

Løsningsforslag til øving 3

Oppgave 1

I løpet av et tidsrom dt mottar motstanden energimengden $P dt$. All den elektriske energien dissiperes inne i motstanden, som dermed varmes opp ("Joule heating"), dvs $dQ = P dt$. Samtidig er $dQ = C_p dT$, slik at

$$C_p = P \frac{dt}{dT} = \frac{P}{dT/dt}.$$

Derivasjon av den oppgitte $T(t)$ gir

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T_0 a}{4[1 + a(t - t_0)]^{3/4}} = \frac{T_0^4 a/4}{T_0^3 [1 + a(t - t_0)]^{3/4}} = \frac{T_0 a}{4} \frac{T_0^3}{T^3},$$

slik at varmekapasiteten, som funksjon av temperaturen, blir

$$C_p = \frac{4P}{aT_0} \left(\frac{T}{T_0} \right)^3,$$

dvs proporsjonal med T^3 . (Som er typisk temperaturavhengighet til varmekapasiteten for faste stoffer, ved forholdsvis lave temperaturer. Dette får du høre mer om i dette kurset, og spesielt i kurset Faste stoffers fysikk, som jeg regner med du tar i neste vårsemester.)

Oppgave 2

Fra definisjonen av energienheten cal (kalori) har vi direkte at $c_p = 1$ cal/gK for vann. Luft består nesten utelukkende av 2-atomige molekyler, og gjennomsnittlig molar masse er ca 29 g/mol. Dermed er (med $R = 8.314$ i enheten J/mol K) $c_p = (7R/2)/(29 \cdot 4.184)$ cal/gK = 0.24 cal/gK for luft. Molar varmekapasitet for metaller er ca $3R$, så med molar masse 55.9 g/mol har vi $c_p \simeq 3R/(55.9 \cdot 4.184)$ cal/gK = 0.11 cal/gK for jern. Med andre ord, $c_p(\text{vann}) \simeq 4c_p(\text{luft}) \simeq 9c_p(\text{jern})$.

Oppgave 3

Siden lufta antas å utvide seg adiabatisk og reversibelt, kan adiabatligningene for ideell gass benyttes,

$$TV^{\gamma-1} = \text{konst} \quad \text{og} \quad pV^\gamma = \text{konst}.$$

Eliminasjon av V gir da

$$pT^{-\gamma/(\gamma-1)} = \text{konst},$$

eventuelt

$$Tp^{-\kappa} = T_0 p_0^{-\kappa}, \quad \text{dvs} \quad T = T_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^\kappa,$$

med $\kappa = (\gamma - 1)/\gamma$. Her er trykkdifferansen $\Delta p = p - p_0$ liten (i forhold til p_0), slik at temperaturendringen $\Delta T = T - T_0$ blir

$$\begin{aligned} \Delta T &= T - T_0 = T_0 \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^\kappa - 1 \right] \\ &= T_0 \left[\left(\frac{p_0 + \Delta p}{p_0} \right)^\kappa - 1 \right] \\ &= T_0 \left[\left(1 + \frac{\Delta p}{p_0} \right)^\kappa - 1 \right] \\ &\simeq T_0 \cdot \kappa \cdot \frac{\Delta p}{p_0}, \end{aligned}$$

der vi har rekkeutviklet til laveste orden i den lille størrelsen $\Delta p/p_0$. (Dette er selvsagt ikke påkrevd; en kan godt bare sette inn tallverdier og trykke i vei på kalkulatoren.) Med $\gamma = 7/5$ for luft blir $\kappa = 2/7$, slik at

$$\Delta T \simeq 293 \cdot \frac{2}{7} \cdot \left(\frac{-8.9}{760} \right) \text{ K} \simeq -1^\circ\text{C}.$$

Her har vi brukt at $1 \text{ atm} = 760 \text{ mm Hg}$.

Oppgave 4

For ideell gass har vi adiabatlikningene $pV^\gamma = \text{konst}$ og $TV^{\gamma-1} = \text{konst}$. Slutt-trykket blir derfor lik

$$p = p_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^\gamma = 1 \text{ atm} \cdot 18^{1.4} = 57.2 \text{ atm},$$

mens slutt-temperaturen blir (med $T_0 = 17^\circ\text{C} = 290 \text{ K}$)

$$T = T_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{\gamma-1} = 190 \text{ K} \cdot 18^{0.4} = 922 \text{ K} = 649^\circ\text{C}.$$

Her er ingen varme utvekslet med omgivelsene, slik at arbeidet tilsvarer endringen i indre energi: $Q = \Delta U + W = 0$. Vi kan nå gå fram på to måter for å bestemme arbeidet utført på gassen: Enten direkte ved å integrere $p(V) dV$, eller ved å regne ut endringen i indre energi, ΔU . La oss gjøre det på begge vis!

Direkte utregning:

$$W = \int_V^{V_0} p(V) dV = p_0 \int_V^{V_0} \left(\frac{V_0}{V} \right)^\gamma dV = \frac{p_0 V_0}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{V_0}{V} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] = \frac{p_0 V_0}{\gamma - 1} \left(\frac{T}{T_0} - 1 \right) = 0.44 \text{ kJ}.$$

Endring i indre energi:

Vi vet at U er en tilstandsfunksjon, og vi kjenner her både start- og slutt-tilstand (både trykk, volum og temperatur). Da kan vi bestemme ΔU på den måten som passer oss best, dvs det spiller ingen rolle hva slags prosess (her: adiabatisk) som faktisk tok systemet fra start- til slutt-tilstand.

Vi vet videre at endringen i indre energi inngår i uttrykket for varmekapasiteten ved konstant volum, $C_V = (\partial U / \partial T)_V$. Dermed, hvis vi kjenner $C_V(T)$, kan vi bestemme ΔU ved å integrere $dU = C_V dT$.

Her er det klart at C_V er en konstant: Med $C_p - C_V = nR$ og $C_p/C_V = \gamma$ har vi $C_V = nR/(\gamma - 1) = 5nR/2$. Dermed er

$$|W| = \Delta U = C_V(T - T_0) = \frac{5}{2}nR(T - T_0) = \frac{5}{2}p_0 V_0 \left(\frac{T}{T_0} - 1 \right) = 2.5 \cdot 1.013 \cdot 10^5 \cdot 0.80 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{922}{290} - 1 \right) = 0.44 \text{ kJ}.$$

Samme svar med begge metoder!

Oppgave 5

Arbeidet mot det ytre trykket skjer ved konstant trykk, slik at dette blir

$$W = \int_{V_0}^V p dV = p(V - V_0) \simeq pV,$$

hvor vi har neglisjert volumet av vann, V_0 , i forhold til volumet av vanndamp, V (ved 1 atm). Videre kan dampen med god tilnærming betraktes som en ideell gass, dvs $pV = nRT$. For n mol er fordampingsvarmen nL . Andelen av fordampingsvarmen som går med til arbeid mot det ytre trykket blir derfor (med $T = 100^\circ\text{C}$)

$$\frac{W}{nL} = \frac{nRT}{nL} = \frac{RT}{L} = \frac{8.314 \cdot 373}{40.7 \cdot 10^3} = 0.076 = 7.6\%.$$