TFY4115 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til øving 11.

1) I et system med temperatur T og mulige (tillatte) energinivåer E_j ($j = 1, 2, 3, \ldots$) er sannsynligheten for at en gitt partikkel har energi E_j lik

$$P_j = \frac{1}{Z}\, e^{-E_j/k_B T},$$

med

$$Z = \sum_j e^{-E_j/k_B T},$$

slik at total sannsynlighet blir normert. Med de to tillatte energiverdiene $\pm E_0$ blir

$$Z = e^{E_0/k_B T} + e^{-E_0/k_B T} = 2\cosh(E_0/k_B T),$$

slik at sannsynligheten for at en gitt partikkel har energi E_0 blir

$$P_+ = \exp(-E_0/k_B T)/[2\cosh(E_0/k_B T)],$$

dvs rett svar blir **A**.
(Og sannsynligheten for energi $-E_0$ blir

$$P_- = \exp(E_0/k_B T)/[2\cosh(E_0/k_B T)].)$$

2) Midlere energi pr partikkel er

$$\langle E\rangle = \sum_j E_j\, P_j = \frac{-E_0\exp(E_0/k_BT) + E_0\exp(-E_0/k_BT)}{2\cosh(E_0/k_BT)} = -E_0\,\frac{2\sinh(E_0/k_BT)}{2\cosh(E_0/k_BT)} = -E_0\,\tanh(E_0/k_BT).$$

Med N partikler blir dermed systemets indre energi

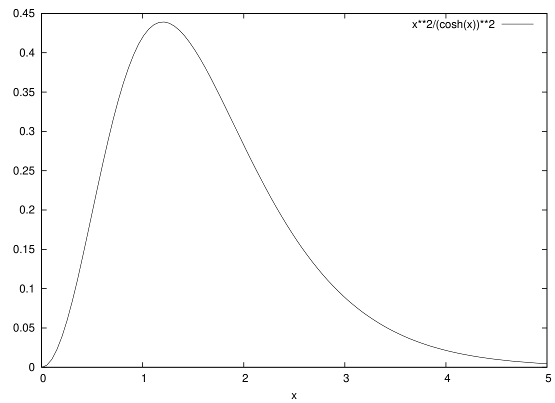
$$U = N\cdot\langle E\rangle = -NE_0\tanh(E_0/k_BT),$$

og rett svar er **D**.

3) For lave temperaturer, dvs $k_BT \ll 2E_0$, er det for lite tilgjengelig termisk energi til å eksitere partikler fra tilstanden med energi $-E_0$ (grunntilstanden) til tilstanden med energi E_0. Da hjelper det ikke å øke temperaturen litt, fra T til $T + \Delta T$, dvs indre energi forandrer seg likevel ikke. Dette betyr at varmekapasiteten $C = \Delta U/\Delta T$ er null for lave temperaturer. Dermed kan vi utelukke alternativene B og D.
For riktig *høye* temperaturer, dvs $k_BT \gg 2E_0$, må også varmekapasiteten være tilnærmet lik null. Da er sannsynlighetene π_- og π_+ for at en gitt partikkel har energi hhv $-E_0$ og E_0 like store (dvs begge lik 1/2), og midlere energi pr partikkel er lik null. En økning i temperaturen, fra T til $T + \Delta T$, vil ikke endre på dette - det er fortsatt like stor sannsynlighet for begge energier, og indre energi forandres ikke.
Med $C \to 0$ både for $T \to 0$ og for $T \to \infty$ må C ha et maksimum for en eller annen verdi av temperaturen, og kurve **C** må være den riktige. Maksimal C har vi når termisk energi k_BT er omtrent lik E_0. Da får vi "best betalt" for å øke temperaturen littegrann.
Det er ingen heksekunst å regne ut varmekapasiteten,

$$C = \frac{dU}{dT} = Nk_B\,\frac{(E_0/k_BT)^2}{\cosh^2(E_0/k_BT)},$$

med $d(\tanh x)/dx = 1/\cosh^2 x$ samt kjerneregel $d(E_0/k_BT)/dT = -E_0/k_BT^2$. Plotter vi funksjonen $x^2/\cosh^2 x$, ser vi at maksimum er ved $x \simeq 1.2$:



Kommentarer: Hva skal en slik leketøysmodell være godt for, kan en kanskje spørre seg. Modellen har faktisk betydelig relevans: Den representerer første steg på vei mot en beskrivelse og forståelse av magnetiske egenskaper til ulike materialer. I mange (men ikke alle) materialer har atomene et såkalt *spinn* eller *magnetisk dipolmoment*, som i et ytre magnetfelt nettopp vil gi et av to mulige bidrag til systemets indre energi. Modellen i oppgave 1 - 3, med uavhengige partikler, er direkte relevant for *paramagnetiske* materialer, som f.eks. aluminium og magnesium. Utvider vi modellen og inkluderer vekselvirkning mellom partiklene, blir den i stand til å beskrive *ferromagnetiske* materialer, som f.eks. jern, kobolt og nikkel.

4) Virkningsgraden til Carnot-varmepumpa er

$$\varepsilon_V^c = |Q_2|/|W| = |Q_2|/(|Q_2| - |Q_1|) = T_2/(T_2 - T_1) = 303/40,$$

så den forbruker

$$|W| = |Q_2|/\varepsilon_V^c = 2.0 \cdot 40/303 \simeq 0.26,$$

dvs 0.26 kW elektrisk energi (effekt). **A**.

5) Dreieimpulsen er kvantisert, $L^2 = l(l+1)\hbar^2$, med $l = 0, 1, 2, \ldots$ og $\hbar = h/2\pi$ Plancks ("reduserte") konstant. Overgangstemperaturen $T_{\rm rot}$ blir dermed omvendt proporsjonal med molekylets treghetsmoment I, som stiger i rekkefølgen H_2 – HCl – Cl_2. Dvs, $T_{\rm rot}$ *avtar* i denne rekkefølgen. **B**.
Omtrentlige verdier for $T_{\rm rot}$ er hhv 88, 15 og 0.4 K for disse tre molekylene.

6) Se forelesningene. **C**.

7) **A**. $W = p_0 V_0 = 8 \cdot 1.01 \cdot 10^5 \cdot 7 \cdot 10^{-3} = 5.7$ kJ.

8) $T_4 < T_1 = T_3 < T_2$. **C**.

9) Vi kjenner verken n eller T. **A**.

10) For kretsprosess "mot klokka" er $\Delta Q < 0$. **B**.

11) For ideell gass er T proporsjonal med $\langle K \rangle$. **B**.

12) Kombinasjonen $TV^{\gamma-1}$ er konstant. Her er $\gamma = 5/3$. Dermed er

$$T = T_0(V_0/V_1)^{2/3} = 300 \cdot (1/3)^{2/3} = 144 \text{ K}$$

A.