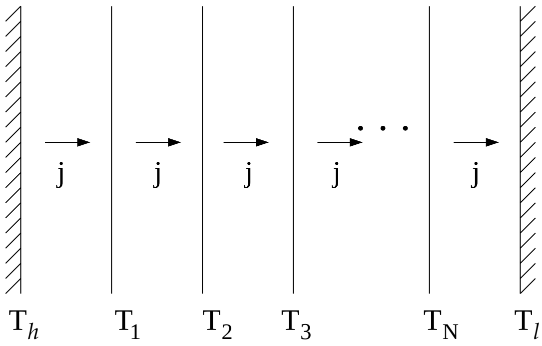
FY1005/TFY4165 Termisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Våren 2013.

Løsningsforslag til øving 12

Oppgave 1



Ved stasjonære forhold er varmestrømmen j mellom skjoldene den samme overalt. Med Stefan-Boltzmanns lov er netto varmestrøm pr flateenhet i

$$\begin{aligned}
1.\,\text{intervall}: \quad j &= \sigma(T_h^4 - T_1^4) \\
2.\,\text{intervall}: \quad j &= \sigma(T_1^4 - T_2^4) \\
\ldots & \\
N.\,\text{intervall}: \quad j &= \sigma(T_{N-1}^4 - T_N^4) \\
\text{siste intervall}: \quad j &= \sigma(T_N^4 - T_l^4)
\end{aligned}$$

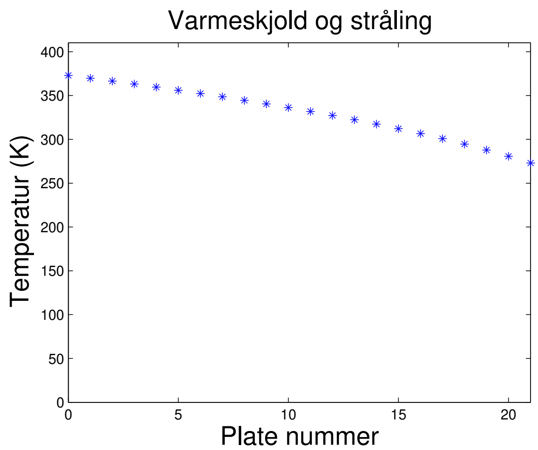
De mellomliggende ukjente temperaturer kan nå elimineres ved å legge sammen disse $N+1$ ligningene:

$$(N+1)j = \sigma(T_h^4 - T_l^4) = j_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{j}{j_0} = \frac{1}{N+1},$$

der j_0 er varmestrømmen uten skjold. Kommentar: Temperaturen på skjoldene kan nå bestemmes ved å addere de k første intervallene. Dette gir $kj = \sigma(T_h^4 - T_k^4)$, eller $T_k^4 = T_h^4 - kj/\sigma$, som innsatt for j gir

$$T_k = \left[\frac{(N+1-k)T_h^4 + kT_l^4}{N+1}\right]^{1/4}.$$

Med $N = 20$ skjold og $T_h = 373$ K og $T_l = 273$ K:



Oppgave 2

For å bestemme molbrøken x_1 som funksjon av tida beregner vi først partikkeltallene. Partikkelstrømtettheten er i forelesningene funnet å være $j = n\langle v\rangle/4$, der $n = N/V$ er partikkeltettheten, og

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

De to komponentene kan betraktes hver for seg. Endring av partikkeltallet N_1 av komponent 1 inne i volumet V i løpet av tida dt er

$$dN_1 = -jAdt = -\frac{1}{4}\frac{N_1}{V}\langle v_1\rangle Adt = -\alpha_1 N_1 dt,$$

der

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}\frac{A}{V}\langle v_1\rangle = \frac{A}{V}\sqrt{\frac{kT}{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{m_1}}.$$

Løsningen blir

$$\begin{aligned}\frac{dN_1}{N_1} &= -\alpha_1 dt \\ \ln N_1 &= -\alpha_1 t + \text{ konst} \\ N_1 &= N_1(t) = N_{01}e^{-\alpha_1 t},\end{aligned}$$

med $N_1(0) = N_{01}$. Tilsvarende finer vi for komponent 2:

$$N_2 = N_2(t) = N_{02}e^{-\alpha_2 t}.$$

Molbrøken av komponent 1 inne i beholderen blir følgelig

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \frac{N_1}{N_1+N_2} = \frac{N_{01}e^{-\alpha_1 t}}{N_{01}e^{-\alpha_1 t} + N_{02}e^{-\alpha_2 t}} \\ &= \frac{N_{01}/(N_{01}+N_{02})}{N_{01}/(N_{01}+N_{02}) + N_{02}e^{-ct}/(N_{01}+N_{02})} = \frac{x_1^0}{x_1^0 + (1-x_1^0)e^{-ct}}.\end{aligned}$$

Her er

$$c = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{A}{V}\sqrt{\frac{kT}{2\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{m_2}} - \frac{1}{\sqrt{m_1}}\right).$$

Vi ser at den tunge komponenten anrikes inne i beholderen siden det som strømmer ut har relativt mer av den lette komponenten. Forholdet mellom antall partikler som strømmer ut, av den ene og den andre typen, blir (da $x_2 = 1 - x_1$)

$$\left(\frac{\text{tunge}}{\text{lette}}\right)_{\text{ut}} = \left(\frac{j_1}{j_2}\right)_{\text{ut}} = \frac{\langle v_1\rangle N_1}{\langle v_2\rangle N_2} = \frac{\alpha_1 N_1}{\alpha_2 N_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\frac{N_1}{N_2}.$$

Denne brøken er minimal ved $t = 0$. Etter hvert som tida går, blir det en økende andel av de tunge isotopene inne i beholderen, slik at j_1/j_2 gradvis øker. ($N_1/N_2 \sim \exp(ct)$)

Oppgave 3

Så lenge bare en liten del av overflaten er dekket med oksygenatomer, kan en for enkelhets skyld anta at alle oksygenatomer treffer en ren metallflate. Antall atomer som treffer arealet A i løpet av et tidsrom τ er da

$$N = jA\tau = \frac{1}{4}n\langle v\rangle A\tau.$$

Med en diameter $d = 2.3$ Å vil N partikler dekke arealet $\pi d^2 N/4$. For å dekke $1/10$ av arealet A blir tiden τ følgelig bestemt av

$$\begin{aligned} \frac{1}{10}A &= \frac{1}{4}\pi d^2 \cdot \frac{1}{4}n\langle v\rangle A\tau \\ \tau &= \frac{8}{5\pi d^2 n\langle v\rangle}. \end{aligned}$$

Videre har en så

$$\begin{aligned} p &= \frac{N}{V}kT = nkT \\ n &= \frac{p}{kT} \\ \text{og}\quad v &= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \end{aligned}$$

Følgelig finner vi ved å sette inn:

$$\tau = \frac{2}{5d^2 p}\sqrt{2mkT/\pi} = 6.7\ \text{s} \simeq 7\ \text{s}$$

når $m = 32\cdot 1.66\cdot 10^{-27}$ kg, $d = 2.3\cdot 10^{-10}$ m, $p = 10^{-7}\cdot 1.013\cdot 10^5/760$ Pa, $T = 300$ K og $k = 1.38\cdot 10^{-23}$ J/K settes inn. Vi ser at tida som trengs for å dekke et visst areal vil være omvendt proporsjonal med trykket. Eksperiment i løpet av tida $\tau_1 = 3600$ s innenfor gitt toleransegrense begrenser da trykket oppad til

$$p_1 = p\tau/\tau_1 = 10^{-7}\cdot 6.7/3600\ \text{torr}\ \simeq 2\cdot 10^{-10}\ \text{torr}.$$

Dette klassifiseres som ultra-høy-vakuum.

Oppgave 4

For diffusjon av partikler fant vi at diffusjonslengden r går som kvadratroten av tida t, dvs $r \sim \sqrt{t}$. Det samme må da gjelde for varmetransport som beskrives ved samme differensialligning. Når lengdedimensjoner endres med en faktor a, vil følgelig tidsforløp endres med en faktor a^2 for systemer med samme form. [Dvs: Differensialligningen forblir uendret dersom nye variable $t' = t/a^2$ og $r' = r/a$ innføres og samme grensebetingelser brukes.] Når tyngden, og dermed volumet til potetene endres med en faktor $v = 2$, vil lengder endres med en faktor $a = v^{1/3} = 2^{1/3}$. Tida endres derfor med faktoren $\tau = a^2 = 2^{2/3} = 1.59$. Så med dobbelt så tunge poteter endres koketida til 25 minutter $\cdot\tau \simeq 40$ minutter.