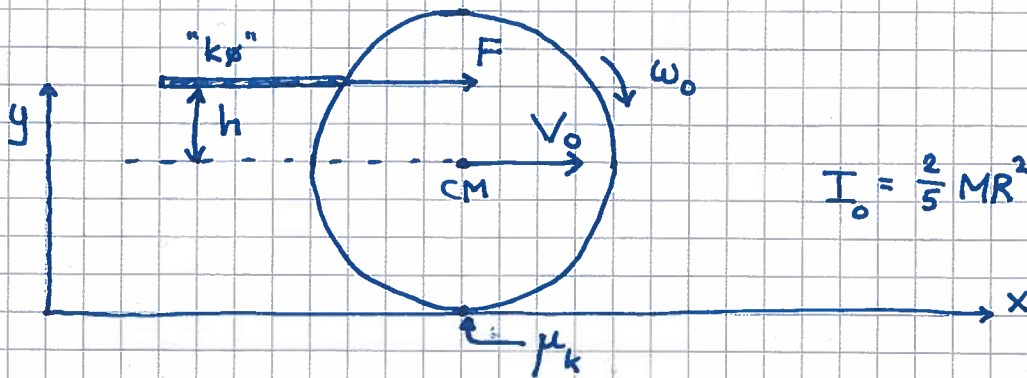
$$L_b = R_{cm} M V = R_{cm}^2 M \Omega \approx (1.5 \cdot 10^{11} \text{ m})^2 \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot \frac{2\pi}{1 \text{ år}} \\ \approx 3 \cdot 10^{40} \text{ Js}$$

$$L_s = I_o \omega \approx \frac{1}{3} M R^2 \omega \approx \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot (6.37 \cdot 10^6 \text{ m})^2 \cdot \frac{2\pi}{1 \text{ døgn}} \\ \approx 6 \cdot 10^{33} \text{ Js} \ll L_b$$

dus $L \approx L_b$

Eks 3: Snooker [LL 6.7 ; øving 6]

(67)



Kortvarig kraft F , med varighet Δt , i høyde h over (evt. under; $h < 0$) senterlinja.

Kan neglisjere friksjonskraften f i selve støtet ($f \ll F$)

N2, transl.: $F = \Delta p / \Delta t \Rightarrow F \cdot \Delta t = M V_0$

N2, rot. om CM: $\tau = \Delta L / \Delta t \Rightarrow F \cdot h \cdot \Delta t = I_0 \omega_0$

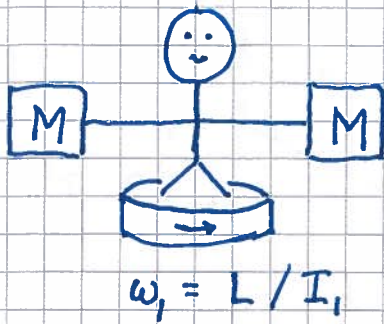
Hvis $\omega_0 > V_0 / R$: "Toppspinn" } Sluring
 Hvis $\omega_0 < V_0 / R$: "Underskru" }

Ren rulling fra start ($\omega_0 = V_0 / R$) for en bestemt h -verdi.

Hvis sluring fra start: Ren rulling etter hvert. Kinetisk friksjon medfører at ~~ω~~ ω nærmer seg V/R .

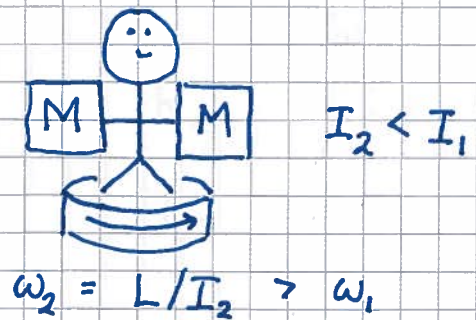
$$\tau = 0 \Rightarrow L = I\omega = \text{konstant}$$

$\Rightarrow \omega$ øker hvis I reduseres !



$$\tau = 0$$

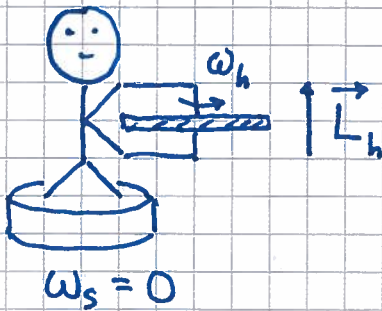
$$\Delta L = 0$$



Arbeid gjøres på de to massene og gir økt rotasjonsenergi:

$$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} L \omega_1 ; K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} L \omega_2 > K_1$$

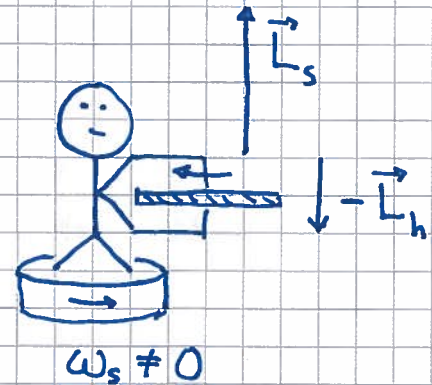
Eks 5: Student og sykkelhjul



Hjulets snus

$$\vec{\tau}_{\text{tyre}} = 0$$

$$\Delta \vec{L} = 0$$



Før:

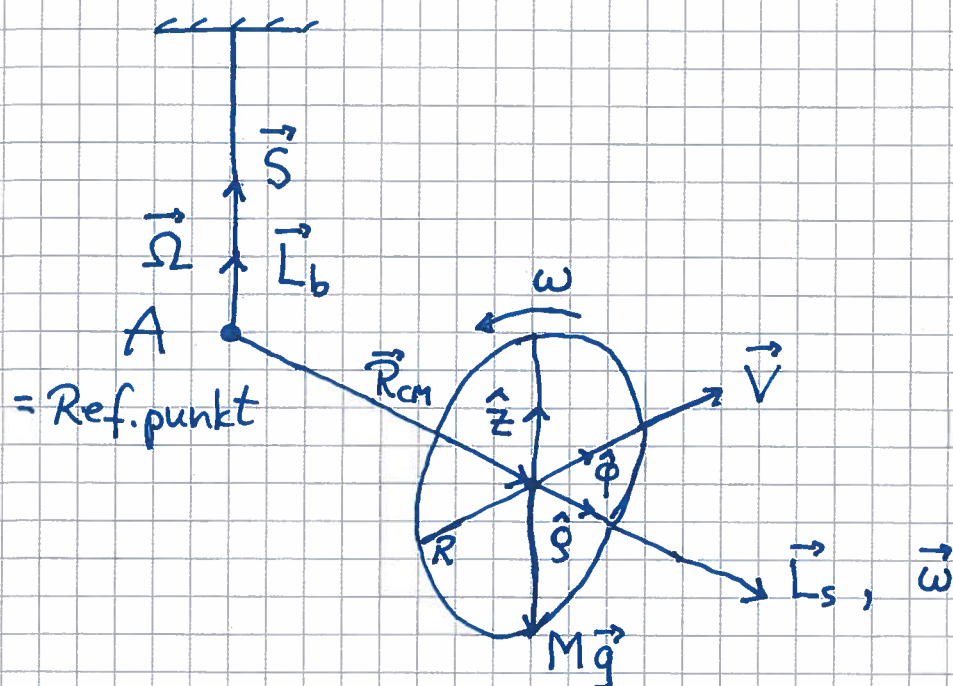
$$\vec{L} = \vec{L}_h$$

Etter:

$$\vec{L} = \vec{L}_s - \vec{L}_h$$

$$\Rightarrow \vec{L}_s = 2 \vec{L}_h$$

$$\omega_s \neq 0$$



$$I_o \approx MR^2$$

$$M \approx 5 \text{ kg}$$

$$R \approx 0.3 \text{ m}$$

$$R_{cm} \approx 0.2 \text{ m}$$

$$T_{\Omega} = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 5 \text{ s}$$

Finn ω !

Løsning:

N2 for rotasjon om A:

$$\vec{\tau}_A = d\vec{L}_A / dt \quad ; \quad \vec{L}_A = \vec{L}_b + \vec{L}_s, \quad \text{der}$$

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{cm} \times M\vec{V} = R_{cm} \hat{s} \times MV\hat{\phi} = R_{cm} MV\hat{z} = R_{cm}^2 M\Omega\hat{z}$$

$$\vec{L}_s = I_o \vec{\omega} = MR^2 \omega \hat{s}$$

Siden $\omega \gg \Omega$, dvs $L_s \gg L_b$, er $\vec{L}_A \approx \vec{L}_s = MR^2 \omega \hat{s}$

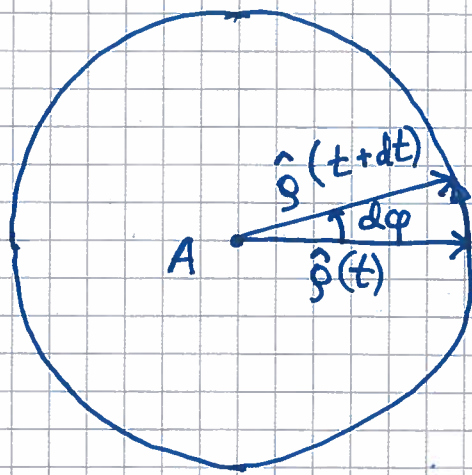
Ytre dreiemoment:

$$\vec{\tau}_A = \vec{R}_{cm} \times M\vec{g} = R_{cm} \hat{s} \times (-Mg\hat{z}) = R_{cm} Mg \hat{\phi}$$

Dermed:

$$\underbrace{R_{cm} Mg \hat{\phi}}_{\vec{\tau}_A} = \underbrace{MR^2 \omega \frac{d\hat{s}}{dt}}_{\dot{\vec{L}}_A}$$

Vektoren $\hat{g}$ roterer om z-aksen med vinkel fart Ω : (70)



$$d\hat{g} = \overbrace{|\hat{g}| \cdot d\varphi}^{\text{buelengden}} \cdot \hat{\varphi} = d\varphi \cdot \hat{\varphi}$$

$\underbrace{\quad}_{=1}$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{g}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \hat{\varphi} = \Omega \hat{\varphi}$$

Dermed:

$$R_{cm} M g \hat{\varphi} = M R^2 \omega \Omega \hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\omega = \frac{R_{cm} g}{R^2 \Omega}}}$$

Hjulets (raske!) omløpstid:

$$T_{\omega} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R^2 \cdot 2\pi / T_{\Omega}}{R_{cm} g} = \frac{(2\pi R)^2}{R_{cm} g T_{\Omega}}$$

Talverdier:

$$T_{\omega} \approx \frac{(2\pi \cdot 0.3)^2}{0.2 \cdot 10 \cdot 5} \text{ s} \approx \frac{2^2}{10} \text{ s} = \underline{0.4 \text{ s}}$$

$$f_{\omega} = 1/T_{\omega} \approx 2.5 \text{ omdreining pr sekund (Hz)}$$

Swingninger [OS1 15 ; YF 14 ; LL 9]

71

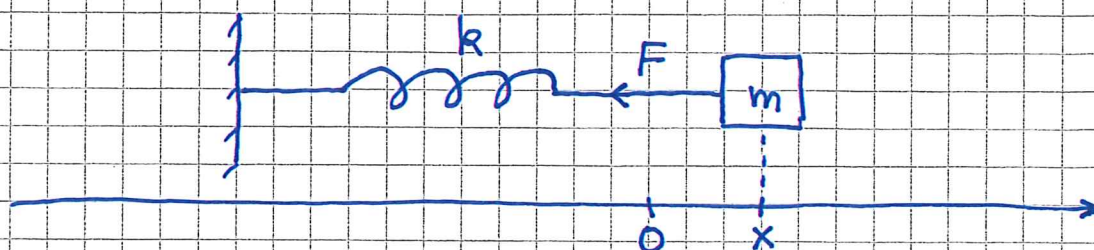
Periodisk oppførsel omkring en likevekt.

En kraft trekker hele tiden systemet tilbake mot likevekt.

Eksempler:

Masse og fjær. Pendler. Atomer i molekyler og krystaller.

Harmonisk oscilator [OS1 15.1 ; YF 14.2 ; LL 9.1-9.3]



Likevekt, $F = 0$, når m er i posisjon $x = 0$

x = posisjonen til m = fjæras forlengelse ($x > 0$)
eller forkortelse ($x < 0$)

$F(x)$ = kraft fra fjæra på m , retning mot likevekt

Ideell fjær oppfyller Hookes lov:

$$\boxed{F = -kx} ; k = \text{fjærkonstanten} ; [k] = \text{N/m}$$

$$\text{N2 : } -kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Vi innfører $\omega_0 = \sqrt{k/m}$:

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Bevegelsesligning for
harmonisk oscilator i 1D.

Generell løsning:

$$x(t) = B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t$$

eller

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Eks: Bestem A og φ når $x(0) = x_0$ og $\dot{x}(0) = v_0$

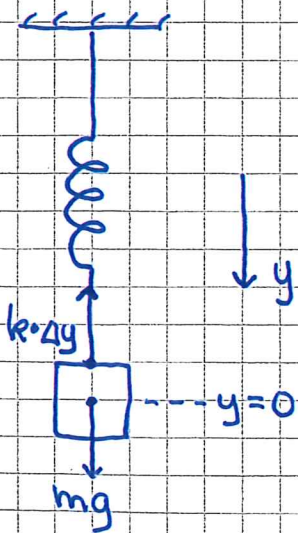
Løsn: $x_0 = A \cos \varphi$, $v_0 = -\omega_0 A \sin \varphi$

$$\Rightarrow \tan \varphi = -\frac{v_0}{x_0 \omega_0}$$

$$x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2 = A^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = A^2$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2}$$

Eks: Harmonisk oscillator i tyngdefeltet



N1 gir fjæras forlengelse i likevekt:

$$k \Delta y = mg \Rightarrow \Delta y = mg/k$$

Velg $y=0$ i "strukket likevekt".

N2 for m i posisjon y :

$$m\ddot{y} = mg - k(\Delta y + y) = -ky$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m} y = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad \text{med} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Dvs: Harmonisk svingning omkring strukket likevekt.

Harmoniske svingninger "ligner" på uniform sirkelbevegelse:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = \text{utsving fra likevekt}$$

$$A = \text{amplitude} = \text{max utsving} ; [A] = [x]$$

$$\omega_0 = \text{vinkelfrekvens} = \text{faseendring pr tidsenhet} ; [\omega_0] = \text{s}^{-1}$$

$$T = 2\pi/\omega_0 = \text{periode} = \text{tid pr hel svingning} ; [T] = \text{s}$$

$$f = 1/T = \text{frekvens} = \text{antall svingninger pr tidsenhet} ; [f] = \text{Hz}$$

$$\omega_0 t + \varphi = \text{svingningens fase}$$

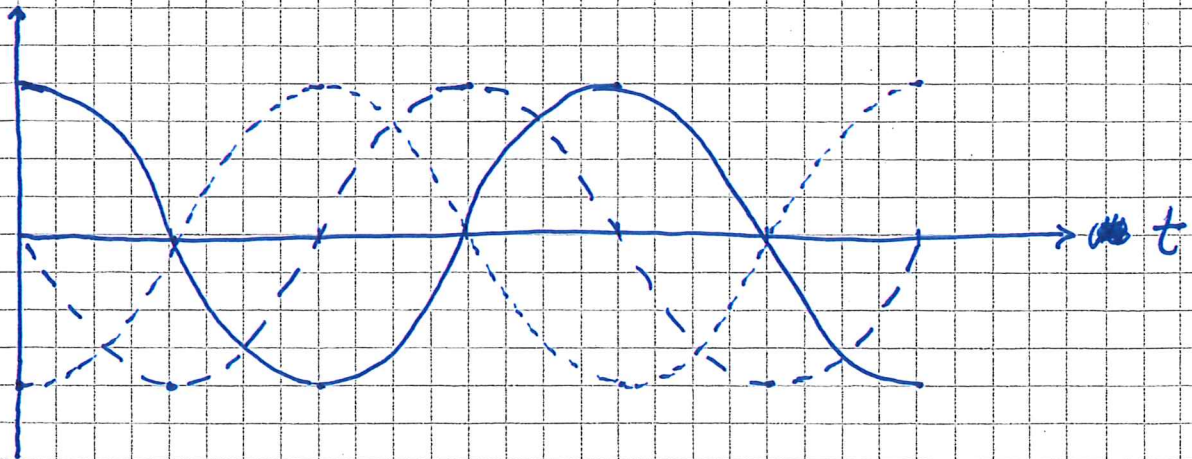
$$\varphi = \text{fasekonstant} ; [\varphi] = 1$$

Anta $\varphi = 0$:

$$x(t) = A \cos \omega_0 t$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin \omega_0 t = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 A \cos \omega_0 t = \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \pi)$$



— x

- - - $\dot{x}$

- · - $\ddot{x}$

Energi i harmonisk oscillator [OS1 15.2; KF 14.3; LL 9.4]

(74)

Potensiell energi (Konservativ kraft):

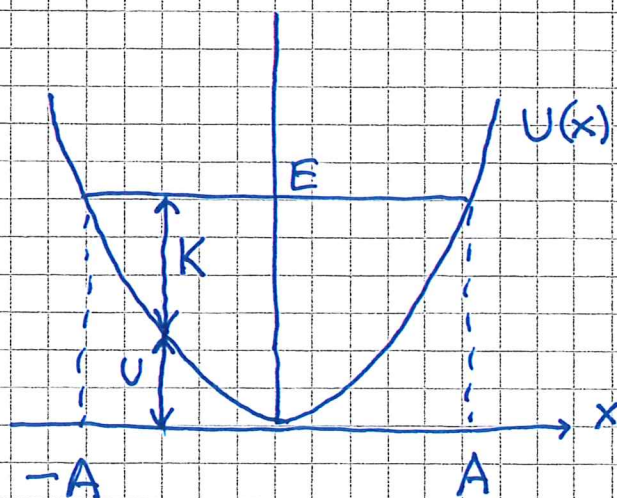
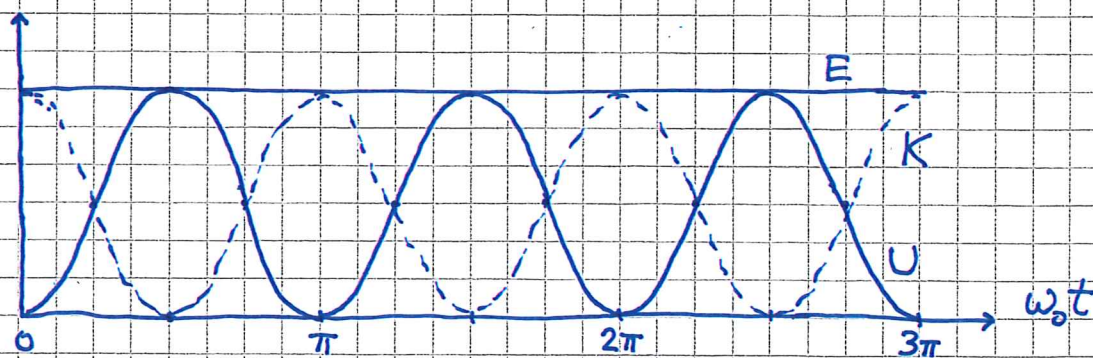
$$U = - \int_0^x (-kx) dx = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2 \omega_0 t$$

Kinetisk energi:

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 \omega_0 t$$

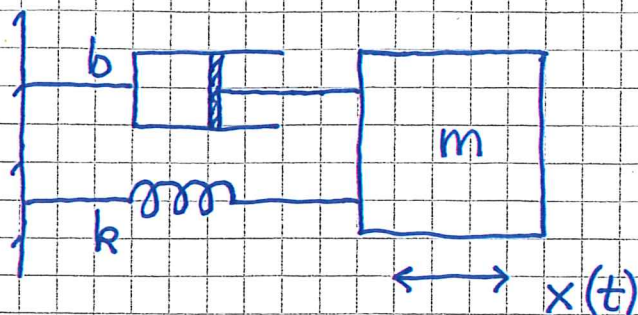
Total mekanisk energi:

$$E = K + U = \frac{1}{2} k A^2 ; \text{ uavhengig av } t$$



Dempet fri svingning [OS1 15.5; YF 14.7; LL 9.7]

Anta friksjonskraft $-b\dot{x}$ (dvs, som for langsom bevegelse i fluid)



$$N2: -kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\text{med } \gamma = b/2m, \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad [\gamma] = [\omega_0] = s^{-1}$$

Erfaring viser:

Svak damping gir svingninger med avtagende amplitude.

Sterk damping gir bevegelse mot likevekt, uten svingninger.

Vi "gjetter" $x(t)$ på formen $\exp(-\alpha t)$ og setter inn:

$$[\alpha^2 - 2\gamma\alpha + \omega_0^2] e^{-\alpha t} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \{ 2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4\omega_0^2} \} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Overkritisk damping : $\gamma > \omega_0$

Generell løsn: $x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t}$

$$\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Hvis $\gamma \gg \omega_0$ (meget sterk damping) :

$$\alpha_2 = \gamma - \gamma (1 - \omega_0^2/\gamma^2)^{1/2} \approx \gamma - \gamma (1 - \omega_0^2/2\gamma^2) = \frac{\omega_0^2}{2\gamma} = \frac{k}{b}$$

$$\alpha_1 \approx 2\gamma = b/m \gg \alpha_2$$

$$\Rightarrow x(t) \stackrel{t \gg 1/\alpha_1}{\approx} B e^{-\alpha_2 t} = B e^{-kt/b}$$

Dvs, $x(t)$ går langsomt mot null, uavhengig av massen m .

Kritisk damping : $\gamma = \omega_0$

Da er $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma$, og generell løsn. er

$$x(t) = (A + Bt) e^{-\gamma t}$$

Svakeste damping som ikke gir svingninger.

Bra i f.eks. støtdempere.

Underkritisk demping : $\gamma < \omega_0$

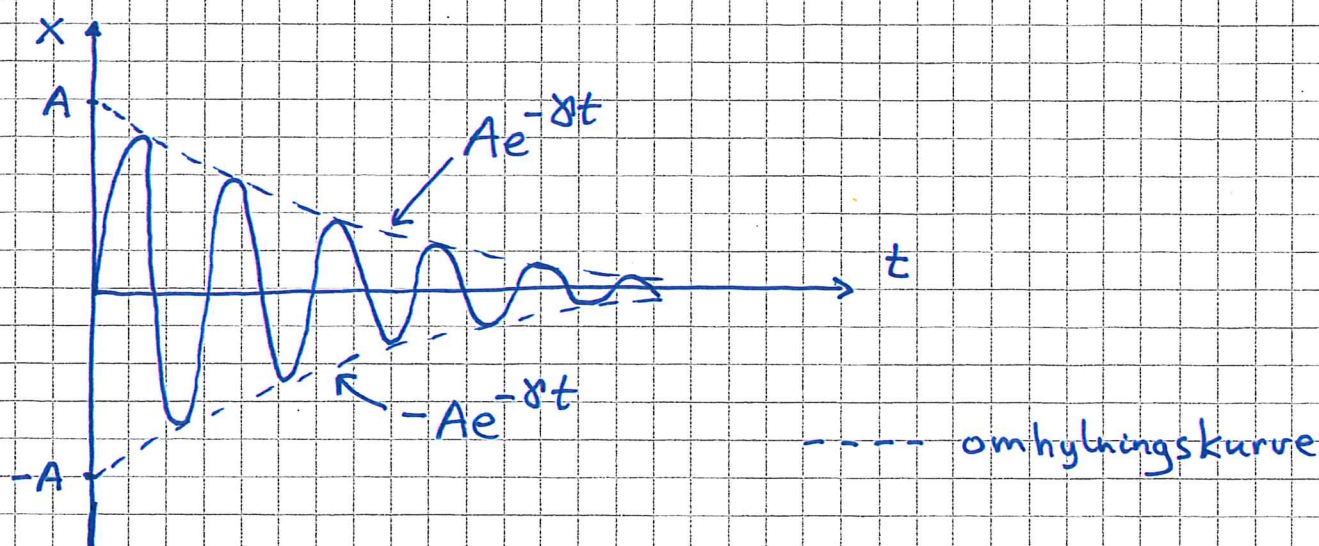
$$\alpha = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \gamma \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$\Rightarrow \exp(-\alpha t) = \exp(-\gamma t) \cdot [\cos \omega t \pm i \sin \omega t] ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$\Rightarrow \text{Generell l sn: } x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

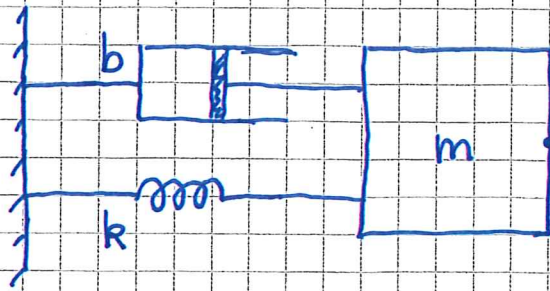
Dus: Harmonisk svingning med eksponentielt avtagende amplitude, $A \exp(-\gamma t)$. "Tidskonstanten"

$\tau = 1/\gamma$ avg r hvor raskt amplituden avtar.



Med svak demping, dvs $\gamma \ll \omega_0$, er $\omega \approx \omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Tvingen svingning og resonans [OSI 15.6; YF 14.8; LL 9.9] (78)



Antar harmonisk ytre kraft:

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

$$N2: -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t; \quad \gamma = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Generell løsning er en sum av en homogen løsning $x_h(t)$ og en partikulærløsning $x_p(t)$, der $x_h(t)$ oppfyller

$$\ddot{x}_h + 2\gamma \dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$$

Dvs, $x_h(t) \sim \exp(-\gamma t)$ og "dør ut", etter et innsvingningsforløp med varighet ca $3\tau = 3/\gamma$.

Etter dette: $x(t) \approx x_p(t)$

En naturlig gjetning er: $x(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$

Innsetting gir 2 ligninger for bestemmelse av A og φ .

Løsning:

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2]^{1/2}}; \quad \tan \varphi(\omega) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}$$

Resonans: Amplituden A blir stor hvis

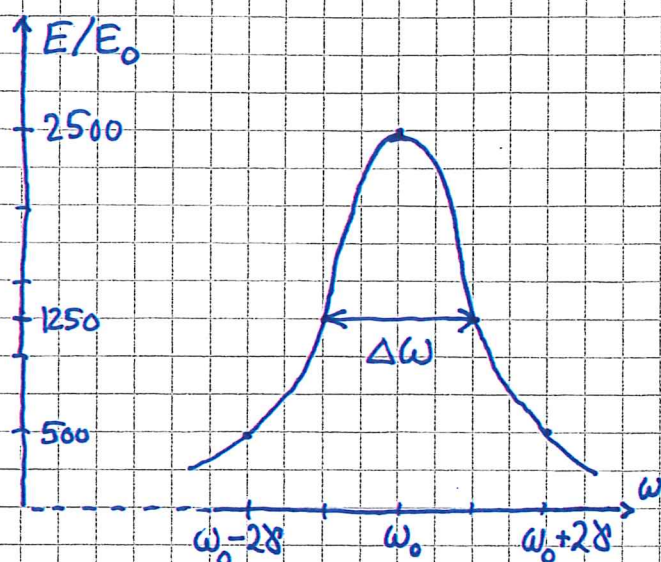
$$\gamma \ll \omega_0 \quad \text{og} \quad \omega \approx \omega_0$$

Oscillatorens energi:

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = E_0 \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} ; E_0 = F_0^2 / 2k$$

Anta $\gamma \ll \omega_0$, f.eks. $\omega_0 = 100 \gamma$:

$$E(\omega_0) = 2500 E_0 ; E(\omega_0 \pm \gamma) = 1250 E_0 ; E(\omega_0 \pm 2\gamma) = 500 E_0$$



Resonanskurvens halvverdbredde: $\Delta\omega \approx 2\gamma$

(Full Width Half Maximum; FWHM)

Oscillatorens Q-faktor: $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \approx \frac{\omega_0}{2\gamma}$

Smal resonanskurve gir stor Q-faktor.

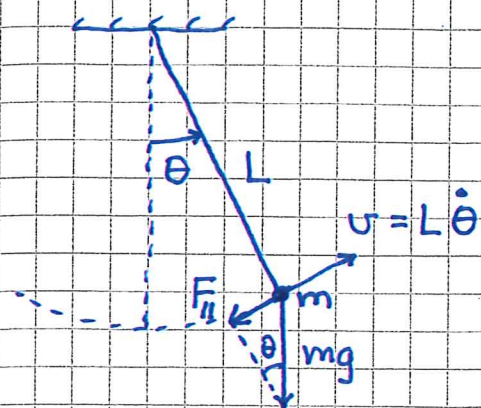
Exp: Mekanisk oscillator

Frie svingninger gir $T_0 \approx 0.65s$, dvs $f_0 \approx 1.5 \text{ Hz}$

Tvingne svingninger gir stor amplitude når ytre kraft har frekvens ca 1.5 Hz.

PendlerMatematisk pendel [OS1 15.4 ; VF 14.5 ; LL 9.6]

Punktmasse m i masseløs snor med lengde L



$$N2: F_{\parallel} = ma_{\parallel}$$

$$\text{der } F_{\parallel} = -mg \sin \theta; \quad a_{\parallel} = L \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow -mg \sin \theta = mL \ddot{\theta}$$

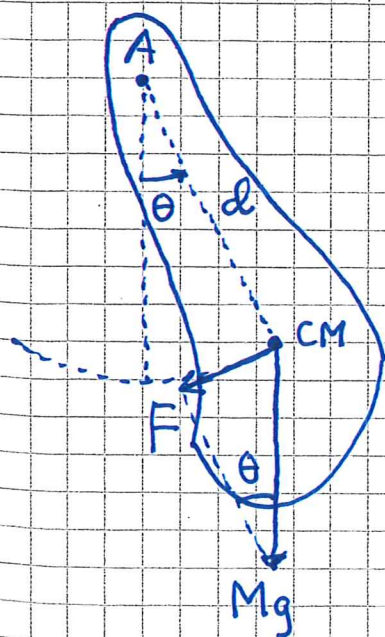
Anta små utsving, $|\theta| \ll 1 \Rightarrow \sin \theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0; \quad \omega_0 = \sqrt{g/L}}$$

Eks: Foucaultpendelen i Realbygget: $L = 25 \text{ m} \Rightarrow T \approx 10 \text{ s}$

Fysisk pendel [OS1 15.4 ; VF 14.6 ; LL 9.6]

Stivt legeme, masse M , treghetsmoment I mhp A



$$N2 \text{ for rot. om fast akse } A: \tau = I \ddot{\theta}$$

$$\text{der } \tau = -F \cdot d = -Mgd \sin \theta$$

($\tau > 0$ mot klokke; $\theta > 0$ mot klokke)

$$\Rightarrow -Mgd \sin \theta = I \ddot{\theta}$$

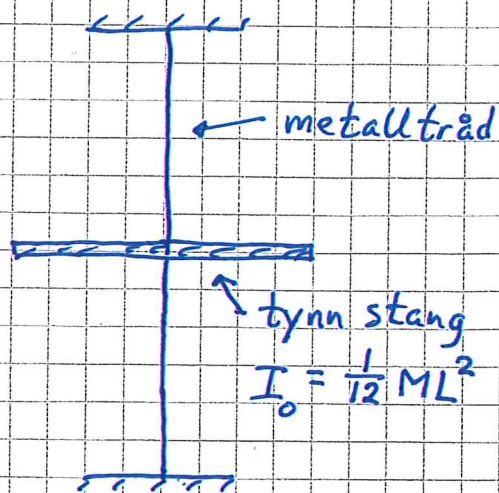
Anta $|\theta| \ll 1 \Rightarrow \sin \theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0; \quad \omega_0 = \sqrt{Mgd/I}}$$

Torsjionspendel

[OS1 15.4; YF 14.4; LL 9.6]

(81)

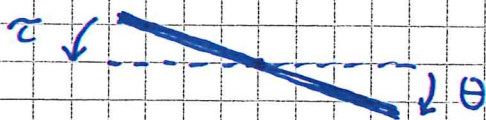


Hookes lov: Vridning av metalltråden en vinkel θ gir dreiemoment

$$\tau = -\kappa \theta$$

på stanga; κ er her metalltrådens torsjonsstivhet

Sett langs metalltråden:



N2 for rot. om trådaksen:

$$\tau = I_0 \ddot{\theta} \quad \text{med} \quad \tau = -\kappa \theta$$

$\Rightarrow$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 ; \quad \omega_0 = \sqrt{\kappa / I_0}$$

Exp: $M = 50 \text{ g}$, $L = 11 \text{ cm}$, $T = 0.8 \text{ s}$

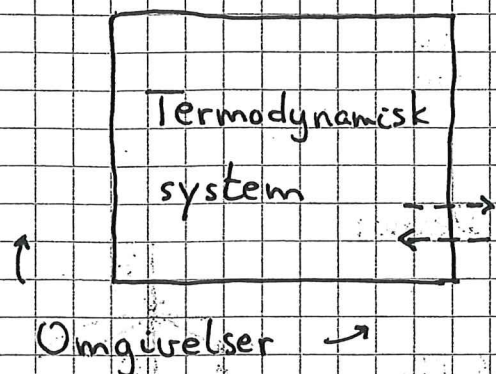
$$\Rightarrow \kappa = I_0 \omega_0^2 = \frac{1}{12} ML^2 \cdot (2\pi/T)^2 \approx \underline{0.003 \text{ Nm}}$$

TERMISK FYSIKK

①

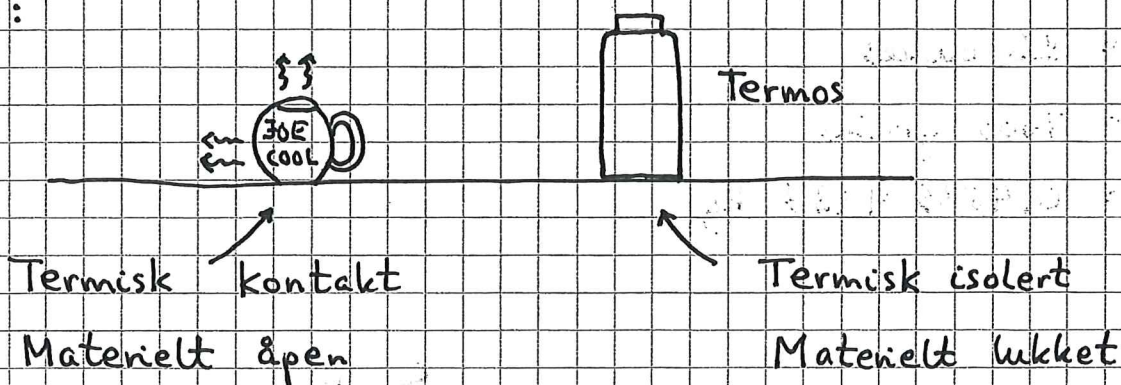
[OS2 1-4 (OS1 14) ; YF 17-20 (11,12) ; LHL 13-18 (LL7,8)]

System og omgivelser



Systemet kan utveksle energi
(og evt. masse) med omgivelsene.

Eks:

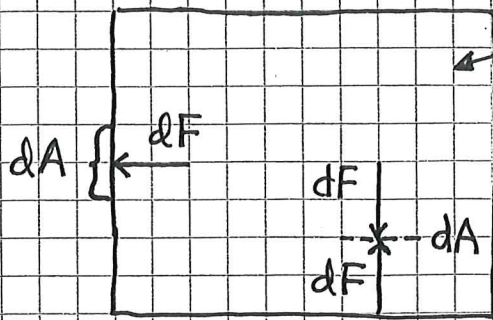


Sentrale termodyn. størrelser (variable; funksjoner)
er trykk og temperatur.

Eks:

Lufta i rommet; $p \approx 1 \text{ atm}$, $T \approx 22^\circ\text{C}$

Trykk [OS1 14.1; YF 11.4, 12.2, 12.3; LL 7.2, 8.1-8.4] (2)

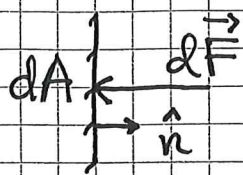


Fluid i termodyn. likevekt

Trykk $\stackrel{\text{def}}{=}$ Kraft pr flateenhet

$$p = dF/dA$$

p er skalar og isotrop (retningsuavhengig)



$$d\vec{F} = -p d\vec{A} = -p dA \hat{n}$$

Enheter:

$$[p] = \text{N/m}^2 = \text{Pa} \quad (\text{pascal}) \quad \text{i SI-syst.}$$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ atm} = 1.01325 \cdot 10^5 \text{ Pa} = \text{normalt lufttrykk}$$

$$1 \text{ psi} = \text{tyngden av et pund (ca 453.6 g) pr kvadrattomme} \\ (1 \text{ in} = 25.4 \text{ mm}) \approx 7 \text{ kPa} \quad (\Rightarrow 1 \text{ bar} \approx 14.5 \text{ psi})$$

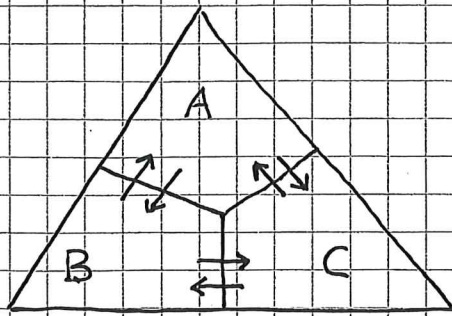
Måletrykk ("gauge pressure") = "overtrykk" = trykket relativt atmosfæretrykket.

Partialtrykk: Totalt trykk er sum av ulike molekylers partialtrykk.

$$\text{Luft: } p = p_{\text{N}_2} + p_{\text{O}_2} + p_{\text{Ar}} + p_{\text{CO}_2} + p_{\text{H}_2\text{O}} + \dots$$

Temperatur og termisk likevekt [OS2 1.1 ; YF 17.1 ; LHL 13.1] (3)

Anta at A, B, C kan utveksle energi (varme):



Hvis netto energistrøm mellom (f.eks.) A og B er null, er A og B i termisk likevekt, med lik temperatur.

$$T_A = T_B$$

Termodynamikkens 0. lov:

Hvis A og B er i termisk likevekt, og A og C _____ " _____,

er også B og C i termisk likevekt, og da er

$$T_A = T_B = T_C$$

T måles med termometer, basert på at en endring i T gir en endring i en annen fysisk størrelse, f.eks:

- væskevolum
- lengde på metallstang
- gasstrykk (når gassvolumet V holdes konstant)
- elektrisk motstand i metaller

osv.

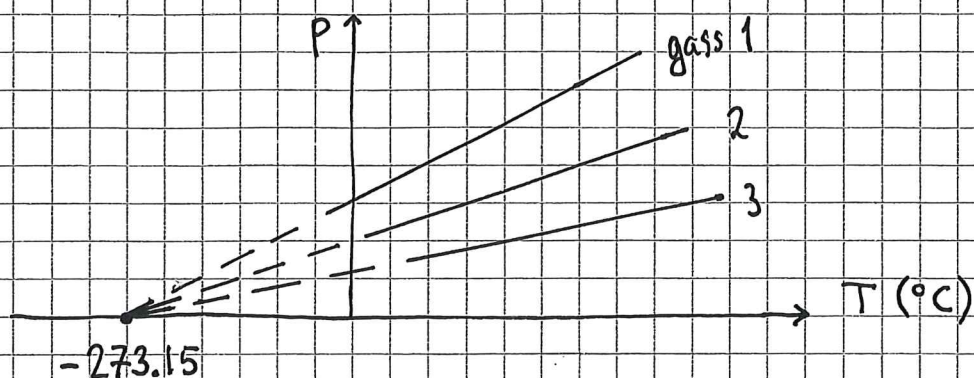
Enheter for temperatur:

(4)

Celsius-skala: Ved $p = 1 \text{ atm}$ fryser og koker H_2O ved hhv $T = 0^\circ\text{C}$ og $T = 100^\circ\text{C}$

Kelvin-skala og absolutt temperatur:

For ulike gasser med lav tetthet og konstant volum V er $p(T)$ lineær og ekstrapolerer til $p=0$ ved $T = -273.15^\circ\text{C}$



Naturlig å anta at T ikke kan bli mindre enn -273.15°C , det "absolutte nullpunkt", $T = 0 \text{ K}$ (kelvin).

Velger $\Delta T = 1 \text{ K}$ når $\Delta T = 1^\circ\text{C}$, dvs

$$T(\text{K}) = T(^{\circ}\text{C}) + 273.15$$

Fra 20.05.2019 defineres enheten K med utgangspunkt i den eksakte verdien

$$k_B = 1.380649 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

for Boltzmanns konstant.

Tilstandsligninger [OS2 2.1; YF 18.1; LHL 13.3-4] (5)

Et system i termisk likevekt er i en termodynamisk tilstand som kan beskrives med noen få

tilstandsvariable: p, T, V, N

N = antall partikler (mange!); et mål for stoffmengden

V er en ekstensiv variabel, prop. med stoffmengden:

$$\boxed{V} + \boxed{V} = \boxed{2V}$$

p, T er intensive variable, uavh. av stoffmengden:

$$\boxed{p, T} + \boxed{p, T} = \boxed{p, T}$$

Tilstandsligning: Matematisk sammenheng mellom p, T, V, N ; for gitt stoffmengde N på formen

$$f(p, T, V) = 0$$

og dermed

$$p = p(T, V) \quad ; \quad V = V(T, p) \quad ; \quad T = T(V, p)$$

(6)

For gasser med lav tetthet gir eksperimenter
ideell gass tilstandsligning (ideell gasslov)

$$pV = nRT$$

n = stoffmengde ; $[n] = \text{mol}$

Fra 20.05.19 : $1 \text{ mol} \equiv 6.02214076 \cdot 10^{23}$ partikler

ders $N_A \equiv 6.02214076 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ = Avogadros konstant

$R \approx 8.314 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ = (den molare) gasskonstanten

Molar masse = massen av 1 mol av et stoff

For molekyl med N_j atomer med atomnummer Z_j og med
 A_j nukleoner (ders $A_j - Z_j$ nøytroner) :

$$m = \sum_j N_j A_j u = \text{masse pr molekyl}$$

med $u \approx 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ = atomær masseenhet

$$\Rightarrow M = N_A \cdot m = \left(\sum_j N_j A_j \right) \text{ g/mol}$$

$$\text{siden } N_A \cdot u = 1 \text{ g/mol}$$

$N = n \cdot N_A$ = antall molekyler i n mol

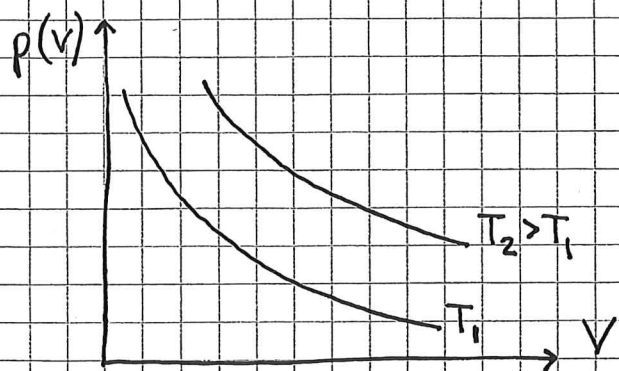
$$\Rightarrow n \cdot R = N \cdot k_B \quad \text{med} \quad k_B = R / N_A \equiv 1.380649 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

$\Rightarrow$

$$pV = Nk_B T$$

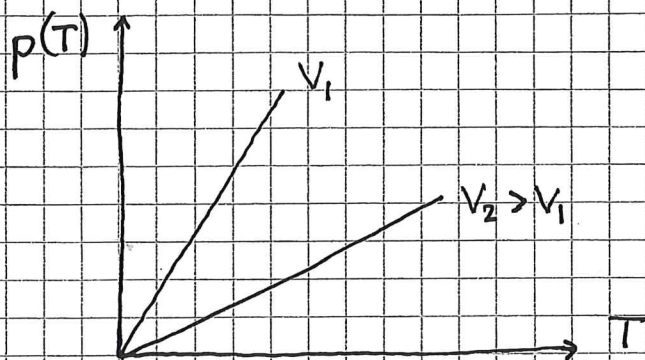
For gitt n , og med en variabel holdt konstant,
blir dette ulike funksjoner av kun en variabel:

⑦



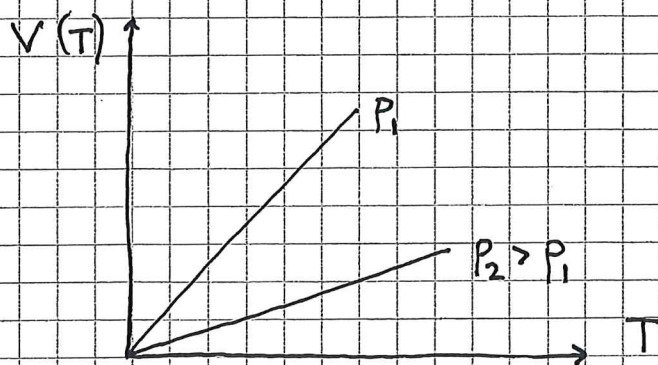
Isothermer

$T = \text{konst.}$



Isokorer

$V = \text{konst.}$



Isobarer

$p = \text{konst.}$

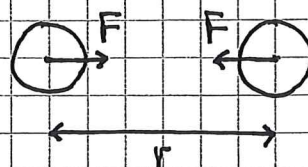
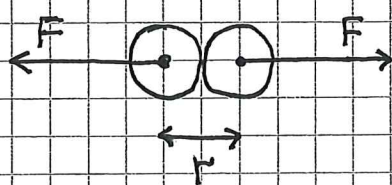
van der Waals tilstandsligning

(8)

J. D. van der Waals ; nobelpreis 1910

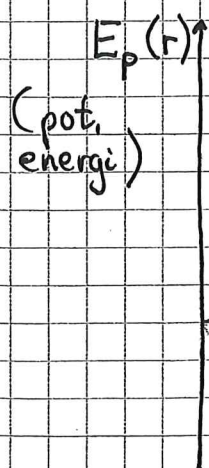
Ideell gasslov, $pV = nRT$, beskriver punktpartikler som ikke vekselvirker med hverandre ; dvs ingen innbyrdes krefter, og dermed ingen potensiell energi

Reelle gasser består av molekyler som okkuperer et volum, og som vekselvirker :



Liten $r \Rightarrow$ sterk frastøtning

"Stor" $r \Rightarrow$ svak tiltrekning mellom nøytrale atomer og molekyler; såkalte van der Waals - krefter



$$\vec{F} = -\nabla E_p(r)$$

van der Waals justerte ideell gasslov :

(9)

- Tilgjengelig volum i en beholder med volum V er

$$V - n \cdot b \quad (\text{dvs: } p \rightarrow \infty \text{ når } V \rightarrow nb)$$

b = volum okkupert av 1 mol molekyler

- Trykket skyldes molekylenees kollisjoner mot beholderens vegger. Tiltrekkende krefter mellom molekylene gir et litt mindre trykk mot veggene enn med ideell gass :

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - a \cdot \frac{n^2}{V^2}$$

Korreksjonen er på formen $-a \cdot (n/V)^2$ fordi en økning i tettheten n/V gir flere molekyler nær veggene som hver for seg tiltrekkes av flere nabo-molekyler.

Dermed:

$$(p + a n^2 / V^2)(V - nb) = nRT$$

$$[a] = \text{Pa} \cdot \text{m}^6 / \text{mol}^2 \quad ; \quad [b] = \text{m}^3 / \text{mol}$$

Eks:

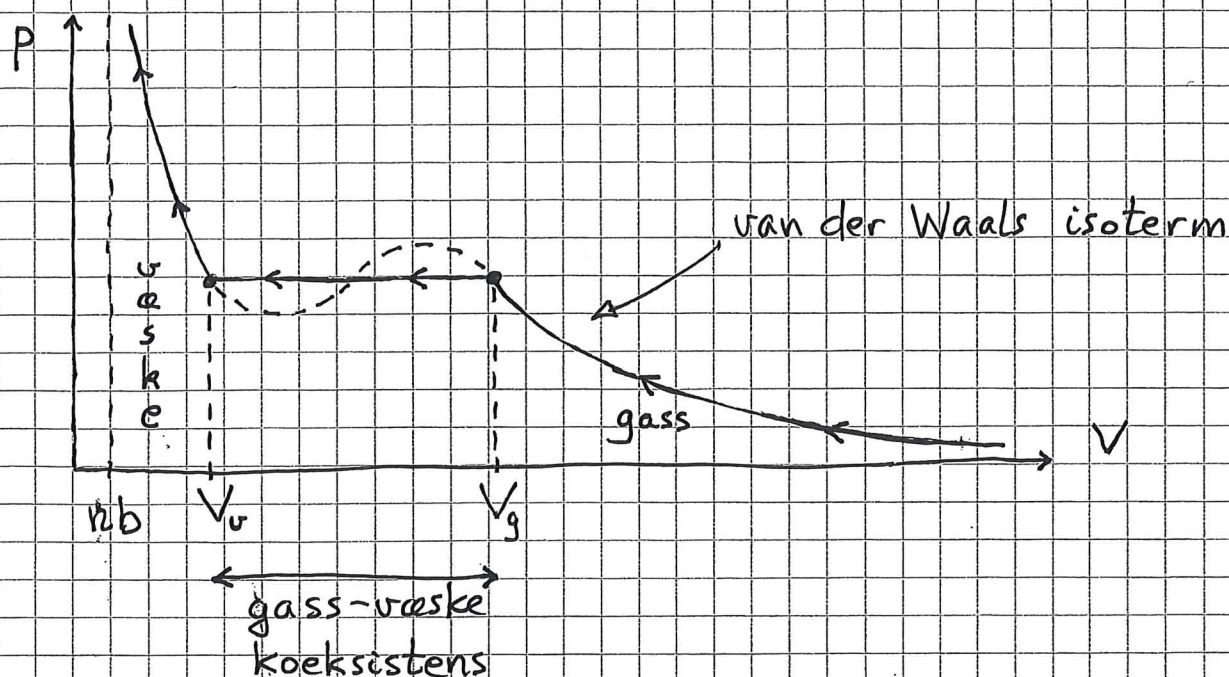
$$\text{He} : a = 0.00346 \quad ; \quad b = 2.4 \cdot 10^{-5}$$

$$\text{H}_2\text{O} : a = 0.554 \quad ; \quad b = 3.0 \cdot 10^{-5}$$

H_2O er permanente elektriske dipoler ; $\text{H} \text{---} \overset{+}{\text{O}} \text{---} \text{H}^+$

$\Rightarrow$ mye sterkere tiltrekning mellom H_2O -molekyler enn mellom He-atomer

Beskriver (kvalitativt) faseovergangen mellom gass og væske: (10)



Anta at V reduseres, med T holdt konstant.

$V > V_g$: kun gass

$V_g > V > V_v$: gass kondenserer til væske; vi har her en blanding av gass og væske i termodyn. likevekt

$V < V_v$: kun væske

[Kommentar : van der Waals - kurven er stiplet mellom V_v og V_g .

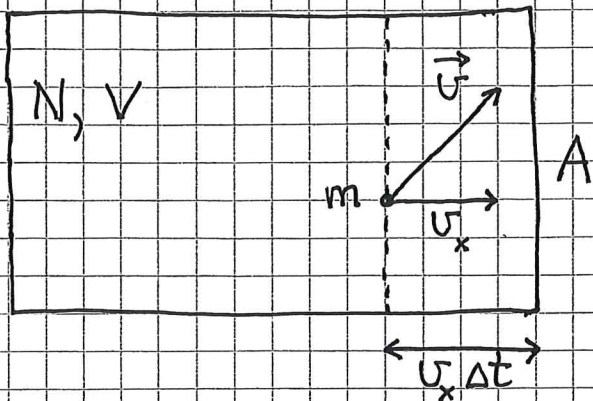
Denne er ufysisk, siden dp/dV ikke kan være positiv.

Frykket p er konstant under faseovergangen, inntil all gass har kondensert til væske.]

Kinetisk gasteori. Mikroskopisk tolkning av trykk og temperatur i gasser. [OS2 2.2; YF 18.3; LHL 14.1]

(11)

Vi antar en gass med lav tetthet, isotrope forhold (ingen foretrukne retninger) og elastiske molekylkollisjoner mot beholderens vegger.



$$p = \frac{F_x}{A} = \text{trykket i gassen}$$

N2: $F_x = \Delta P_x / \Delta t$, der ΔP_x = impuls overført fra molekylene til veggen på tiden Δt

$$\Delta P_x = \underbrace{2m u_x}_{\text{pr molekyl}} \cdot \underbrace{\frac{N}{2}}_{\text{antall med } u_x > 0} \cdot \underbrace{\frac{A u_x \Delta t}{V}}_{\text{andelen som når fram til høyre vegg i løpet av } \Delta t}$$

Dermed:

$$p = \frac{\Delta P_x / \Delta t}{A} = \frac{N}{V} \cdot m u_x^2$$

Men vi må ta hensyn til at molekylene har en isotrop fordeling av hastigheter, slik at u_x^2 må erstattes av middelveiden $\langle u_x^2 \rangle$.

$$\text{Isotropi} \Rightarrow \langle u_x^2 \rangle = \langle u_y^2 \rangle = \langle u_z^2 \rangle$$

Dermed er $\langle u^2 \rangle = \langle u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \rangle = 3 \langle u_x^2 \rangle$, slik at

$$p = \frac{N}{V} \cdot m \langle u_x^2 \rangle = \frac{N}{V} \cdot \frac{1}{3} m \langle u^2 \rangle = \frac{N}{V} \cdot \frac{2}{3} \langle K_{\text{trans}} \rangle,$$

$$\text{med } \langle K_{\text{trans}} \rangle = \frac{1}{2} m \langle u^2 \rangle = \text{midlere translasjonsenergi pr molekyl}$$

Sammenligning med $pV = Nk_B T$ gir

(12)

$$k_B T = \frac{2}{3} \langle K_{\text{trans}} \rangle$$

som viser at $k_B T$ ("termisk energi") er et direkte mål på gassmolekylenes midlere transl. energi: $\langle K_{\text{trans}} \rangle = \frac{3}{2} k_B T$.

En "typisk" molekylfart i en gass er gitt ved RMS-farten (Root Mean Square):

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3k_B T / m}$$

Eks: Vannmolekyler i badstueluft, 90°C

Løsn:

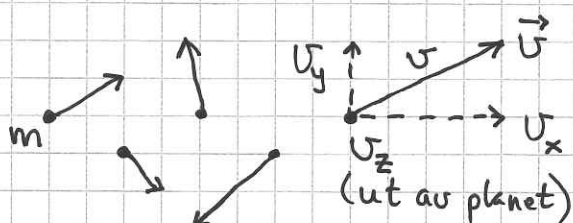
$$m(\text{H}_2\text{O}) = (2 + 16) \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$T = 363 \text{ K}$$

$$\Rightarrow v_{\text{rms}} = 709 \text{ m/s}$$

Maxwells hastighetsfordeling [OS2 2.4; YF 18.5; LHL 14.3]

(13)

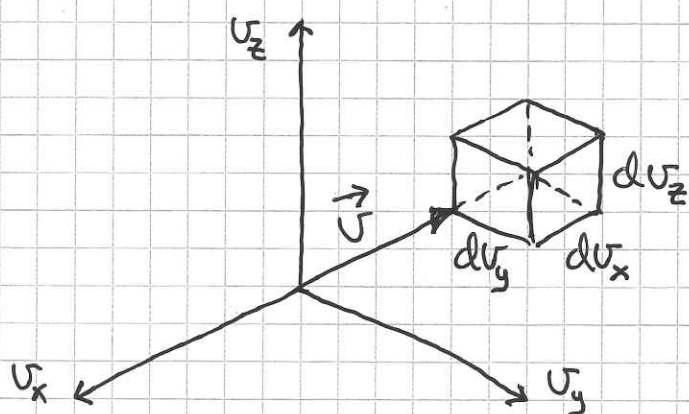


$$v = |\vec{v}|$$

$g(v_x) dv_x$ = sannsynligheten for at et tilfeldig valgt molekyl har x-komponenten av $\vec{v}$ mellom v_x og $v_x + dv_x$;
ders $g(v_x)$ = sanns. pr "fartsintervall", med enhet $(m/s)^{-1}$

$F(\vec{v}) dv_x dv_y dv_z \equiv F(\vec{v}) d^3v =$ sanns. for hastighet mellom $\vec{v}$ og $\vec{v} + d\vec{v}$, ders liten "boks" i $\vec{v}$ -rommet med volum $d^3v = dv_x dv_y dv_z$

$$[F] = (m/s)^{-3}$$



$f(v) dv =$ sanns. for $|\vec{v}|$ mellom v og $v + dv$

$$[f] = (m/s)^{-1}$$

Antagelser:

- Isotropi : $g(v_x) = g(-v_x)$ og $F(\vec{v}) = F(v)$
- Uavhengige komponenter : en måling av f.eks. v_x gir ingen informasjon om v_y eller v_z

Da er

(14)

$$F(v) d^3v = [g(v_x) dv_x] \cdot [g(v_y) dv_y] \cdot [g(v_z) dv_z]$$

dvs $F(v) = g(v_x) \cdot g(v_y) \cdot g(v_z)$

Eneste mulige løsning er: $g(v_x) = \exp(a - bv_x^2)$

slik at $F(v) = \exp(3a - bv^2)$; $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$

Total sannsynlighet er 1:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} g(v_x) dv_x = e^a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bv_x^2} dv_x = e^a \cdot I_0$$

"Tricks": $I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-by^2} dy$

$$\Rightarrow I_0^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b(x^2+y^2)} dx dy$$

som i polarkoordinater blir $(x^2+y^2=r^2 ; dx dy = dr \cdot r d\phi)$:

$$I_0^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-br^2} r dr d\phi = 2\pi \cdot \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{2b} e^{-br^2}\right) = \frac{\pi}{b}$$

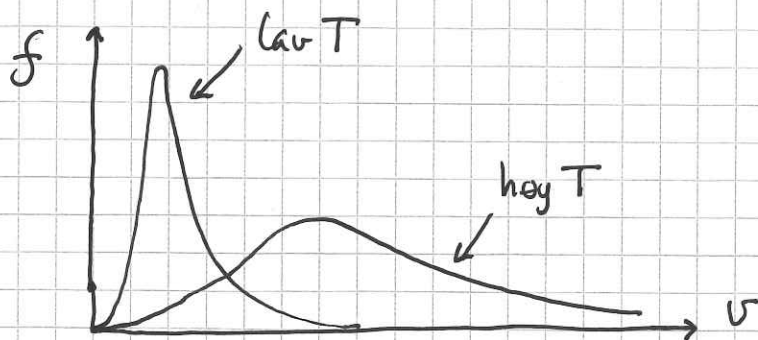
dvs: $I_0 = \sqrt{\pi/b}$

Dermed: $e^a = \sqrt{b/\pi}$ og $g(v_x) = \sqrt{\frac{b}{\pi}} e^{-bv_x^2}$

Fra s. 12: $\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle = \frac{1}{3} \cdot \frac{3k_B T}{m} = \frac{k_B T}{m}$

Dvs: $\frac{k_B T}{m} = \langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 g(v_x) dv_x = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-bv_x^2} dv_x$

"Tricks": $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-bx^2} dx = -\frac{d}{db} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx^2} dx \right\}$
 $= -\frac{d}{db} I_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} b^{-3/2}$



Noen eksempler:

- $\langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0$ pga symmetri
- $\langle v^2 \rangle = 3k_B T / m$; $v_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3k_B T / m}$
- $\langle v \rangle = \int_0^\infty v f(v) dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-mv^2/2k_B T} dv$

Her er

$$\begin{aligned} \int_0^\infty v^3 e^{-bv^2} dv &= -\frac{d}{db} \int_0^\infty v e^{-bv^2} dv \\ &= -\frac{d}{db} \left(\frac{1}{2b} \right) = \frac{1}{2b^2} \end{aligned}$$

slik at

$$\langle v \rangle = \sqrt{8k_B T / \pi m}$$

$$\langle \vec{v} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{v} F(\vec{v}) dv_x dv_y dv_z = 0$$

- Lydbølgers hastighet i en gass: $v_{lyd} = \sqrt{\gamma k_B T / m}$

Her er γ gassens adiabatkonstant (mer om denne senere);

for luft er $\gamma = 1.4$, midlere molekylmasse er ca

$(0.029 \text{ kg/mol}) / (6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}) \approx 4.8 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$, slik at ved

20°C ($\approx 293 \text{ K}$) er $v_{lyd} \approx 343 \text{ m/s}$. ($v_{lyd} < \langle v \rangle < v_{rms}$)

Termodynamiske koeffisienter [OS 2 1.3; YF 17.4; LHL 13.2]

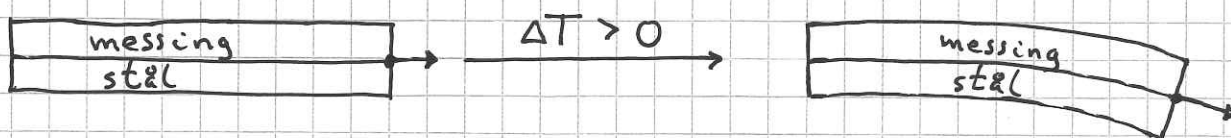
(17)

- Lineær utvidelseskoeffisient, for faste stoffer:

$$\alpha = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta L / L}{\Delta T} \right\}_{p = \text{konst.}} = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_p$$

Eks: $\alpha = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ for stål og $1.8 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ for messing

Bimetalltermometer:



- Volumutvidelseskoeffisient:

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

Eks 1: For faste stoffer er $\beta = 3\alpha$, siden $V = L^3$

Eks 2: $\beta \approx 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ for etanol og ca $2.7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ for glass; dermed stiger spritsøylen med økende T

Eks 3: Pga en svært "åpen" krystallstruktur har is lavere massetetthet enn kaldt vann. Vann har størst massetetthet ved $+4^\circ\text{C}$. Med andre ord, $\beta < 0$ for vann mellom 0°C og $+4^\circ\text{C}$.

Dette hindrer innsjøer & bunnfryse om vinteren:

Vann med $T = 4^\circ\text{C}$ synker til bunns, overflaten fryser til is og hindrer (bremser) varmeoverføring fra vannet til den kalde lufta over isen.

- Kompressibilitet og bulkmodul:

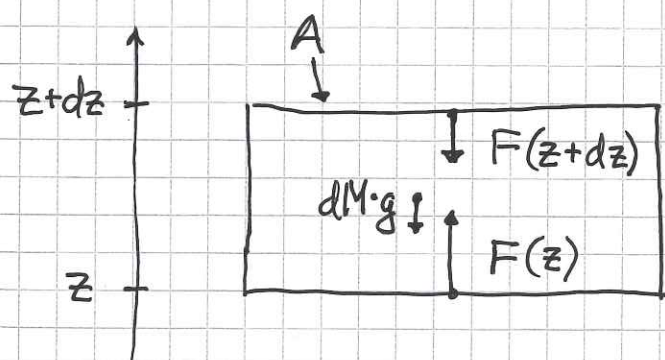
$$\kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \text{isoterm kompressibilitet}$$

$$B = 1/\kappa = \text{isoterm bulkmodul}$$

Væsker og faste stoffer har mye mindre verdier for κ enn gasser; væsker og faste stoffer er med god tilnærming inkompressible.

Trykk - eksempler:

Eks 1: Hvordan artar p med høyden over havet?



← Luftmasse:

$$dM = \rho \cdot dV = \rho A dz$$

ρ = massetetthet

dM i likevekt når $\sum \vec{F} = 0$:

$$F(z) = F(z+dz) + dM \cdot g$$

$$\Rightarrow p(z) \cdot A = p(z+dz) \cdot A + \rho g dz \cdot A$$

$$\Rightarrow dp = p(z+dz) - p(z) = -\rho g dz$$

Hvis væske med konstant ρ : $p(z) = p(0) - \rho g z$; dvs p øker lineært nedover i væsken.

Ideell gasslov gir

$$\rho = \frac{\langle m \rangle \cdot N}{V} = \frac{\langle m \rangle \cdot p}{k_B T}$$

For luft er midlere molekylmasse

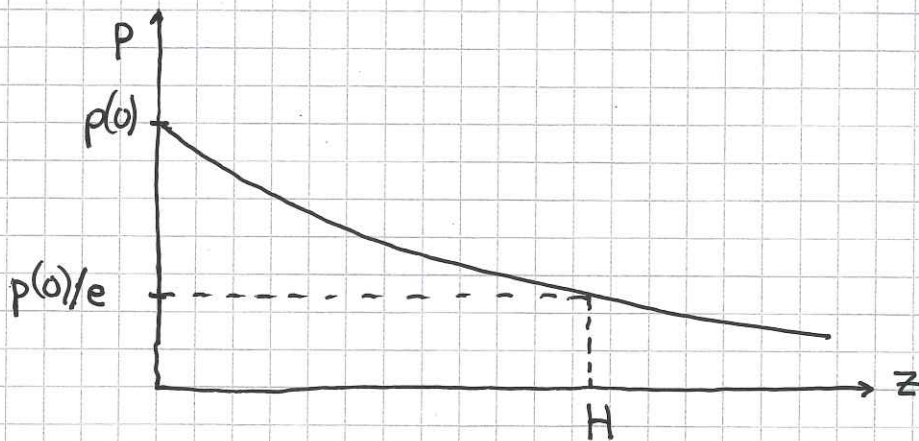
$$\begin{aligned} \langle m \rangle &\approx (29 \text{ g/mol}) / (6.02 \cdot 10^{23} \text{ molekyl/mol}) \\ &\approx 4.8 \cdot 10^{-26} \text{ kg pr molekyl} \end{aligned}$$

Dermed:

$$\int_{p(0)}^{p(z)} \frac{dp}{p} = - \int_0^z \frac{\langle m \rangle g}{k_B T} dz$$

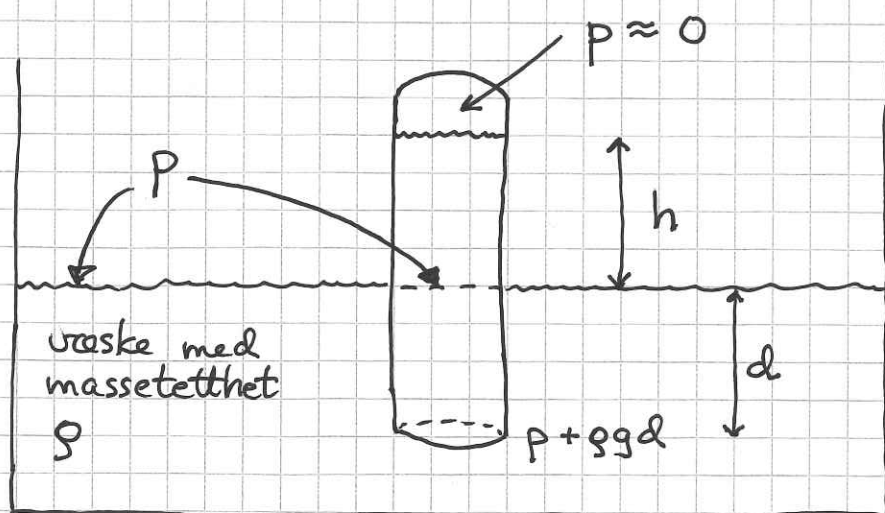
For z opptil noen km kan vi anta konstant g , samt en midlere $T \approx 260 \text{ K}$:

$$p(z) = p(0) \exp(-z/H) ; \quad H = \frac{k_B T}{\langle m \rangle g} \approx 7.6 \text{ km}$$



Øving 8: Atmosfæren på Mars

Eks 2: Barometeret



Med $p = 0$ over væskesøylen inni røret blir

$$p = \rho g h$$

lufttrykket på utsiden. (Mens $p = \rho g (h + d)$ i dybden d under væskeoverflaten.)

Med kvikksølv (Hg):

$$\rho = 13.6 \text{ g/cm}^3 \Rightarrow p = 1 \text{ atm} \text{ tilsvarer } h = 760 \text{ mm Hg}$$

Med vann:

$$\rho = 1 \text{ g/cm}^3 \Rightarrow p = 1 \text{ atm} \text{ tilsvarer } h \approx 10 \text{ m vann}$$

Dvs: Max høydeforskjell mellom brønnen og hytta er 10 m dersom det benyttes en sugepumpe inni hytta. Med større høydeforskjell må du installere en trykkpumpe nede i brønnen.

Varme. Varmekapasitet [OS2 1.4; YF 17.5; LHL 13.2] (21)

Varme $\stackrel{\text{def}}{=}$ energi overført pga temperaturforskjell

Arbeid = andre former for energioverføring

Varmekapasitet $\stackrel{\text{def}}{=}$ tilført varme pr grad temperaturøkning

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}} \quad [C] = \text{J/K}$$

Varmereservoar: System som kan argi eller motta varme uten at T endres. Dvs $C \rightarrow \infty$.

Man måler gjerne C med p eller V holdt konstant:

$$C_p = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_p \quad ; \quad C_v = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_v$$

Molar varmekapasitet: $C_m = C/n$ (J/mol·K)

Varmekap. pr masseenhet: $c = C/M$ (J/kg·K)

Kalorier:

1 cal øker T fra 14.5°C til 15.5°C i

1 g vann ved trykk 1 atm.

$$1 \text{ cal} = 4.184 \text{ J}$$

$$1 \text{ kcal/mol} \approx 6.95 \cdot 10^{-21} \text{ J pr molekyl} \\ \approx 43 \text{ meV pr molekyl}$$

$$1 \text{ eV} (= 1 \text{ elektronvolt}) = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Faseoverganger og latent varme

(22)

[OS2 1.5 ; YF 17.6, 18.6 ; LHL 13.2, 17.10]

"Ordinære" faser av et stoff:

gass (g), væske (v), fast stoff (f)

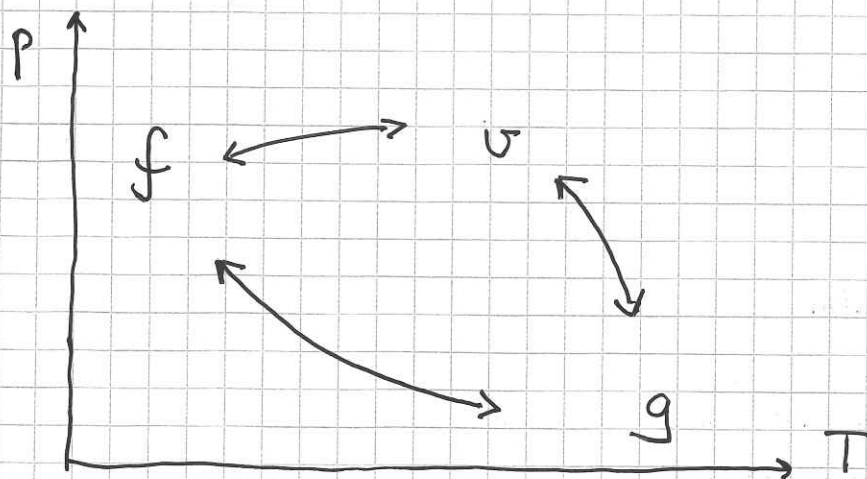
Faseoverganger mellom disse:

g $\xleftarrow{\text{fordamping}}$ v
 $\xrightarrow{\text{kondensasjon}}$

v $\xleftarrow{\text{smelting}}$ f
 $\xrightarrow{\text{størkning}}$

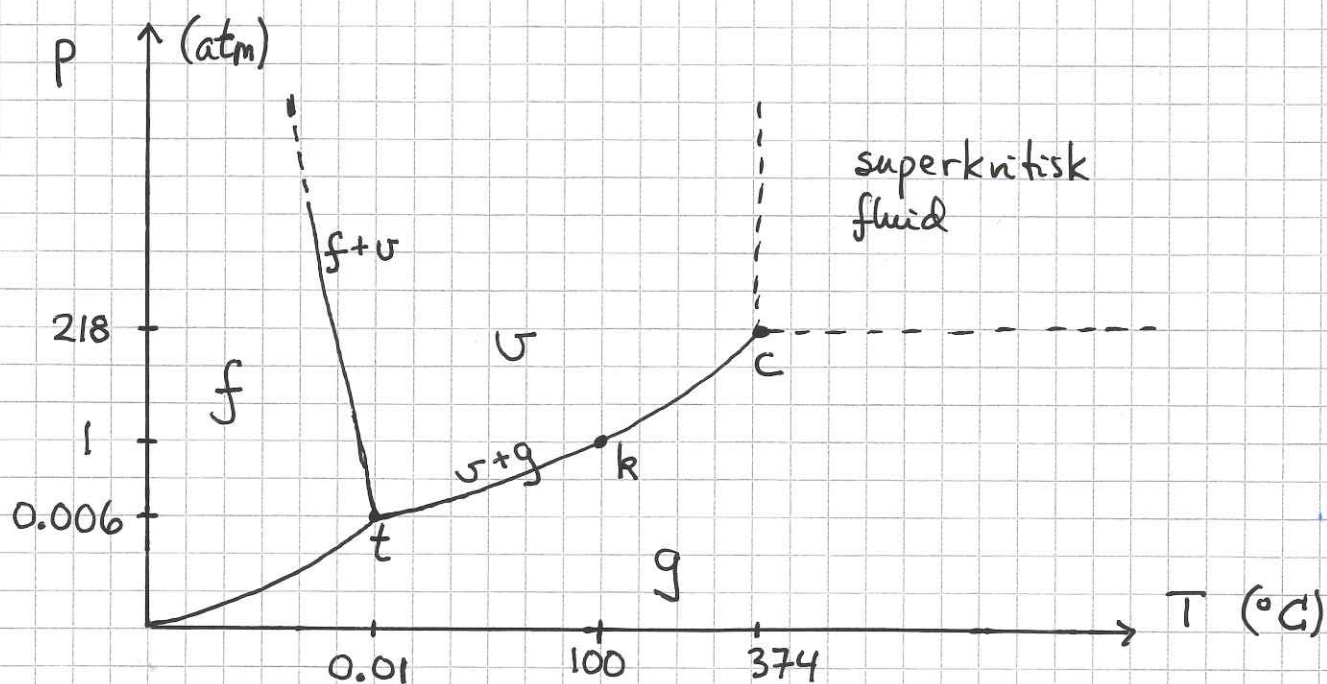
g $\xleftarrow{\text{sublimasjon}}$ f
 $\xrightarrow{\text{deposisjon}}$

Kvalitativt, i et (p,T)-diagram:



Likevekt mellom to faser markeres med koeksistenslinjer. Viktig eksempel er H_2O :

(23)



- Her angir p damptrykket, dvs partialtrykket fra H_2O
- Trippelpunktet (t): Alle 3 faser i samtidig likevekt. For H_2O er $p_t = 611.657$ Pa og $T_t = 273.16$ K.
- Kokepunktet (k): Damptrykket er like stort som lufttrykket utenfor væsken. Hvis T blir litt større enn T_k ($T_k = 100^{\circ}C$ når det omgivende lufttrykket er 1 atm), blir damptrykket i væska litt større enn det omgivende trykket. Væske omdannes raskt til gass, og det dannes bobler (av vann damp) i væska. Vannet koker. På Mount Everest (8848 moh) er $p_k \approx 0.34$ atm og $T_k \approx 71^{\circ}C$.
- Kritisk punkt (c): Enden på v/g -koeksistenslinjen. Hvis $p > p_c$ og $T > T_c$: Ingen forskjell på væske og gass. Stoffet er et superkritisk fluid.

Latent varme :

Tilførsel av varme må til for å bryte bindinger ved smelting, fordamping og sublimasjon. Dette øker stoffets indre potensielle energi, ikke indre kinetisk energi. Dvs, T endres ikke. Systemet forblir på koeksistenslinjen inntil alt stoff er smeltet, fordampet eller sublimert.

L = latent varme = påkrevd varme for å smelte, fordampe eller sublimere en viss mengde ved gitt T .

Eks: H_2O nær trippelpunktet

$$L_{sm} \approx 80 \text{ cal/g}, L_f \approx 600 \text{ cal/g}, L_{sub} \approx 680 \text{ cal/g}$$

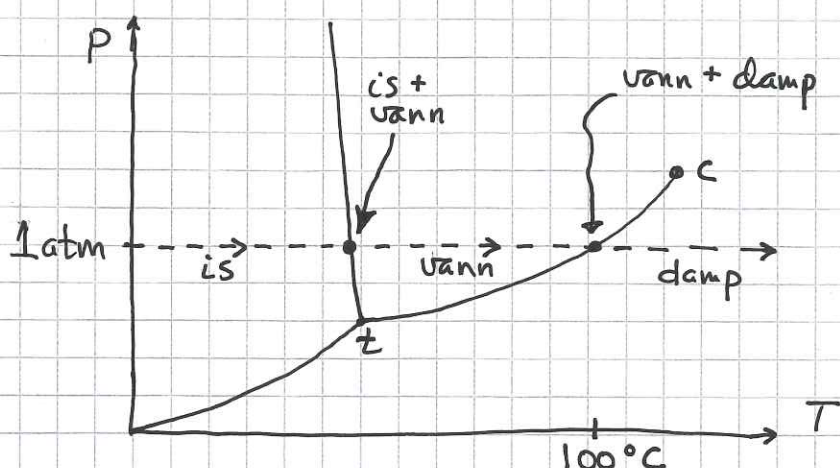
$$\text{Som ventet er } L_{sub} \approx L_{sm} + L_f$$

$$\text{Ved 1 atm : } L_f \approx 540 \text{ cal/g}$$

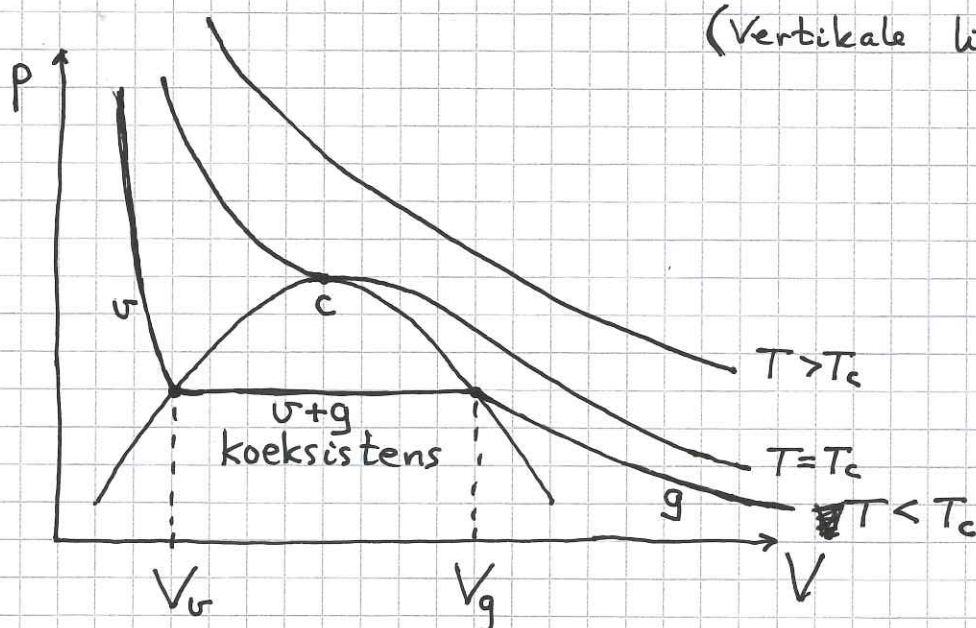
Når $T \rightarrow T_c$ vil $L_f \rightarrow 0$; da er væske og gass det samme fluidet, og det skjer ingen faseovergang.

Eks: Oppvarming av H_2O , fra is til vanndamp, med konstant varmeeffekt og ved 1 atm.

(25)



Eks: Isotermene i pV -planet, for $T > T_c$
(Vertikale linjer i (p, T) -planet)



$T > T_c$: superkritisk fluid

$T = T_c$: kritisk isotherm ; i kritisk punkt (c) er

$$\frac{\partial p}{\partial V} = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} = 0 \quad (\text{dvs: et vendepunkt})$$

$T < T_c$: kun væske hvis $V \leq V_v$; væske + gass likevekt hvis $V_v < V < V_g$ ($p = \text{konstant}$) ; kun gass hvis $V \geq V_g$; jf. van der Waals tilstandsligning s. 8-10.

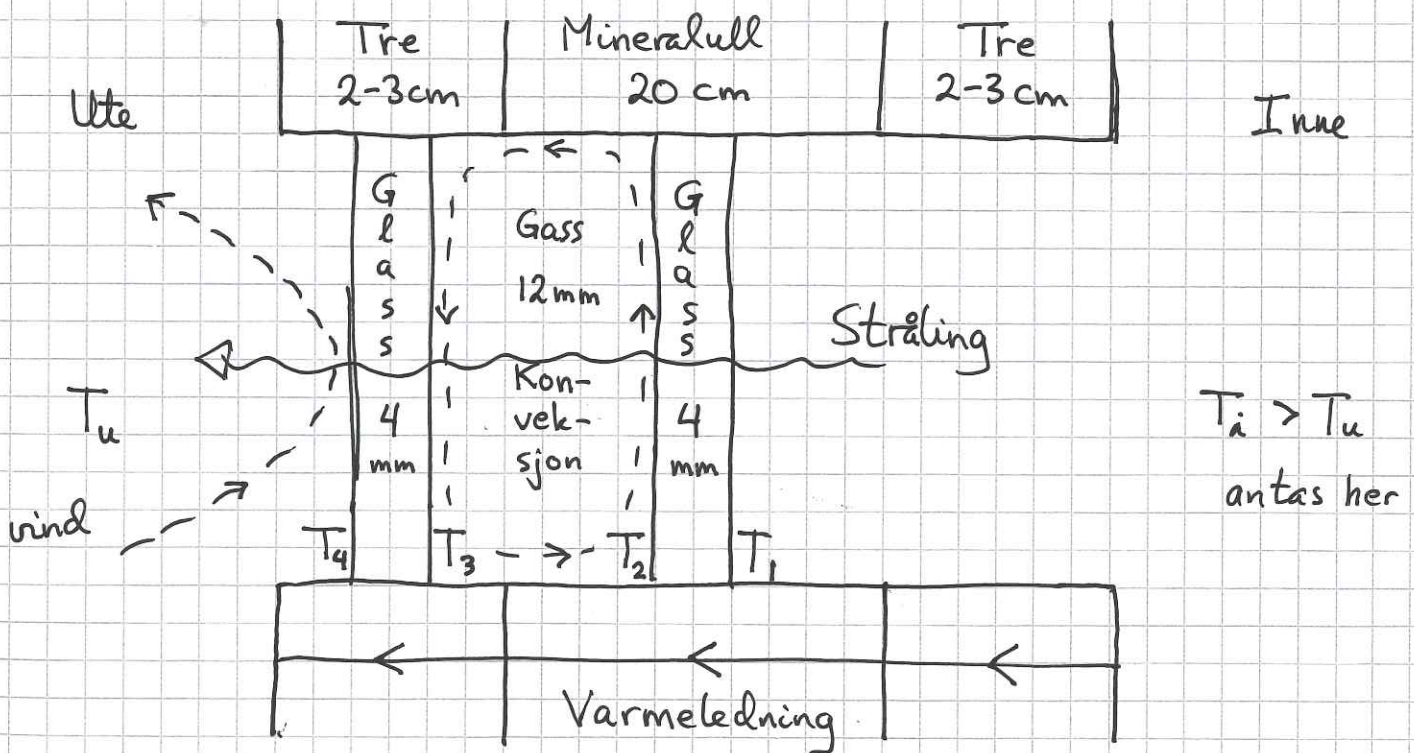
Varmetransport [OS2 1.6; YF 17.7; LHL 18]

(26)

Tre viktige mekanismer:

- Konveksjon: Strømning av fluid
- Varmedledning: Forplantning av kinetisk energi på mikroskopisk nivå
- Stråling: Et legeme med temperatur T sender ut energi i form av elektromagnetiske bølger

Alle tre er relevante for en vegg med vindu:



Sentral fysisk størrelse er:

varmestrømtettheten $\stackrel{\text{def}}{=}$ overført varme pr tidsenhet og pr flateenhet = varmeeffekt pr flateenhet

$$\Rightarrow [j] = \text{W/m}^2$$

Konveksjon [OS2 1.6 ; YF 17.7 ; LHL 18.2]

(27)

$T_2 > T_3 \Rightarrow$ mindre tetthet ved 2 enn ved 3
 $\Rightarrow$ gassen stiger ved 2 og faller ved 3
 $\Rightarrow$ sirkulasjon og netto varmeoverføring fra 2 til 3

Samme effekt ute ($T_4 > T_u$) og tildels inne ($T_i > T_1$).

Antar typisk at konveksjon gir j prop. med ΔT , dvs

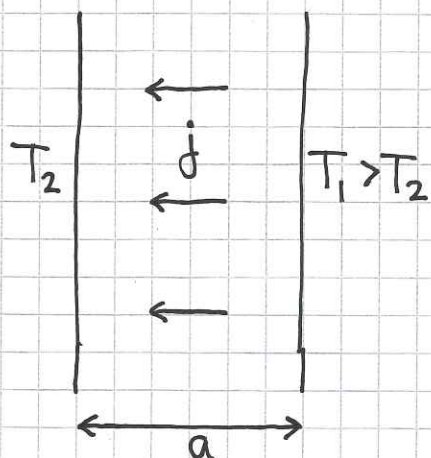
$$j = \alpha \cdot \Delta T ; \quad \alpha = \text{varmeovergangstall}$$

Innvendig (uten vind) : $\alpha_i \approx 7.5 \text{ W/m}^2\text{K}$

Utvendig (vind 5-6 m/s) : $\alpha_u \approx 25 \text{ W/m}^2\text{K}$

Varmeledning [OS2 1.6 ; YF 17.7 ; LHL 18.1]

Vi ser her på stasjonær (dvs tidsuavhengig) varmeledning i en dimensjon.



- Materiale med tykkelse a ; glass, tre, "glava"
- Konstante temperaturer T_2 og $T_1 > T_2$ på hver overflate
- Exp. gir j prop. med $\Delta T/a$

- Med stasjonære forhold er j uavhengig av x ; i motsatt fall ville $j(x) \neq j(x+dx)$, og dermed ville $T(x)$ ha endret seg med tiden

- Med j uavhengig av x er $\frac{\Delta T}{a} = \frac{dT}{dx}$, dvs

$$j = -\kappa \frac{\Delta T}{a} = -\kappa \frac{dT}{dx}$$

Som er Fouriers lov, med κ = materialets varmeledningsevne, med enhet $[\kappa] = W/K \cdot m$

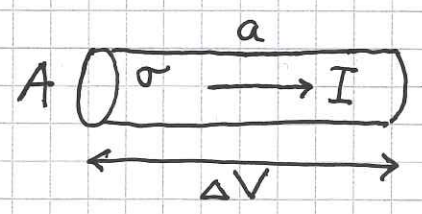
- Fouriers lov i 3D: $\vec{j} = -\kappa \nabla T$

- Tallverdier:

Materiale	Luft	Glava	Vann	Is	Glass	Tre	Stål
$\kappa (W/K \cdot m)$	0.026	0.035	0.61	2.2	ca 1	0.1-0.2	43

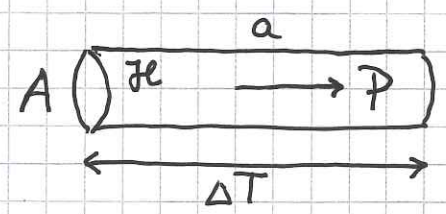
Fouriers lov og Ohms lov: en perfekt analogi

Elektrisk motstand



σ = elektrisk ledningsevne
 $j = I/A$ = strømtetthet ($\frac{A}{m^2}$)
 $j = \sigma E$ (Ohms lov)
 E = elektrisk felt (V/m)
 $\Delta V = E \cdot a$ = spenning (V)
 $\Rightarrow \Delta V = I \cdot R$ med
 $R = a / \sigma A$ (Ω)
 (V/A)
 $(A = C/s)$

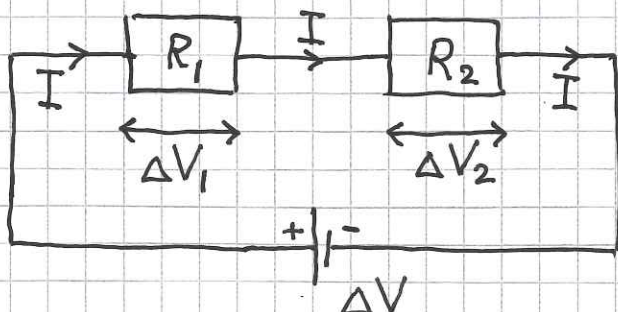
Varmemotstand



κ = varmeledningsevne
 $j = P/A$ = varmestømtetthet ($\frac{W}{m^2}$)
 $j = \kappa \Delta T / a$ (Fouriers lov)
 $\Rightarrow \Delta T = P \cdot R_Q$ med
 $R_Q = a / \kappa A$ (K/W)
 $(W = J/s)$

Må ha samme regler for serie- og parallellkobling av varmemotstander og elektriske motstander.

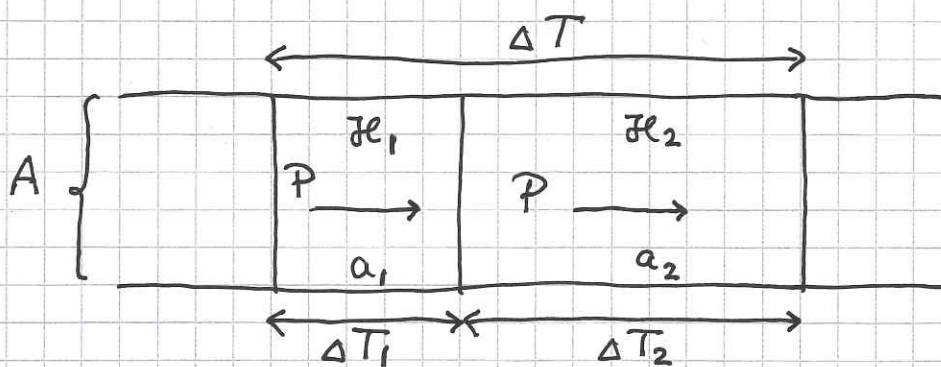
Seriekobling:



Pga ladningsbevarelse: Lik elektrisk strøm I gjennom R_1 og R_2

$$\Rightarrow \Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = R_1 I + R_2 I = R I$$

$$\Rightarrow \text{Total motstand: } R = R_1 + R_2$$

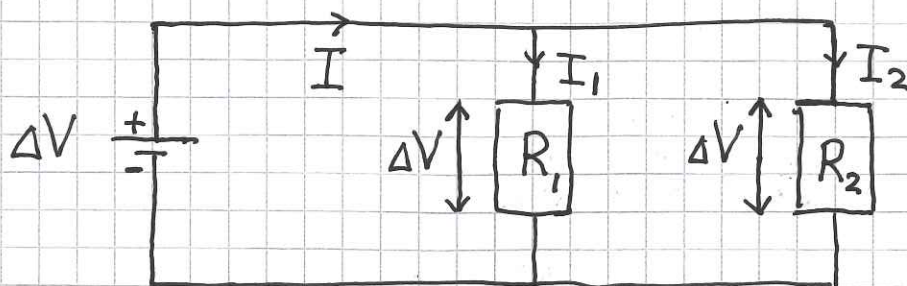


Pga energibevarelse: Lik varmestrøm (effekt) P gjennom begge lag 1 og 2

$$\Rightarrow \Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 = R_Q^{(1)} P + R_Q^{(2)} P = R_Q P$$

$$\Rightarrow \text{Total varmemotstand: } R_Q = R_Q^{(1)} + R_Q^{(2)}$$

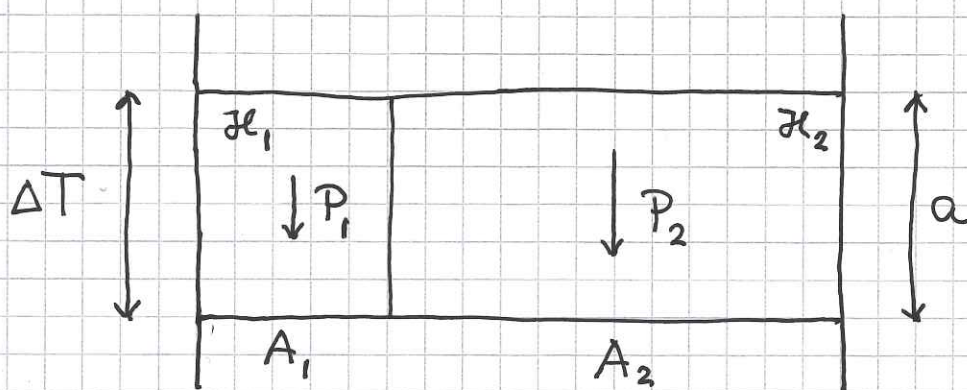
Parallellkobling:



Lik spenning ΔV over R_1 og R_2

Pga ladningsbevarelse: $I = I_1 + I_2 = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} = \frac{\Delta V}{R}$

$\Rightarrow$ Total motstand R gitt ved $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$



Lik temperaturforskjell ΔT over begge lag 1 og 2

Pga energibevarelse: $P = P_1 + P_2 = \frac{\Delta T}{R_Q^{(1)}} + \frac{\Delta T}{R_Q^{(2)}} = \frac{\Delta T}{R_Q}$

$\Rightarrow$ Total varmemotstand R_Q gitt ved $\frac{1}{R_Q} = \frac{1}{R_Q^{(1)}} + \frac{1}{R_Q^{(2)}}$

Eks: Tømmervegg vs reisverk og glava

Ser på 1 m^2 vegg, 24 cm tykk, massiv furu ($\lambda_t = 0.12 \frac{\text{W}}{\text{K}\cdot\text{m}}$) og $2 \times 2\text{ cm}$ panel + 20 cm glava ($\lambda_g = 0.035 \frac{\text{W}}{\text{K}\cdot\text{m}}$).

$$\text{Tømmer: } R_Q^{(t)} = \frac{0.24\text{ m}}{0.12 \frac{\text{W}}{\text{K}\cdot\text{m}} \cdot 1\text{ m}^2} = 2.0 \text{ K/W}$$

$$\text{Reisverk: } R_Q^{(r)} = R_Q^{(p)} + R_Q^{(g)} = 2 \cdot \frac{0.02\text{ m}}{0.12 (\text{W/K}\cdot\text{m}) \cdot 1\text{ m}^2} + \frac{0.20}{0.035 \cdot 1} \frac{\text{K}}{\text{W}} \approx 6.0 \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

Effektutp gjennom 1 m^2 vegg med $\Delta T = 30\text{ K}$ ($+20^\circ\text{C} / -10^\circ\text{C}$):

$$P_t = \Delta T / R_Q^{(t)} = 15\text{ W} ; P_r = \Delta T / R_Q^{(r)} = 5\text{ W}$$

Reisverk, temperaturprofil:

$$\Delta T_g = P_r \cdot R_Q^{(g)} = 5\text{ W} \cdot 5.7 \frac{\text{K}}{\text{W}} \approx 28.5\text{ K}$$

$$\Delta T_p = P_r \cdot R_Q^{(p)} = 5\text{ W} \cdot 0.33 \frac{\text{K}}{\text{W}} = 1.5\text{ K}$$

- Hvorfor tømmerhytte? Holder lengst på varmen pga mye større varmekapasitet enn glava:

$$\text{Furu: } C/V = 2800 (\text{J/kg}\cdot\text{K}) \cdot 520 (\text{kg/m}^3) = 1456 \text{ kJ/m}^3\cdot\text{K}$$

$$\text{Glava: } C/V = 800 \text{ — — — } \cdot 150 \text{ — — — } = 120 \text{ kJ/m}^3\cdot\text{K}$$

- Hvorfor glava ($\lambda_g = 0.035 \frac{\text{W}}{\text{K}\cdot\text{m}}$) og ikke luft i veggen ($\lambda_l = 0.026 \frac{\text{W}}{\text{K}\cdot\text{m}}$)?

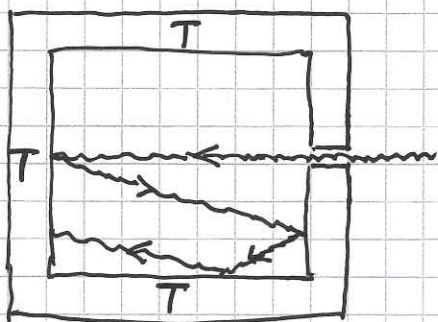


Luft gir stort varmetap pga konveksjon og stråling.

Stråling [OS2 1.6; YF 17.7; LHL 18.4]

(32)

- Legeme med temp. T inneholder akselererte ladninger. Disse emitterer (sender ut) elektromagnetiske bølger, dvs EM stråling, ifølge Maxwells ligninger.
- EM stråling som faller inn mot et legeme vil absorberes, reflekteres og/eller transmitteres, med andeler hhv a , r og t , slik at $a + r + t = 1$.
- Svart legeme: $a = 1$; $r = t = 0$. En idealisering.
God realisering: Boks med liten åpning inn til et hulrom.



- For legeme i termisk likevekt: Like mye energi emitteres og absorberes, for alle bølgelengder.
For svart legeme i termisk likevekt: $a = e = 1$
 e = emisjonseffekten/emissiviteten.
- Max Planck (1900): EM stråling med frekvens f (bølgelengde $\lambda = c/f$; $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s = lysfarten i vakuum) har kvantisert energi $E_n = n \cdot hf$; $n = 0, 1, 2, \dots$; $h \approx 6.6 \cdot 10^{-34}$ Js = Plancks konstant.
Frekvensfordelingen i strålingsenergien fra legeme med temp. T blir da

$$\frac{dj}{df} = \frac{2\pi h f^3 / c^2}{\exp(hf/k_B T) - 1} = \text{utstrålt effekt pr}$$

flateenhet, og pr frekvensenhet; dvs med enhet $\frac{W/m^2}{Hz}$

Total utstrålt effekt pr flateenhet:

$$j(T) = \int_0^\infty \frac{dj}{df} df = \sigma T^4; \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^2} \approx 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

Dette er Stefan-Boltzmanns lov for et svart legeme.

For reelle legemer med emisjonseffekt $e < 1$:

$$j(T) = e \cdot \sigma T^4$$

Eks: Asfalt $e = 0.93$. Polert stål: $e = 0.075$

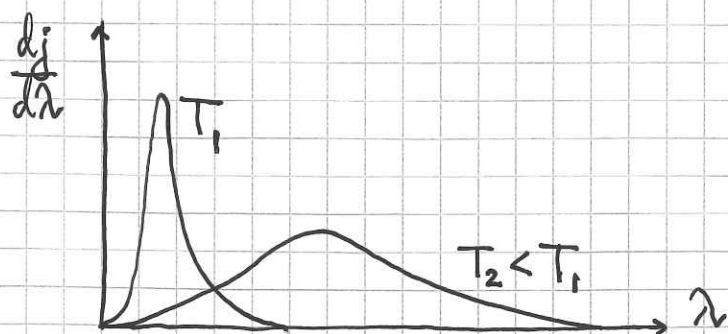
- Bølgelengdefordelingen:

$$f = c/\lambda \Rightarrow df/d\lambda = -c/\lambda^2 \Rightarrow df = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$$

$$\Rightarrow j(T) = \int_{\lambda=\infty}^0 \frac{2\pi h (c/\lambda)^3 / c^2}{\exp(hc/\lambda k_B T) - 1} \cdot \left(-\frac{c}{\lambda^2}\right) d\lambda = \int_0^\infty \frac{dj}{d\lambda} d\lambda$$

$$\text{med } \frac{dj}{d\lambda} = \frac{2\pi h c^2 / \lambda^5}{\exp(hc/\lambda k_B T) - 1} \quad \text{med enhet } \frac{W/m^2}{m} = \frac{W}{m^3}$$

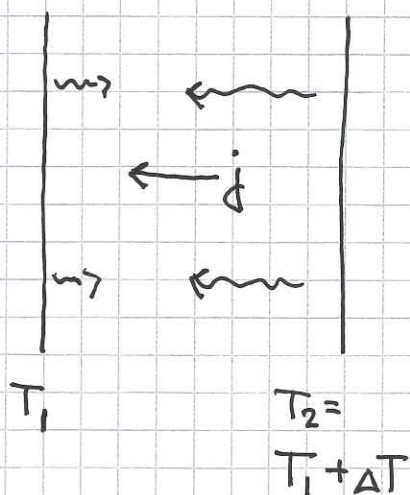
- Wiens forskyvningslov: $\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dj}{d\lambda} \right) = 0 \Rightarrow \text{maxverdi}$
for $dj/d\lambda$ når $\lambda \cdot T \approx 2.90 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}$



Tilsvarende: $\frac{d}{df} \left(\frac{dj}{df} \right) = 0$ gir $\max \frac{dj}{df}$ når $\frac{f}{T} \approx 5.88 \cdot 10^{10} \frac{\text{Hz}}{\text{K}}$

Eksempler:

- Mørk skyfri himmel tilsvarer svart legeme med $T \approx 250 \text{ K}$. Kan gi så stort varmetap pga stråling at veibanen oppnår $T < 0^\circ \text{C}$ selv om $T > 0^\circ \text{C}$ i lufta. Kjør forsiktig!
- Stråling fra kroppens overflate, med $T \approx 303 \text{ K}$, har maksimal $dj/d\lambda$ ved $\lambda \approx 10 \mu\text{m}$ (infrarødt; IR).
- Solas overflate: $T \approx 6 \cdot 10^3 \text{ K}$ gir $\max dj/d\lambda$ ved ca 480 nm (blå-grønt). Stor $dj/d\lambda$ også i ultrafiolett-området (UV) $10 - 400 \text{ nm}$; det meste absorberes i atmosfæren, av $\text{N}_2, \text{O}_2, \text{O}_3$ etc.
- Varmeoverføring mellom to parallelle plan:

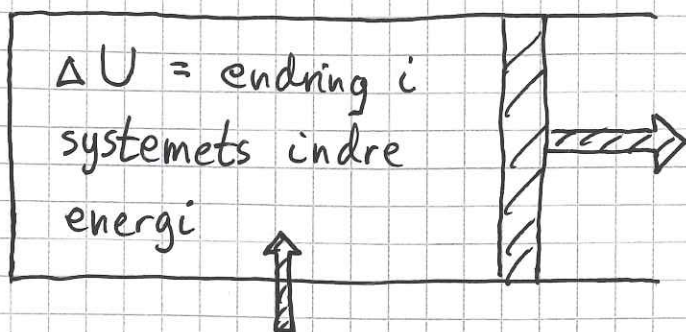


$$j = \sigma (T_2^4 - T_1^4) \\ = \sigma (T_2^2 + T_1^2)(T_2 + T_1)(T_2 - T_1)$$

Hvis $\Delta T = T_2 - T_1$ ikke er for stor:

$$j \approx 4\sigma T^3 \cdot \Delta T \quad ; \quad T \approx T_1 \approx T_2$$

Uttrykker energibevarelse:



ΔW = arbeid utført av systemet på omgivelsene

ΔQ = varme tilført systemet

$$\Rightarrow \boxed{\Delta Q = \Delta U + \Delta W} \quad \text{evt: } dQ = dU + dW$$

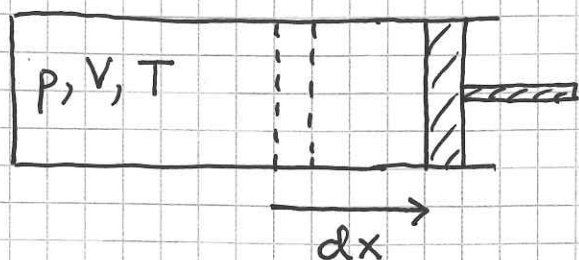
Merk: Q og W er prosessvariable, mens U er en tilstandsfunksjon. dQ og dW er ikke totale differensialer; dU er et totalt differensial.

Hvis f.eks. $U = U(T, V)$:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV$$

Uttrykk som $\partial Q / \partial T$ og $\partial W / \partial V$ gir ingen mening.

Ser på gass som utvider seg mot ytre trykk p :

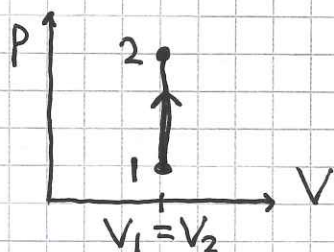


stempel med tverrsnitt A

Arbeid utført av gassen på omgivelsene :

$$dW = F \cdot dx = pA \cdot \frac{dV}{A} = p dV$$

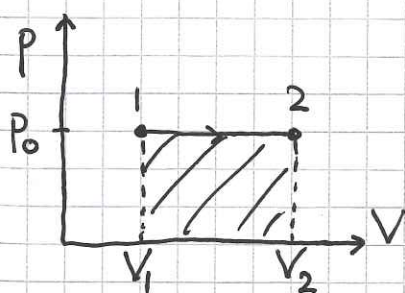
Eks 1: Isokor prosess



$$W=0$$

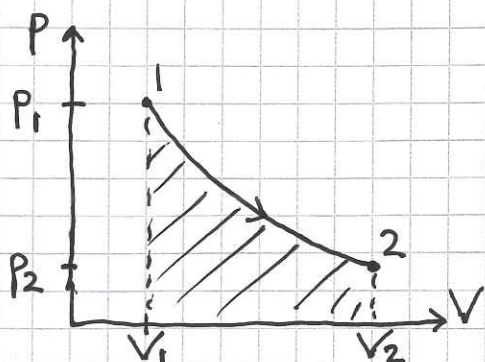
Utført arbeid
tilsvarer
arealet under
kurven $p(V)$

Eks 2: Isobar prosess



$$W = \int_1^2 dW = p_0 \int_{V_1}^{V_2} dV = \underline{p_0 (V_2 - V_1)}$$

Eks 3: Isoterm prosess; ideell gass



$$p(V) = Nk_B T / V$$

$$W = Nk_B T \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \underline{Nk_B T \ln(V_2/V_1)}$$

Indre energi [OS2 3.2; YF 19.4, 19.6; LHL 13.6]

(37)

U = summen av partiklenes kinetiske og potensielle energi

(Inkluderer vanligvis ikke systemets pot. energi Mgh i tyngdefeltet.)

Ideell gass: Ingen vekselvirkning mellom molekylene, dermed ingen potensiell energi

$$\Rightarrow U = N \cdot \langle K \rangle$$

$\langle K \rangle$ = midlere kinetisk energi pr molekyl, kun avhengig av T

$$\Rightarrow \boxed{U = U(T) \text{ for ideell gass}}$$

Atomære gasser (edelgassene He, Ne, ...):

$$\langle K \rangle = \langle K_{\text{trans}} \rangle = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow U = \frac{3}{2} N k_B T$$

Eknipartisjonsprinsippet [OS2 2.3; YF 18.4; LHL 14.2]

Resultatet for $g(v_x)$ s. 15 generaliseres i statistisk mekanikk:

Hvis et bidrag til energifunksjonen opptrer kvadratisk i en av systemets frihetsgrader, dvs på formen

$$E(s) = A \cdot s^2, \quad (A = \text{konstant})$$

er sannsynligheten for å måle en verdi mellom s og $s+ds$

$$dP = g(s) ds = C \cdot \exp(-As^2/k_B T) ds$$

Her fastlegges G med normering av total sannsynlighet,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(s) ds = 1,$$

som gir $G = \sqrt{A/\pi k_B T}$, og dermed et midlere energibidrag

$$\underline{\langle E \rangle} = \int_{-\infty}^{\infty} E(s) g(s) ds = \underline{\frac{1}{2} k_B T}$$

Med andre ord:

Hver frihetsgrad som bidrar kvadratisk i energifunksjonen, gir et bidrag $k_B T/2$ til midlere energi pr partikkel

E.P.P.

EPP gjelder i klassisk fysikk, der vi typisk har kontinuerlige energibidrag, og som er kvadratiske, f.eks. $mv_x^2/2$, $kx^2/2$ osv.

Men kvantemekanikk viser at energibidragene er kvantisert på atomært nivå. Da gjelder ikke EPP lenger, hvis temperaturen T er tilstrekkelig lav.

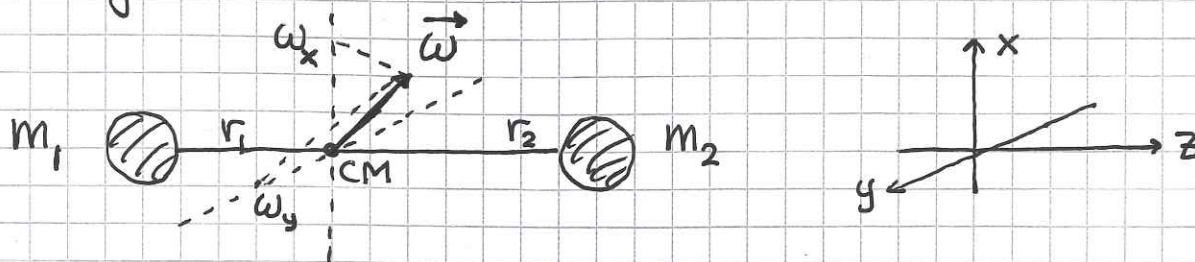
Toatomige gasser [OS2 2.3; YF 18.4; LHL 14.2]

(39)

$$U = \langle K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} + K_{\text{vib}} + E_{\text{vib}}^{\text{pot}} \rangle$$

$$\langle K_{\text{trans}} \rangle = N \cdot \frac{1}{2} m \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle \stackrel{\text{EPP}}{=} \frac{3}{2} N k_B T$$

Rotasjon:



$$I_x = I_y = I_0 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 ; \quad I_z \approx 0$$

$$\Rightarrow \langle K_{\text{rot}} \rangle = N \cdot \frac{1}{2} I_0 \langle \omega_x^2 + \omega_y^2 \rangle \stackrel{\text{EPP}}{=} N \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} k_B T = N k_B T$$

Kvantemekanikk (QM):

K_{rot} er kvantisert, fordi dreieimpulsen er kvantisert,

$$L^2 = |\vec{L}|^2 = l(l+1)\hbar^2 ; \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

$$\hbar = h/2\pi = 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 ; \quad \vec{L} = I_0 \vec{\omega} ; \quad \omega^2 = L^2 / I_0^2$$

$$\Rightarrow K_{\text{rot}}^{(l)} = \frac{L^2}{2 I_0} = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2 I_0} ; \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

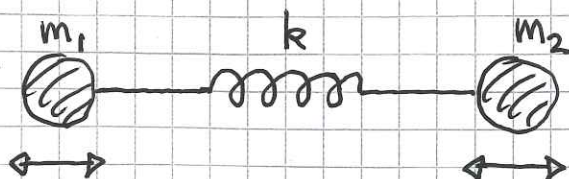
Hvis $T \approx 300\text{K}$, er $k_B T \approx 25 \text{ meV}$, mens vi typisk har $\hbar^2/I_0 \ll k_B T$. (Unntak: H_2)

Dvs, rotasjonsenergiene $0, \hbar^2/I_0, 3\hbar^2/I_0, \dots$ ligger så tett at K_{rot} kan betraktes som en kontinuerlig funksjon (av L ; evt. av ω).

Da er EPP gyldig:

$$\langle K_{\text{rot}} \rangle = 2 \cdot \frac{1}{2} k_B T \cdot N = N k_B T \quad (\text{for lineære molekyler})$$

Vibrasjon:



Harmonisk oscillator (med god tilnærming), med $K_{\text{vib}} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ og $E_{\text{vib}}^{\text{pot}} = \frac{1}{2} k x^2$, dvs 2 kvadratiske energibidrag, så klassisk forventes

$$\langle K_{\text{vib}} \rangle + \langle E_{\text{vib}}^{\text{pot}} \rangle = 2 \cdot \frac{1}{2} k_B T \cdot N = N k_B T$$

for N molekyler.

QM gir: $E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$; $n = 0, 1, 2, \dots$; $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ med avstand $\Delta E = \hbar \omega$ mellom energinivåene.

For 2-atomige molekyler er som regel $\hbar \omega$ stor i forhold til $k_B T$ ved 300 K.

$$E_1 = \frac{3}{2} \hbar \omega$$

For lite termisk energi i systemet til å eksitere molekyler til vibrasjons tilstander med energi større enn E_0 . En liten økning i T hjelper ikke. $E_{\text{vib}} = N \cdot E_0$, uavhengig av T .

$k_B T$

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$$

C_V og C_P for ideell gass [OS2 3.5; YF 18.4; LHL 15.2, 14.2] (41)

1. lov: $dQ = dU + dW = dU + p dV$

Med $V = \text{konst}$: $dW = p dV = 0 \Rightarrow dQ = dU$

$$\Rightarrow C_V = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V = \frac{dU}{dT}$$

Med $p = \text{konst}$: $C_P = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_P = \left(\frac{dU}{dT} \right)_P + p \left(\frac{dV}{dT} \right)_P$

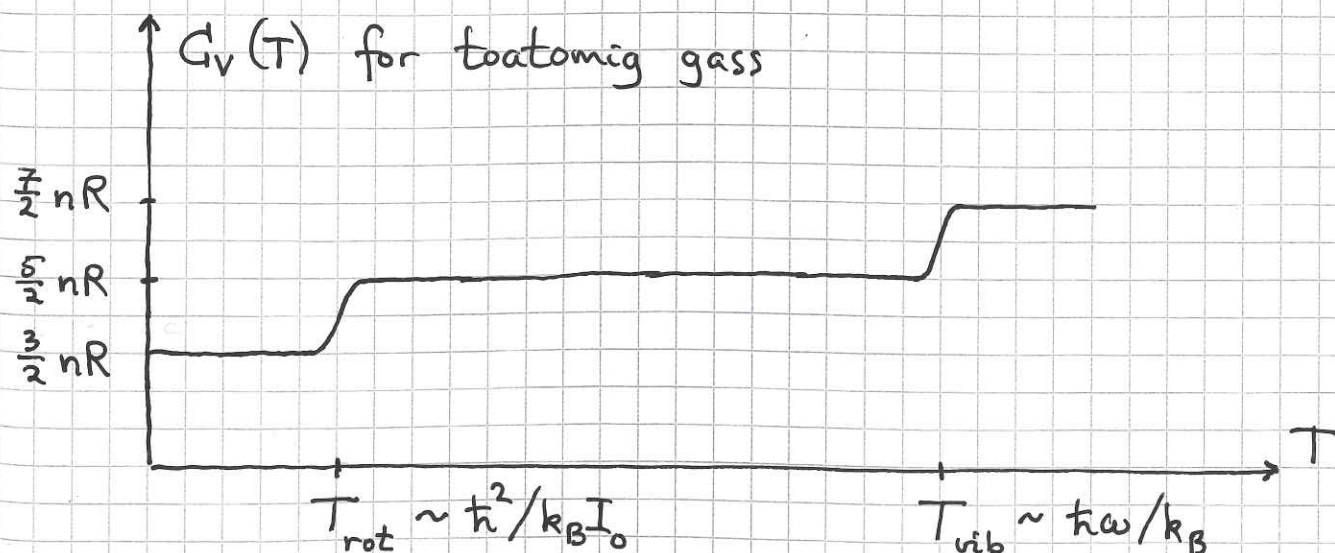
$$= \frac{dU}{dT} + p \left\{ \frac{d}{dT} \left(\frac{Nk_B T}{p} \right) \right\}_P$$

$$= C_V + Nk_B = C_V + nR$$

Hvorfor er $C_P > C_V$? Noe av tilført varme går med til å gjøre arbeid på omgivelsene. Gir mindre endring i indre energi, og dermed mindre endring i T , for gitt tilført varme Q .

Atomær gass: $U = \frac{3}{2} nRT \Rightarrow C_V = \frac{3}{2} nR, C_P = \frac{5}{2} nR$

Toatomig gass: $U = \frac{5}{2} nRT + NE_0 \Rightarrow C_V = \frac{5}{2} nR, C_P = \frac{7}{2} nR$



Adiabatiske prosesser [OS2 3.4, 3.6; YF 19.8; LHL 15.3]

(42)

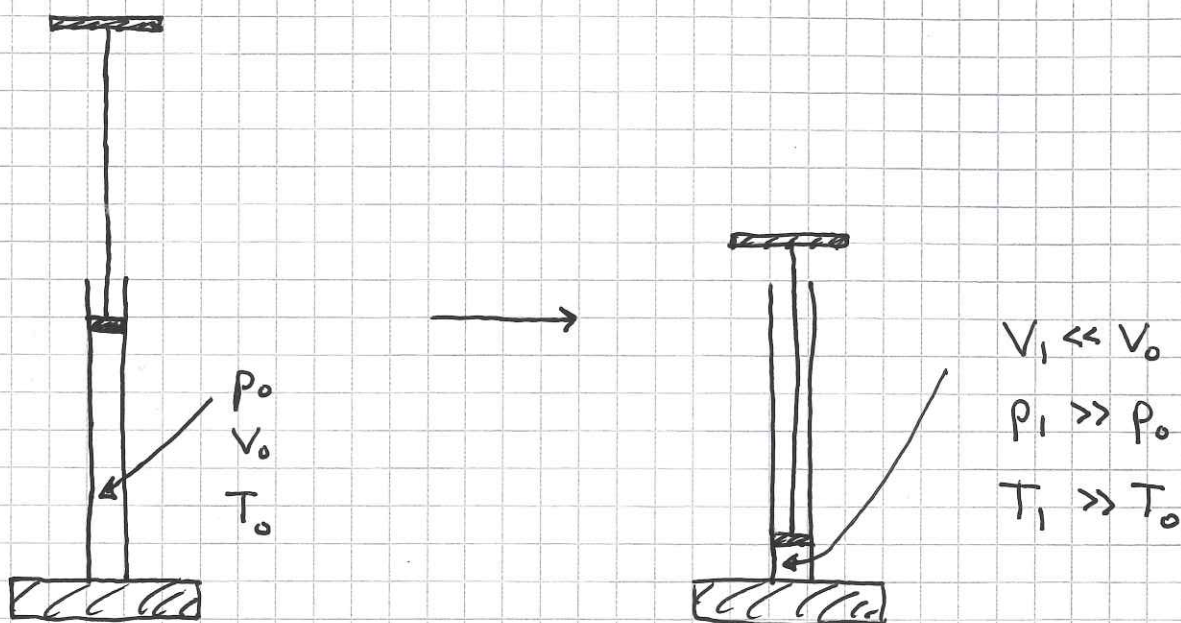
...er prosesser uten tilførsel av varme:

$$\Delta Q = 0 \Rightarrow \Delta U = -\Delta W$$

Varmeoverføring tar endel tid

$\Rightarrow$ Tilstrekkelig raske prosesser er tilnærmet adiabatisk.

Eks: Rask kompresjon av luft (f.eks. sykkelpumpe)



Gjør arbeid på lufta i røret, $\Delta W < 0$

$$\Rightarrow \Delta U > 0 \Rightarrow \Delta T > 0$$

Anta ideell gass:

$$pV = nRT; \quad nR = C_p - C_v; \quad C_v = \frac{dU}{dT}$$

$$dQ = 0 \Rightarrow dW = -dU \Rightarrow p dV = -C_v dT$$

$$\Rightarrow \frac{nRT}{V} dV = -C_v dT \Rightarrow \frac{C_p - C_v}{C_v} (dV/V) = -\frac{dT}{T}$$

Adiabatkonstanten: $\gamma = C_p / C_v > 1$

$$\Rightarrow (\gamma - 1) \frac{QV}{V} + \frac{dT}{T} = 0$$

$$\Rightarrow (\gamma - 1) \ln V + \ln T = \text{konst.}$$

$$\Rightarrow \ln \{ T \cdot V^{\gamma-1} \} = \text{konst.}$$

$$\Rightarrow \boxed{T \cdot V^{\gamma-1} = \text{konst.}}$$

Via eliminasjon av $T = pV/nR$:

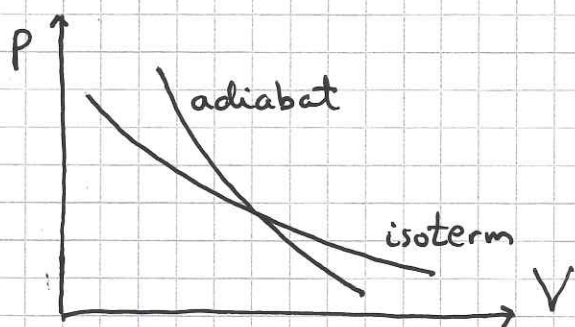
$$\boxed{p \cdot V^{\gamma} = \text{konst.}}$$

Og med eliminasjon av $V = nRT/p$:

$$\boxed{p \cdot T^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \text{konst.}}$$

Adiabat: $p(V) \sim V^{-\gamma}$; Isoterm: $p(V) \sim V^{-1}$

$\Rightarrow$ Adiabat brattere enn isoterm (da $\gamma > 1$)



Atomær gass: $\gamma = \frac{5/2}{3/2} = \frac{5}{3}$

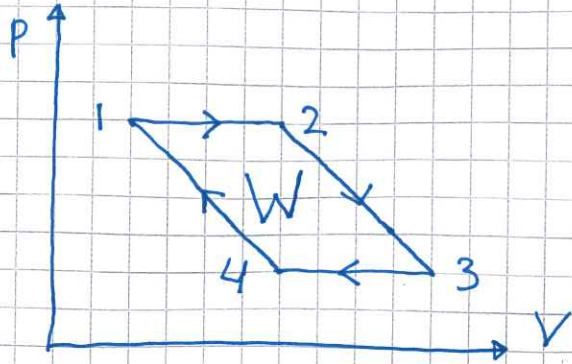
Toatomig gass: $\gamma = \frac{7/2}{5/2} = \frac{7}{5}$

Generelt: $\gamma = (f+2)/f$, der f = antall kvadratiske frihetsgrader ved aktuell temperatur

Luft: Mest toatomige molekyler $\Rightarrow \gamma = 1.4$

Kretsprosesser [OS2 3.4; YF 19.4; LHL 15.1]

(44)



Starttilstand = Slutt-tilstand

$$\Rightarrow \Delta U = 0$$

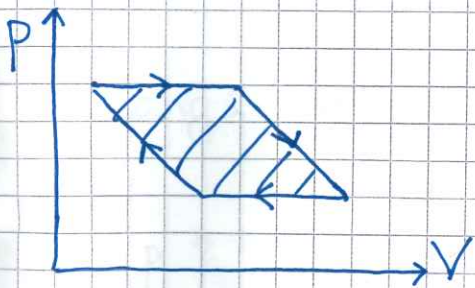
$$\stackrel{\text{1. lov}}{\Rightarrow} (\Delta)Q = (\Delta)W$$

for hver hele syklus

Netto arbeid utført av systemet pr syklus:

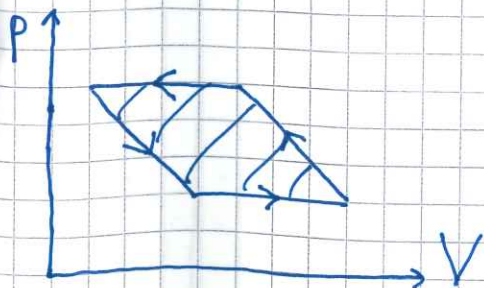
$$W = W_{123} + W_{341} = W_{123} - |W_{341}|$$

= arealet omskuttet av kurven $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$



Varmekraftmaskin; med klokke;
 $W > 0$ (systemet gjør positivt arbeid på omgivelsene); $Q > 0$ (systemet tilføres varme).

Eks: Dieselmotor, bensinmotor

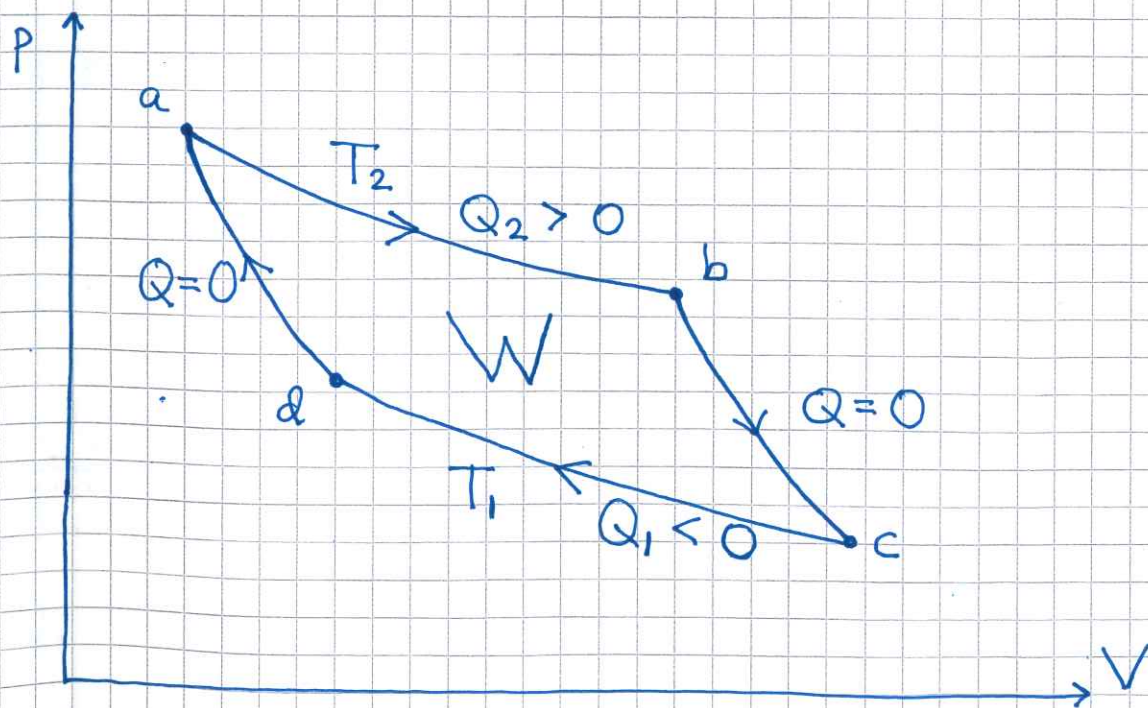


Kjølemaskin / Varmepumpe;
mot klokke; $W < 0$ (det gjøres netto arbeid på systemet);
 $Q < 0$ (systemet overfører netto varme fra område med lav T til område med høy T)

Carnotprosessen [OS2 4.5; YF 20.6; LHL 15.4]

45

- N.L. Sadi Carnot, 1824 : "Reflections on the motive power of fire" ; starten på termodynamikk som vitenskap.
- Carnotprosessen : Kretsprosess som består av 2 isotermer og 2 adiabater.
- Idealisert reversibel prosess der varme utveksles mellom system og omgivelser (varmereservoar) med infinitesimale temperaturforskjeller, $\Delta T \approx 0$.
- Vi antar her ideell gass som arbeidssubstans :
 $pV = nRT$; $U = U(T)$; $T \cdot V^{\gamma-1} = \text{konstant}$
langs adiabatene ($\gamma = C_p / C_v$)



Virkningsgrad:

$$\eta = \frac{\text{nytte}}{\text{kostnad}}$$

(46)

Varmekraftmaskin (kretsprosess med klokke; $W > 0$):

$$\left. \begin{array}{l} \text{nytte} = \text{netto utført arbeid} = W \\ \text{kostnad} = \text{tilført varme} = Q_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \eta = W/Q_2$$

$$\text{Pr syklus: } \Delta U = 0 \Rightarrow W = Q_2 + Q_1 \quad (1.\text{lov})$$

$$\Rightarrow \eta_c = \frac{Q_2 + Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{|Q_1|}{Q_2} < 1$$

$$U = U(T) \Rightarrow \Delta U_{ab} = \Delta U_{cd} = 0 \quad (\text{isotermer})$$

$$\Rightarrow Q_2 = W_{ab} = \int_{V_a}^{V_b} p(V) dV = nRT_2 \ln \frac{V_b}{V_a}$$

$$Q_1 = W_{cd} = \dots = nRT_1 \ln \frac{V_d}{V_c} = -nRT_1 \ln \frac{V_c}{V_d}$$

Langs adiabatene:

$$T_2 V_b^{\gamma-1} = T_1 V_c^{\gamma-1}$$

$$T_2 V_a^{\gamma-1} = T_1 V_d^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow \frac{T_2 V_b^{\gamma-1}}{T_2 V_a^{\gamma-1}} = \frac{T_1 V_c^{\gamma-1}}{T_1 V_d^{\gamma-1}} \Rightarrow \frac{V_b}{V_a} = \frac{V_c}{V_d}$$

$$\Rightarrow Q_1 = -nRT_1 \ln \frac{V_b}{V_a} = -\frac{T_1}{T_2} Q_2$$

$$\Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = -\frac{T_1}{T_2} \quad (\text{evt: } \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0)$$

Dermed:

$$\eta_c = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Carnotprosessen
virkningsgrad

(47)

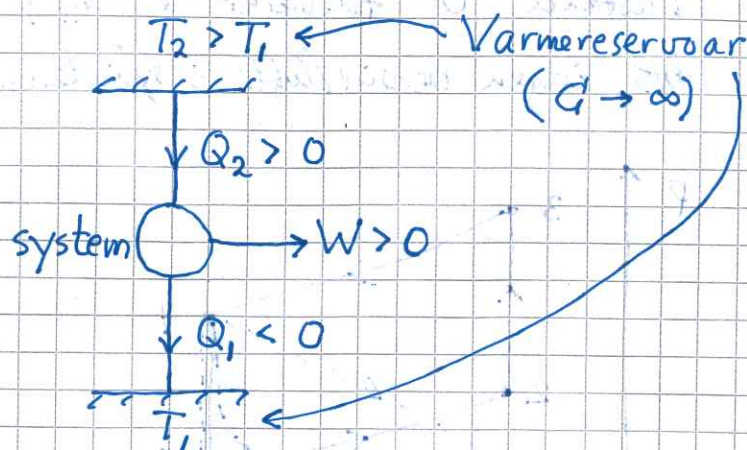
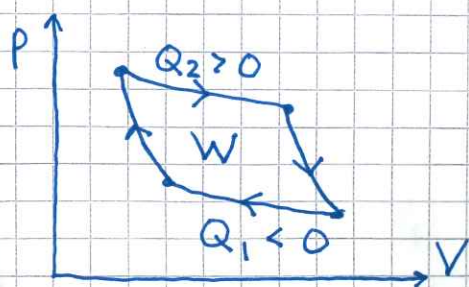
Dette er max. teoretisk virkningsgrad for reversible kretsprosesser. (Bevises senere.)

Alle reelle varmekraftmaskiner har $\eta < \eta_c$.

Varmekraft- og kjølemaskiner

[OS2 4.2+3; YF 20.2+3+4+6;
LHL 16.3+4]

Varmekraftmaskin:

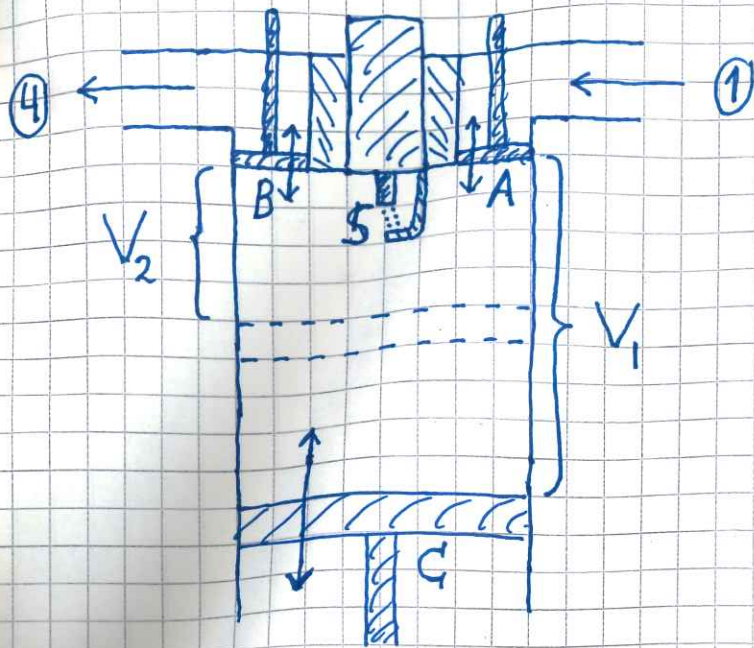


Kostnad: Varmer Q_2 tilført ved (høy) temp. T_2 , evt. ved diverse temperaturer (dersom det ikke er en Carnotmaskin)

Nytte: Netto utført arbeid W

Virkningsgrad: $\eta = W/Q_2 < \eta_c = 1 - T_1/T_2$

Noe varme Q_1 må avgis ved (lav) temp. T_1 , evt. ved diverse temp. (dersom ikke Carnotmaskin)



- 1: Luft/bensin-blanding inn i cylinderen ved høyt trykk og cylindervolum V_1 (ventil A åpen, B lukket)
- 1-2: Rask (adiabatisk) kompresjon (stempel C opp) til volum V_2 (med A og B lukket)
- 2-3: Antennning med gnist (S) fra tennpluggen ved volum V_2 ; stor økning i p og T (A og B lukket)
- 3-4: Adiabatisk utvidelse fra V_2 til V_1 ; stempel C skyves ned, og med kobling til veirakselen drives hjulene på bilen rundt (A og B lukket)
- 4-1: Eksos ut (B åpen, A lukket) ved volum V_1 ; stor reduksjon i p og T

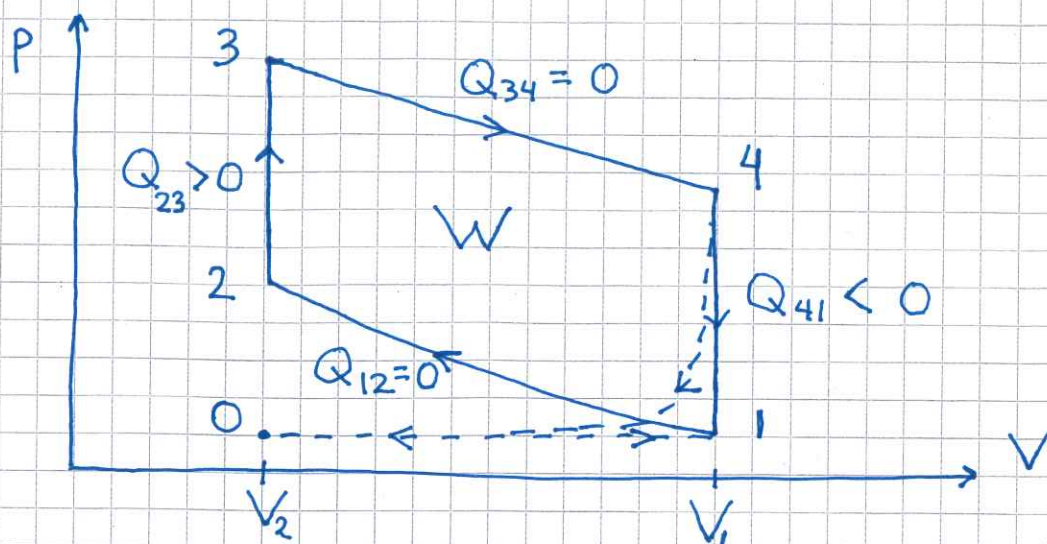
Egentlig, for 4-taktsmotor:

4-0: Eksos ut, $V_1 \rightarrow V_2$, B åpen, A lukket

0-1: Luft/bensin inn, $V_2 \rightarrow V_1$, A åpen, B lukket

Med 2-taktsmotor: Eksos ut og luft/bensin inn samtidig.

Idealisert Otto-syklus i pV -diagram :



Kjemisk energi i bensinen $\rightarrow$ varme $Q_{23} > 0$

Varm eksos ut, kald luft/bensin inn : $Q_{41} < 0$

Netto arbeid pr syklus:

$$W = W_{34} + W_{12} = W_{34} - |W_{12}|$$

$$\Delta U = 0 \text{ samt 1. lov : } W = Q_{23} + Q_{41} = Q_{23} - |Q_{41}|$$

$$\text{Her er : } Q_{23} = C_V (T_3 - T_2) , \quad Q_{41} = C_V (T_1 - T_4)$$

Virkningsgraden blir da :

$$\eta_0 = W / Q_{23} = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

$$= 1 - \frac{T_4}{T_3} \cdot \frac{1 - T_1/T_4}{1 - T_2/T_3}$$

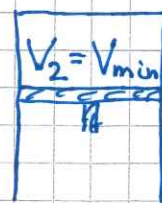
Både $1 \rightarrow 2$ og $3 \rightarrow 4$ er adiabater :

$$\left. \begin{array}{l} T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \\ \text{og } T_4 V_1^{\gamma-1} = T_3 V_2^{\gamma-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{T_1}{T_4} = \frac{T_2}{T_3} \left\{ \Rightarrow \eta_0 = 1 - \frac{T_4}{T_3} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{og } \frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} \end{array} \right\} \Rightarrow \eta_0 = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1}$$

Motorens kompresjonsforhold : $\mathcal{H} = \frac{V_1}{V_2} > 1$

dus
$$\eta_o = 1 - \mathcal{H}^{1-\gamma}$$



Her er $T_3 = T_{\max}$, men $T_4 > T_1 = T_{\min}$

$\Rightarrow \eta_o < 1 - T_{\min}/T_{\max} = \eta_c$ dersom all varme mottas ved $T_{\max}$ og all varme avgis ved $T_{\min}$; da ville det ha vært en Carnotmaskin!

I Ottosyklusen mottas varme ved alle temp. mellom T_2 og T_3 , og varme avgis ved alle temp. mellom T_4 og T_1 .

Hvis dette skal gjøres reversibelt, dvs hele tiden med null temp.forskjell mellom system og varmereservoar, må vi ha uendelig mange varmereservoar, ett for hver T mellom T_2 og T_3 , og ett for hver T mellom T_4 og T_1 .

Ikke gjennomførbart, selvsagt. I praksis blir en slik prosess irreversibel

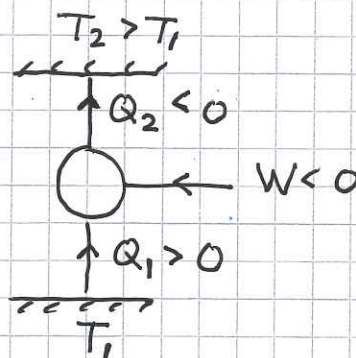
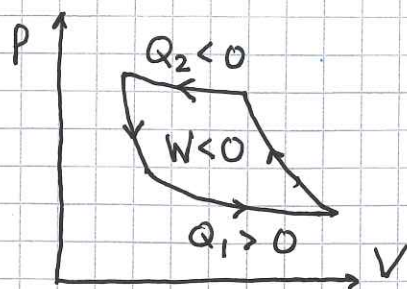
[Dieselmotor og idealisert diesel-syklus :

Se s. 153 fra høst 2018; ikke pensum i 2019.

Luft komprimeres til et mindre sylindervolum V_2 , og dermed en høyere temp. T_2 , enn i en bensinmotor.

Diesel sprøytes inn i sylinderen og antennes, uten behov for gnist fra en tennplugg. Det høye kompresjonsforholdet V_1/V_2 gir i praksis virkn.grad η_D større enn η_o for en bensinmotor.]

Kjøleskap / varmepumpe:



Kostnad: $|W|$

Nytte: Q_1 ut av kjøleskapet, eller $|Q_2|$ inn i stua

System: Sirkulerende kjølemedium som vekselvis fordampes og kondenserer i kretsprosessen.

Effektfaktor / virkningsgrad / COP (coefficient of performance):

Kjøleskap: $\varepsilon_K = |Q_1 / W|$

Varmepumpe: $\varepsilon_V = |Q_2 / W|$

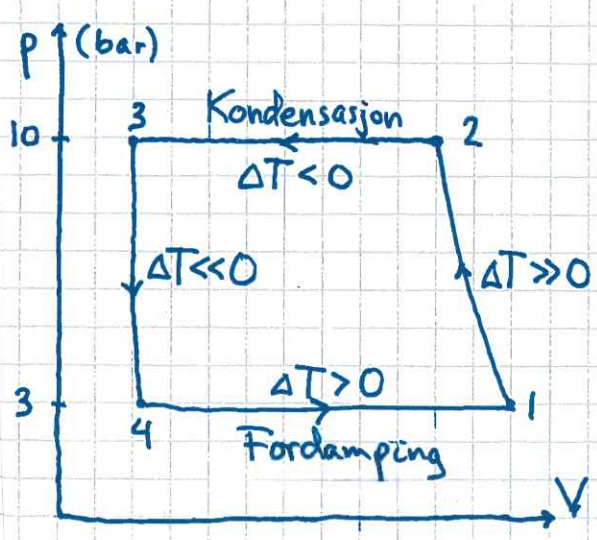
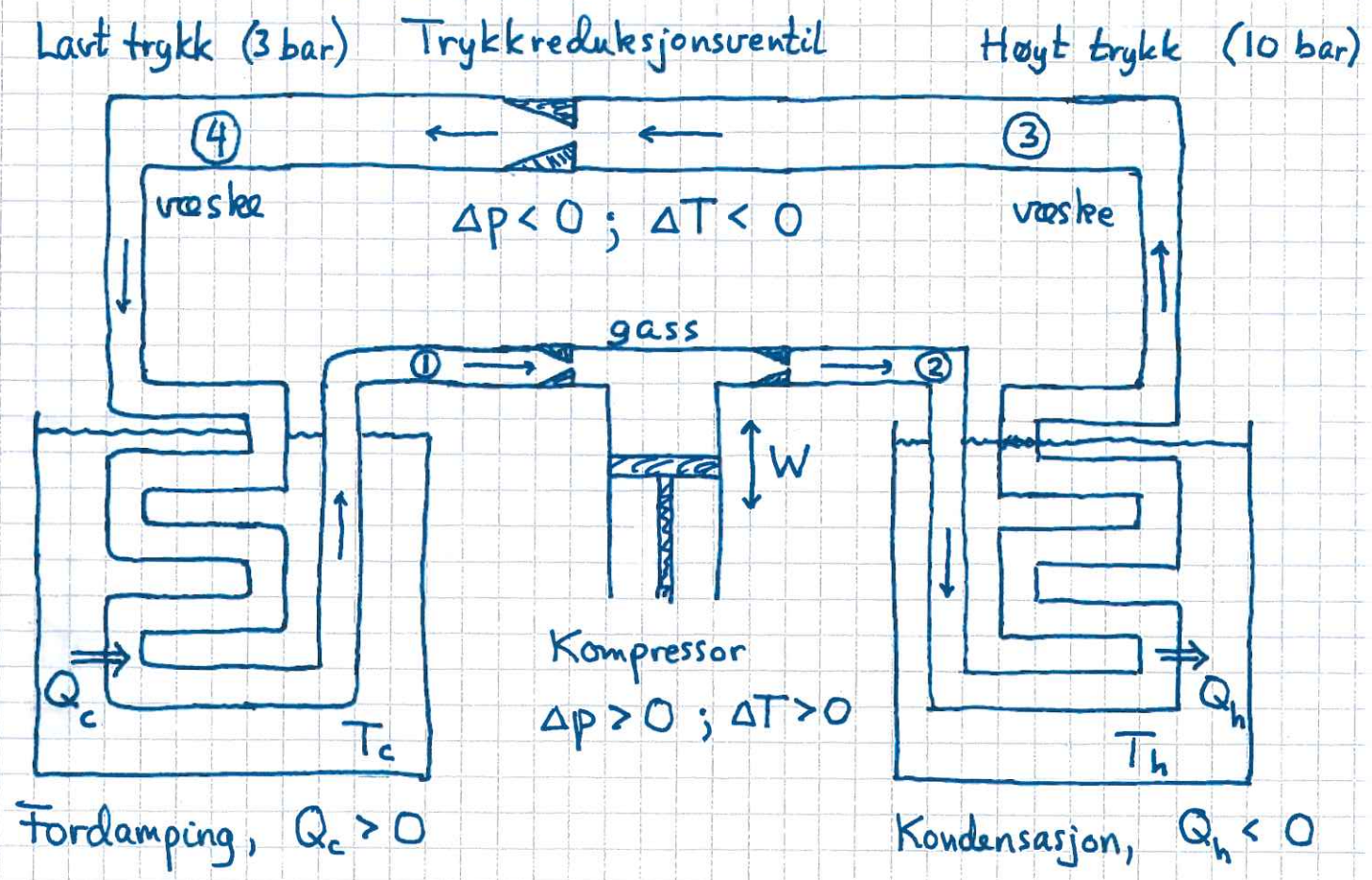
Teoretiske maxverdier med rev. Carnotprosess:

$$\varepsilon_K^c = \left| \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2} \right| = \frac{T_1}{T_2 - T_1} > 0$$

$$\varepsilon_V^c = \left| \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2} \right| = \frac{T_2}{T_2 - T_1} > 1$$

Eks 3: Kjøleskap / varmepumpe

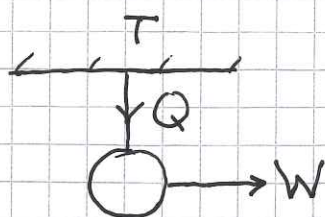
Systemet er et sirkulerende kjølemedium som vekselvis fordampner og kondenserer i kretsprosessen. Latent varme tilføres systemet inne i kjøleskapet, $L_f > 0$, eller avgis fra systemet til stuelufta, $-L_f < 0$.



Kjølemedier:		GWP
R12	$\text{C Cl}_2 \text{ F}_2$	10900
R134a	$\text{C}_2 \text{ H}_2 \text{ F}_4$	1430
R600a	$\text{C}_4 \text{ H}_{10}$	3
R744	CO_2	1

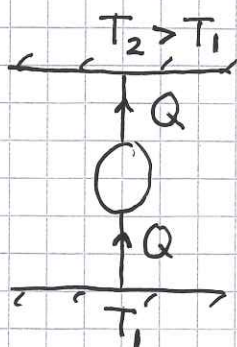
GWP: Global Warming Potential

Termodynamikkens 2. lov [OS2 4; YF 20; LHL 16,17]



er ikke mulig

Kelvin: Ikke mulig å lage en kretsprosess som omdanner all tilført varme Q til nyttig arbeid W

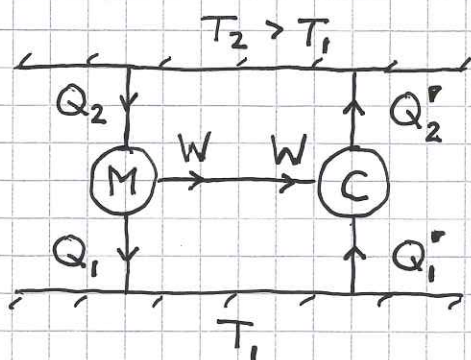


er ikke mulig

Clausius: Ikke mulig å lage en kretsprosess der eneste resultat er at varme Q overføres fra et varmereservoar med temp. T_1 til et varmeres. med temp. $T_2 > T_1$

To ekvivalente formuleringer av 2. lov, basert på erfaring.

Carnots teorem [OS2 4; YF 20.6; LHL 16.2]



Reell maskin M driver en reversibel Carnot-kjølemaskin C .
Nettoeffekt: Kun overføring av varme mellom reservoar 1 og 2.

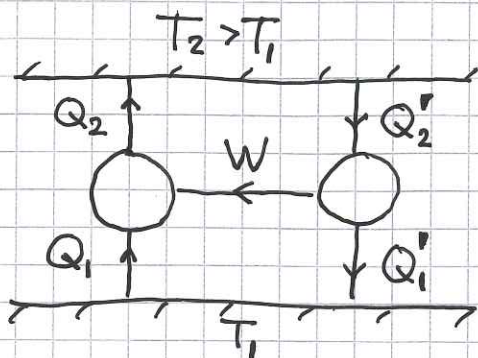
$$2. \text{ lov (Clausius) : } |Q_2| \geq |Q_2'|$$

$$\Rightarrow \eta_M = |W/Q_2| \leq |W/Q_2'| = \eta_C$$

$\Rightarrow$ Den reversible Carnot-maskinen har optimal virkningsgrad!

Anta deretter at M og C begge er reversible

Carnot-maskiner, med hhv vilkårlig arbeidssubstans (M) og ideell gass som arbeidssubstans (C):



2. lov (Clausius): $|Q_2'| \geq |Q_2|$

$$\Rightarrow \eta_M \geq \eta_C$$

Førrige side: $\eta_M \leq \eta_C$

$$\eta_M = \eta_C$$

Dvs:

Enhver reversibel Carnot-maskin har optimal virkningsgrad,

$$\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2},$$

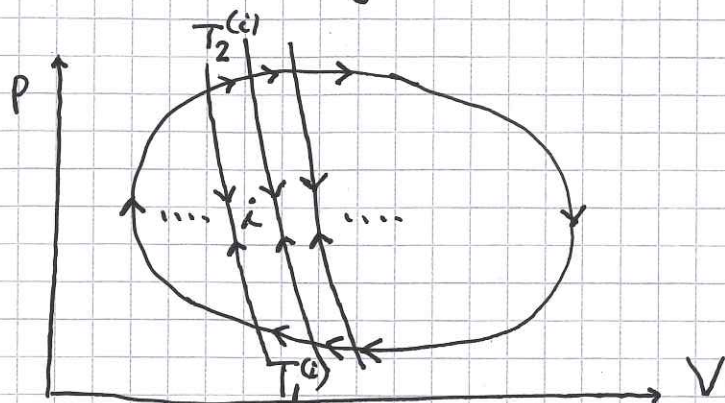
uavhengig av typen arbeidssubstans.

(Carnots teorem)

Entropi [OS2 4.6, 4.7; YF 20.7; LHL 17.1, 17.3] (55)

For reversibel Carnotprosess: $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$

En vilkårlig reversibel kretsprosess kan oppfattes som en sum av mange små Carnotprosesser:



$$\sum_i \left\{ \frac{Q_1^{(i)}}{T_1^{(i)}} + \frac{Q_2^{(i)}}{T_2^{(i)}} \right\} = 0$$

Alle indre adiabatene kjøres opp og ned og gir intet bidrag

$$\Rightarrow \oint \frac{dQ}{T} = 0 \quad \text{for den vilkårlige (ytre) kretsprosessen}$$

$\Rightarrow$ Da er størrelsen $\frac{dQ}{T}$ endringen i en tilstandsfunksjon som vi kaller entropi, med symbol S :

$$\boxed{dS = \frac{dQ}{T} ; \oint dS = 0 ; [S] = \text{J/K}}$$

Den termodynamiske identitet:

Med $dW = p dV$ og $dQ = T dS$ blir 1. lov for reversible prosesser

$$T dS = dU + p dV$$

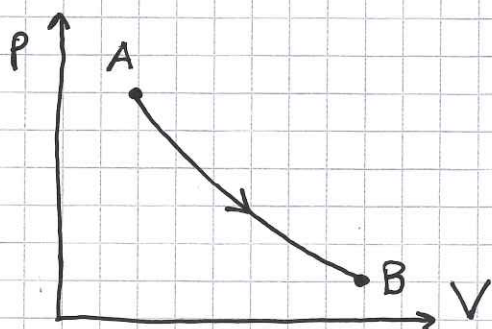
Her inngår bare tilstandsfunksjoner!

Isentropisk prosess:

Reversibel og adiabatisk.

$$\Rightarrow dQ = 0 \quad (\text{adiabat}) \quad \text{og} \quad dS = dQ/T \quad (\text{reversibel})$$

$$\Rightarrow dS = 0$$



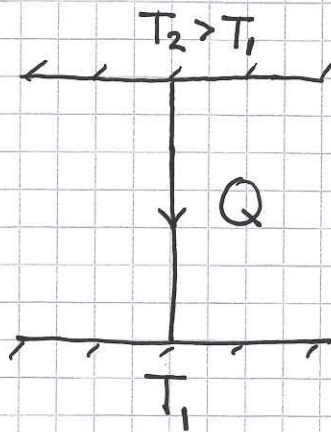
$$\Delta S = \int_{S_A}^{S_B} dS = S_B - S_A = 0$$

$$\underline{S_B = S_A}$$

Prinsippet om entropiens økning:

Den totale entropien øker alltid i spontane (irreversible) prosesser

Eks: Irreversibel varmeoverføring mellom to varmereservoar



$$\Delta S_2 = -Q/T_2 < 0$$

$$\Delta S_1 = Q/T_1 > 0$$

$$\Delta S_{\text{total}} = \Delta S_1 + \Delta S_2 > 0$$

Eks: Kald kaffe

2.5 dL kaffe avkjøles fra 80°C til 20°C i et rom (= varmereservoar) der temp. er 20°C.

- Hva er kaffens C_v ? ($\Delta V \approx 0$)
- Hvor mye varme overføres fra kaffen til lufta?
- Hva er ΔS , for lufta, kaffen, og totalt?

Løsning:

$$(a) \text{ Kaffe} \approx \text{Vann} \Rightarrow C_v \approx 4.2 \frac{\text{J}}{\text{g} \cdot \text{K}} \cdot 250 \text{ g} = \underline{1050 \text{ J/K}}$$

$$(b) Q = C_v \Delta T = 1050 \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 60 \text{ K} = \underline{63 \text{ kJ}}$$

$$(c) \Delta S_{\text{luft}} = Q/T_{\text{luft}} = 63 \text{ kJ} / 293 \text{ K} = \underline{215 \text{ J/K}} \quad (58)$$

Aukjøling av kaffen er irreversibel, men S er en tilstandsfunksjon, så ΔS_{kaffe} kan beregnes for en tenkt reversibel prosess fra start- til slutt-tilstand.

$$\Delta V = 0 \Rightarrow W = 0 \Rightarrow dQ = dU = C_V dT$$

$$\Rightarrow dS_{\text{kaffe}} = dQ/T = C_V dT/T$$

$$\Rightarrow \Delta S_{\text{kaffe}} = C_V \int_{353}^{293} \frac{dT}{T} = C_V \ln \frac{293}{353} = \underline{-196 \text{ J/K}}$$

$$\Delta S_{\text{total}} = \Delta S_{\text{luft}} + \Delta S_{\text{kaffe}} = \underline{\underline{19 \text{ J/K}}}$$

Boltzmanns mikroskopiske beskrivelse av entropi

[ØS/2 YF 20.8 ; LHL 17.11]

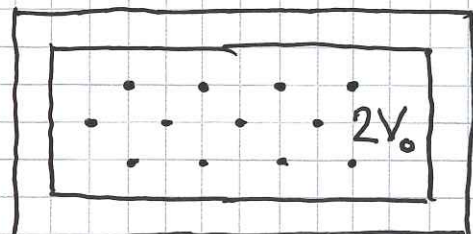
$$S = k_B \ln \Omega$$

Ω = antall mikrotilstander som alle er konsistente med den gitte makrotilstand

Eks: Irrev. utvidelse av ideell gass i varmeisoleret boks



Veggen fjernes



ΔS med termodynamikk:

$\Delta W = 0$ (gassen gjør ikke arbeid) og $\Delta Q = 0$, slik at $\Delta U = 0$, dvs $\Delta T = 0$ (ideell gass, $U = U(T)$).

Her er $\Delta S \neq \Delta Q/T$ da prosessen er irreversibel.

Beregn ΔS for reversibel isoterm utvidelse:

$$T dS = dU + p dV \stackrel{dU=0}{=} p dV = N k_B T dV/V$$

$$\Rightarrow \Delta S = \int dS = N k_B \int_{V_0}^{2V_0} \frac{dV}{V} = \underline{\underline{N k_B \ln 2}}$$

ΔS med Boltzmann:

Vi tenker oss V_0 inndelt i et stort antall (M) ørsmå delvolum (ΔV): $V_0 = M \cdot \Delta V$

Hvert molekyl har da hhv M og $2M$ mulige posisjoner før og etter utvidelsen.

$$\Rightarrow \Omega_{\text{før}} = M \cdot M \cdot M \cdot \dots \cdot M = M^N$$

$$\Omega_{\text{etter}} = 2M \cdot 2M \cdot 2M \cdot \dots \cdot 2M = (2M)^N$$

$\Rightarrow$

$$\Delta S = S_{\text{etter}} - S_{\text{før}}$$

$$= k_B \ln (2M)^N - k_B \ln M^N$$

$$= k_B \ln 2^N$$

$$= \underline{\underline{N k_B \ln 2}}$$

Faselikevekt, Gibbs fri energi, Clapeyrons ligning, damptrykk-kurver og relativ luftfuktighet [LHL 17.10]

Likevekt mellom to faser når molekyler kan gå fra fase 1 til fase 2 (og omvendt) uten at trykk eller temp. endres:

$$dp = 0 \quad \text{og} \quad dT = 0$$

Da endres ikke Gibbs fri energi

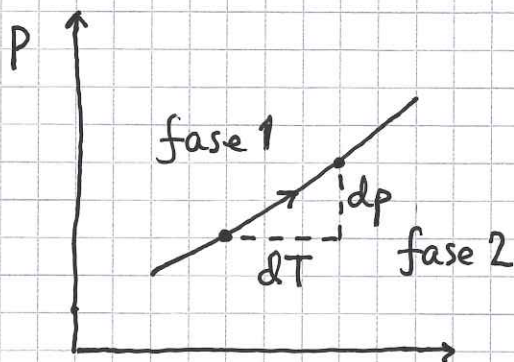
$$G = U + pV - TS$$

da

$$dG = \underbrace{dU + p dV - T dS}_{= 0 \text{ (1. lov)}} + V dp - S dT = 0$$

når $dp = dT = 0$.

Langs koeksistenslinjer må da G endre seg like mye for de to fasene som er i likevekt:

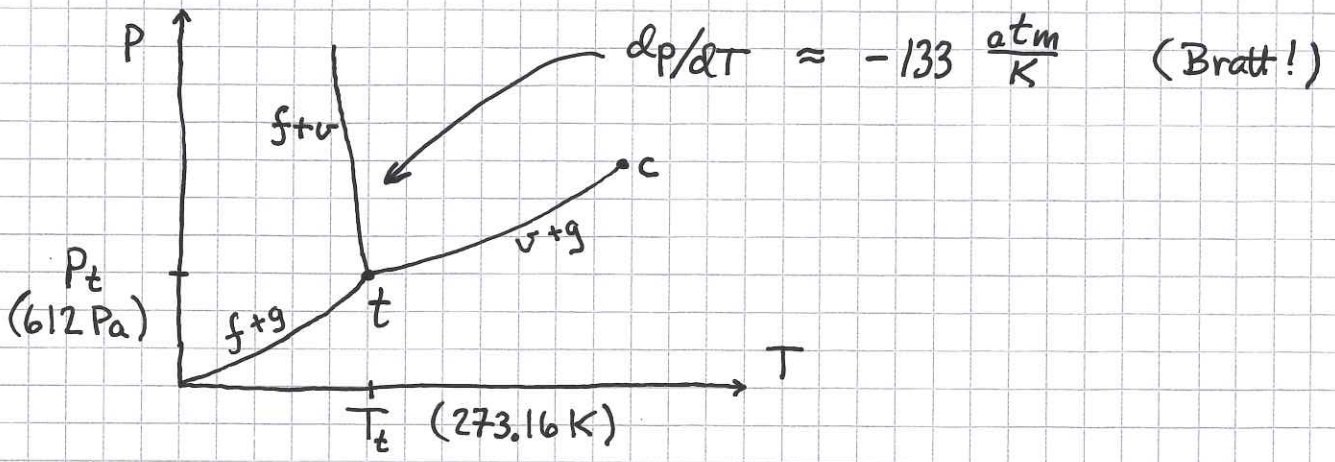


$$\begin{aligned} dG_1 &= dG_2 \\ \Downarrow \\ V_1 dp - S_1 dT &= V_2 dp - S_2 dT \\ \Downarrow \\ (V_1 - V_2) dp &= (S_1 - S_2) dT \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dT} = \frac{S_1 - S_2}{V_1 - V_2} = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{L}{T \Delta V}} \quad \text{Clapeyrons ligning}$$

L = faseovergangens latente varme

Eks: Smelting av is. Ved 0°C er $\rho(\text{is}) = 0.9167 \text{ kg/L}$
og $\rho(\text{vann}) = 0.9998 \text{ kg/L} \Rightarrow \Delta V = V_v - V_f < 0$ mens
 $T > 0$ og $L_{sm} > 0 \Rightarrow dp/dT < 0$ for is/vann-koeksistenslinjen



For sublimasjon ($f+g$) og fordamping ($v+g$):

$$\Delta V \approx V_g \quad \text{fordi} \quad V_g \gg V_f, V_v$$

Antar ideell gass: $V_g = nRT/p$

Antar at molar latent varme $l = L/n$ er uavhengig av T

Kan da beregne damptrykk-kurvene $P_d(T)$, dvs
maksimalt partialtrykk fra H_2O i luft ved temp. T .

Betegnes også som metningstrykket.

Kan f.eks. velge trippelpunktet som referanse; der er

$$P_d = P_t \approx 612 \text{ Pa} \quad \text{og} \quad T_t = 273.16 \text{ K:}$$

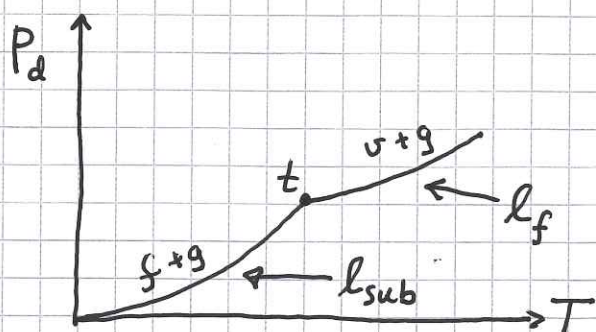
$$\frac{dP_d}{dT} = \frac{L}{T \Delta V} = \frac{n l}{T \cdot nRT/P_d} = \frac{l}{R} \cdot \frac{P_d}{T^2}$$

$$\Rightarrow \int_{P_t}^{P_d} \frac{dP_d}{P_d} = \frac{l}{R} \int_{T_t}^T \frac{dT}{T^2} \Rightarrow \ln\left\{\frac{P_d}{P_t}\right\} = -\frac{l}{R} \left\{\frac{1}{T} - \frac{1}{T_t}\right\}$$

$$\Rightarrow P_d(T) = P_t \cdot \exp \left\{ \frac{l}{R} \left(\frac{1}{T_t} - \frac{1}{T} \right) \right\}$$

Damptrykk-
kurvene

(62)



$$T > T_t : l_f \approx 45 \text{ kJ/mol}$$

$$T < T_t : l_{sub} \approx 51 \text{ kJ/mol}$$

$$(T \rightarrow T_c : l_f \rightarrow 0)$$

Relativ luftfuktighet (= RH = relative humidity) :

Luft mettet med vanndamp : $P_{H_2O} = P_d$; $RH = \phi = 100\%$

$$\text{Hvis } P_{H_2O} < P_d : \phi = 100\% \cdot P_{H_2O} / P_d$$

Da kan ϕ økes ved å fordampe mer vann.

Hvis $P_{H_2O} > P_d$: Da må vanndamp kondensere (evt deponere til is) inntil $\phi = 100\%$. Gir skyer, tåke, kondens.

Ekse: Lufting om vinteren.

Anta at utelufta har $RH = 100\%$ ved $+3^\circ\text{C}$ og bringes innendørs og varmes opp til $+22^\circ\text{C}$.

(a) Hva blir nå RH inne?

(b) Hvor mye vann må fordampe for å gi $RH = 50\%$ i et rom på 20 m^2 (og normal takhøyde)?

Løsning:

(63)

$$(a) RH = p_{H_2O}(295) / p_d(295) = p_d(276) / p_d(295) \\ = \exp \left\{ \frac{\ell_f}{R} \left(\frac{1}{T_t} - \frac{1}{276} - \frac{1}{T_t} + \frac{1}{295} \right) \right\} \approx 0.28 = 28\%$$

(b) Må øke vanddampens partialtryk med

$$\Delta p = (0.50 - 0.28) \cdot p_d(295) \\ = 0.22 \cdot 612 \text{ Pa} \cdot \exp \left\{ \frac{\ell_f}{R} \left(\frac{1}{T_t} - \frac{1}{295} \right) \right\} \approx 584 \text{ Pa}$$

$$V = 20 \text{ m}^2 \cdot 2.4 \text{ m} = 48 \text{ m}^3$$

$$\Rightarrow \Delta n = \Delta p \cdot V / RT = 584 \cdot 48 / 8.314 \cdot 295 = 11.4 \text{ mol}$$

$$\Rightarrow \text{en vandmængde } \Delta m = 11.4 \text{ mol} \cdot 18 \text{ g/mol} = 206 \text{ g} \\ \text{dvs ca } 2 \text{ dL}$$