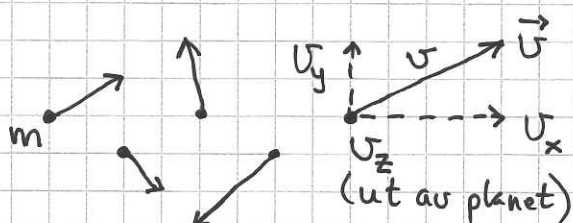


Maxwells hastighetsfordeling [OS2 2.4; YF 18.5; LHL 14.3]

(13)

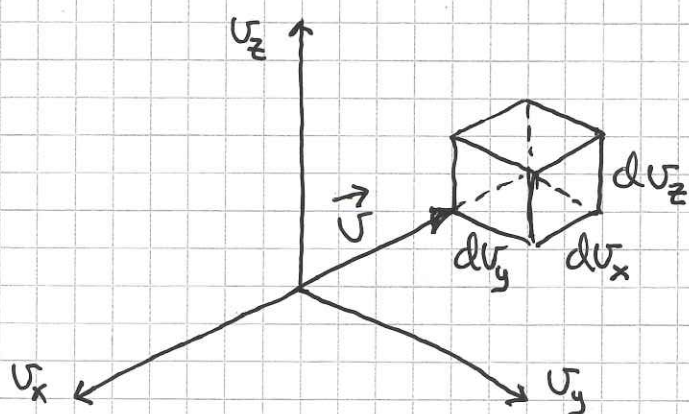


$$v = |\vec{v}|$$

$g(v_x) dv_x$ = sannsynligheten for at et tilfeldig valgt molekyl har x-komponenten av $\vec{v}$ mellom v_x og $v_x + dv_x$;
ders $g(v_x)$ = sanns. pr "fartsintervall", med enhet $(m/s)^{-1}$

$F(\vec{v}) dv_x dv_y dv_z \equiv F(\vec{v}) d^3v =$ sanns. for hastighet mellom $\vec{v}$ og $\vec{v} + d\vec{v}$, ders liten "boks" i $\vec{v}$ -rommet med volum $d^3v = dv_x dv_y dv_z$

$$[F] = (m/s)^{-3}$$



$f(v) dv =$ sanns. for $|\vec{v}|$ mellom v og $v + dv$

$$[f] = (m/s)^{-1}$$

Antagelser:

- Isotropi : $g(v_x) = g(-v_x)$ og $F(\vec{v}) = F(v)$
- Uavhengige komponenter : en måling av f.eks. v_x gir ingen informasjon om v_y eller v_z

Da er

(14)

$$F(v) d^3v = [g(v_x) dv_x] \cdot [g(v_y) dv_y] \cdot [g(v_z) dv_z]$$

dvs $F(v) = g(v_x) \cdot g(v_y) \cdot g(v_z)$

Eneste mulige løsning er: $g(v_x) = \exp(a - bv_x^2)$

slik at $F(v) = \exp(3a - bv^2)$; $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$

Total sannsynlighet er 1:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} g(v_x) dv_x = e^a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bv_x^2} dv_x = e^a \cdot I_0$$

"Tricks": $I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-by^2} dy$

$$\Rightarrow I_0^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b(x^2+y^2)} dx dy$$

som i polarkoordinater blir $(x^2+y^2=r^2 ; dx dy = dr \cdot r d\phi)$:

$$I_0^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-br^2} r dr d\phi = 2\pi \cdot \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{2b} e^{-br^2}\right) = \frac{\pi}{b}$$

dvs: $I_0 = \sqrt{\pi/b}$

Dermed: $e^a = \sqrt{b/\pi}$ og $g(v_x) = \sqrt{\frac{b}{\pi}} e^{-bv_x^2}$

Fra s. 12: $\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle = \frac{1}{3} \cdot \frac{3k_B T}{m} = \frac{k_B T}{m}$

Dvs: $\frac{k_B T}{m} = \langle v_x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 g(v_x) dv_x = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-bv_x^2} dv_x$

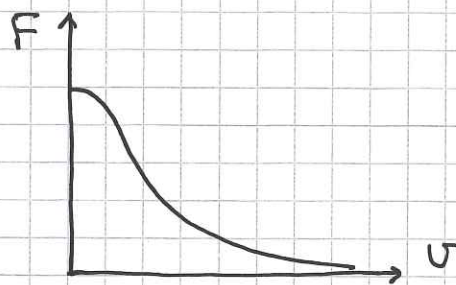
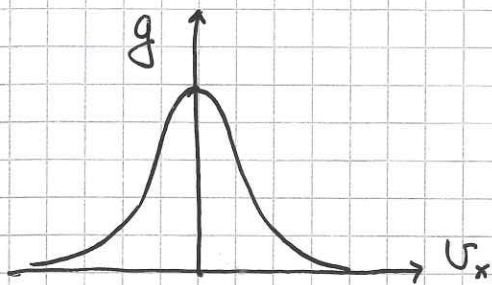
"Tricks": $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-bx^2} dx = -\frac{d}{db} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx^2} dx \right\}$
 $= -\frac{d}{db} I_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} b^{-3/2}$

Dermed: $\frac{k_B T}{m} = \sqrt{\frac{b}{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot b^{-3/2} = \frac{1}{2b}$ ~~Wahrscheinlichkeitsdichte~~ (15)

$$\Rightarrow b = \frac{m}{2k_B T}$$

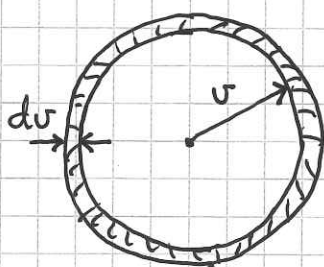
$$\Rightarrow g(v_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp(-mv_x^2/2k_B T)$$

$$\Rightarrow F(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp(-mv^2/2k_B T)$$



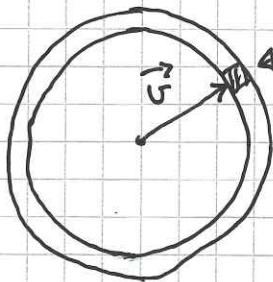
($v = |\vec{v}|$)

$f(v)dv$ = andel molekyler med $|\vec{v}|$ i $(v, v+dv)$:



← kuleskall med volum $4\pi v^2 \cdot dv$

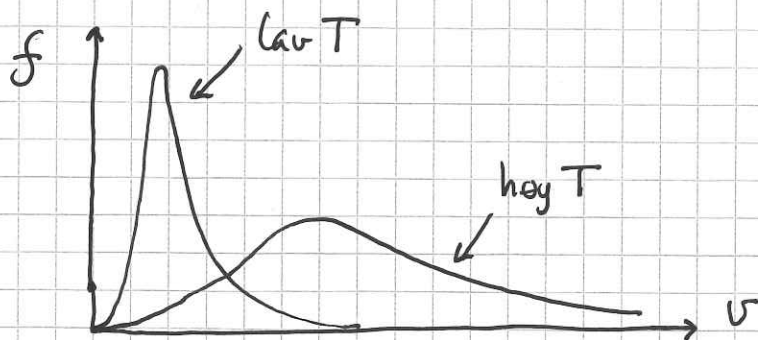
$F(v)d^3v$ = andel molekyler med $\vec{v}$ i $(\vec{v}, \vec{v}+d\vec{v})$:



← d^3v = liten del av kuleskallet ovenfor

Da må vi ha $F(v) \cdot 4\pi v^2 dv = f(v)dv$, og dermed

$$f(v) = F(v) \cdot 4\pi v^2 = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 \exp(-mv^2/2k_B T)$$



Noen eksempler:

- $\langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0$ pga symmetri
- $\langle v^2 \rangle = 3k_B T / m$; $v_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3k_B T / m}$
- $\langle v \rangle = \int_0^\infty v f(v) dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-mv^2/2k_B T} dv$

Her er

$$\begin{aligned} \int_0^\infty v^3 e^{-bv^2} dv &= -\frac{d}{db} \int_0^\infty v e^{-bv^2} dv \\ &= -\frac{d}{db} \left(\frac{1}{2b} \right) = \frac{1}{2b^2} \end{aligned}$$

slik at

$$\langle v \rangle = \sqrt{8k_B T / \pi m}$$

$$\langle \vec{v} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{v} F(\vec{v}) dv_x dv_y dv_z = 0$$

- Lydbølgers hastighet i en gass: $v_{lyd} = \sqrt{\gamma k_B T / m}$

Her er γ gassens adiabatkonstant (mer om denne senere);

for luft er $\gamma = 1.4$, midlere molekylmasse er ca

$(0.029 \text{ kg/mol}) / (6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}) \approx 4.8 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$, slik at ved

20°C ($\approx 293 \text{ K}$) er $v_{lyd} \approx 343 \text{ m/s}$. ($v_{lyd} < \langle v \rangle < v_{rms}$)

Termodynamiske koeffisienter [OS 2 1.3; YF 17.4; LHL 13.2]

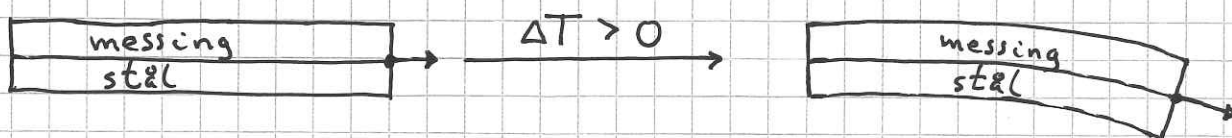
(17)

- Lineær utvidelseskoeffisient, for faste stoffer:

$$\alpha = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta L / L}{\Delta T} \right\}_{p = \text{konst.}} = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_p$$

Eks: $\alpha = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ for stål og $1.8 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ for messing

Bimetalltermometer:



- Volumutvidelseskoeffisient:

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

Eks 1: For faste stoffer er $\beta = 3\alpha$, siden $V = L^3$

Eks 2: $\beta \approx 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ for etanol og ca $2.7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ for glass; dermed stiger spritsøylen med økende T

Eks 3: Pga en svært "åpen" krystallstruktur har is lavere massetetthet enn kaldt vann. Vann har størst massetetthet ved $+4^\circ\text{C}$. Med andre ord, $\beta < 0$ for vann mellom 0°C og $+4^\circ\text{C}$.

Dette hindrer innsjøer & bunnfryse om vinteren:

Vann med $T = 4^\circ\text{C}$ synker til bunns, overflaten fryser til is og hindrer (bremser) varmeoverføring fra vannet til den kalde lufta over isen.

- Kompressibilitet og bulkmodul:

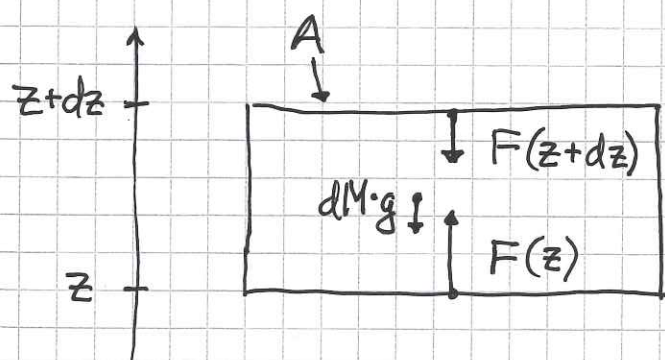
$$\kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \text{isoterm kompressibilitet}$$

$$B = 1/\kappa = \text{isoterm bulkmodul}$$

Væsker og faste stoffer har mye mindre verdier for κ enn gasser; væsker og faste stoffer er med god tilnærming inkompressible.

Trykk - eksempler:

Eks 1: Hvordan avtar p med høyden over havet?



← Luftmasse:

$$dM = \rho \cdot dV = \rho A dz$$

ρ = massetetthet

dM i likevekt når $\sum \vec{F} = 0$:

$$F(z) = F(z+dz) + dM \cdot g$$

$$\Rightarrow p(z) \cdot A = p(z+dz) \cdot A + \rho g dz \cdot A$$

$$\Rightarrow dp = p(z+dz) - p(z) = -\rho g dz$$

Hvis væske med konstant ρ : $p(z) = p(0) - \rho g z$; dvs p øker lineært nedover i væsken.

Ideell gasslov gir

$$\rho = \frac{\langle m \rangle \cdot N}{V} = \frac{\langle m \rangle \cdot p}{k_B T}$$

For luft er midlere molekylmasse

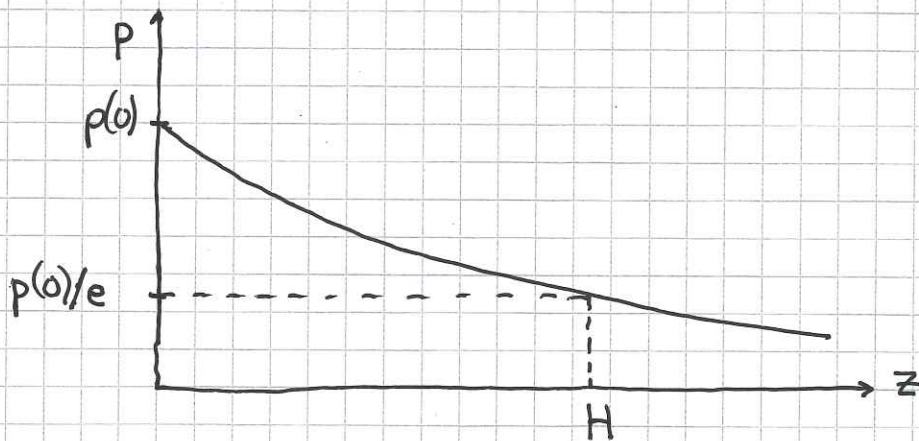
$$\begin{aligned} \langle m \rangle &\approx (29 \text{ g/mol}) / (6.02 \cdot 10^{23} \text{ molekyler/mol}) \\ &\approx 4.8 \cdot 10^{-26} \text{ kg pr molekyl} \end{aligned}$$

Dermed:

$$\int_{p(0)}^{p(z)} \frac{dp}{p} = - \int_0^z \frac{\langle m \rangle g}{k_B T} dz$$

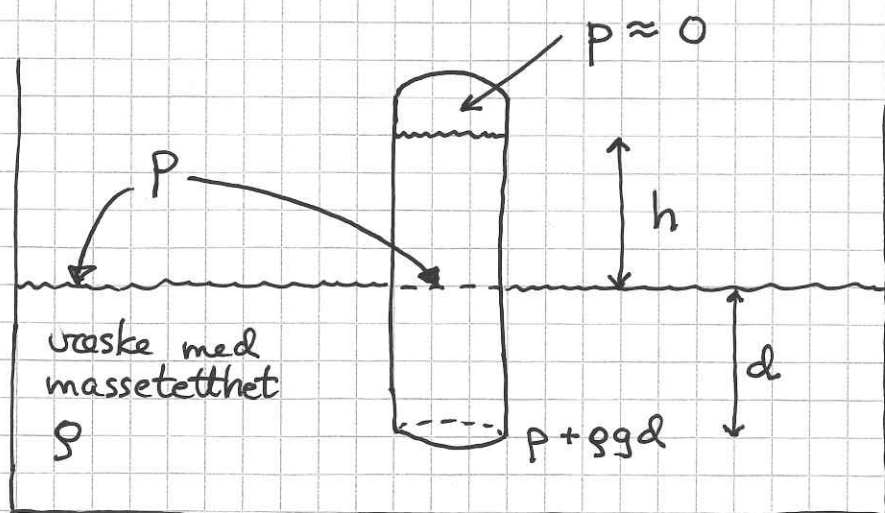
For z opptil noen km kan vi anta konstant g , samt en midlere $T \approx 260 \text{ K}$:

$$p(z) = p(0) \exp(-z/H) ; \quad H = \frac{k_B T}{\langle m \rangle g} \approx 7.6 \text{ km}$$



Øving 8: Atmosfæren på Mars

Eks 2: Barometeret



Med $p = 0$ over væskesøylen inni røret blir

$$p = \rho g h$$

lufttrykket på utsiden. (Mens $p = \rho g (h + d)$ i dybden d under væskeoverflaten.)

Med kvikksølv (Hg):

$$\rho = 13.6 \text{ g/cm}^3 \Rightarrow p = 1 \text{ atm} \text{ tilsvarer } h = 760 \text{ mm Hg}$$

Med vann:

$$\rho = 1 \text{ g/cm}^3 \Rightarrow p = 1 \text{ atm} \text{ tilsvarer } h \approx 10 \text{ m vann}$$

Dvs: Max høydeforskjell mellom brønnen og hytta er 10 m dersom det benyttes en sugepumpe inni hytta. Med større høydeforskjell må du installere en trykkpumpe nede i brønnen.

Varme. Varmekapasitet [OS2 1.4; YF 17.5; LHL 13.2] (21)

Varme $\stackrel{\text{def}}{=}$ energi overført pga temperaturforskjell

Arbeid = andre former for energioverføring

Varmekapasitet $\stackrel{\text{def}}{=}$ tilført varme pr grad temperaturøkning

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}} \quad [C] = \text{J/K}$$

Varmereservoar: System som kan angi eller motta varme uten at T endres. Dvs $C \rightarrow \infty$.

Man måler gjerne C med p eller V holdt konstant:

$$C_p = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_p ; \quad C_v = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_v$$

Molar varmekapasitet: $C_m = C/n$ (J/mol·K)

Varmekap. pr masseenh. $c = C/M$ (J/kg·K)

Kalorier:

1 cal øker T fra 14.5°C til 15.5°C i

1 g vann ved trykk 1 atm.

$$1 \text{ cal} = 4.184 \text{ J}$$

$$1 \text{ kcal/mol} \approx 6.95 \cdot 10^{-21} \text{ J pr molekyl} \\ \approx 43 \text{ meV pr molekyl}$$

$$1 \text{ eV} (= 1 \text{ elektronvolt}) = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$