

Friksjon i fluider

[OS1 6.4, 14.7]

(13)



anta omgivende fluid (gass eller væske)
med massetetthet ρ og dynamisk
viskositet μ

Luft: $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 2 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$

Vann: $\rho = 1000$ " " , $\mu = 10^{-3}$ " "

Liten $v \Rightarrow$ Pen og lagdelt (laminær) strømning av
fluidet rundt legemet og $\vec{f} = -k \vec{v}$.

Kule, radius r : $k = 6\pi\mu r$ (Stokes' lov)

Stor $v \Rightarrow$ Uordnet (turbulent) strømning av fluidet
og $\vec{f} = -\frac{1}{2} \rho A C_d v^2 \hat{v}$, der

C_d = drag-koeffisienten, i hovedsak bestemt av legemets form

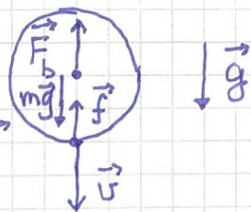
A = legemets tverrsnitt $\perp \vec{v}$

Kule, radius r : $A = \pi r^2$, $C_d \approx 0.5$

Oppdrift:

(buoyancy)

volum
 V



$\vec{F}_b = -\rho V \vec{g} =$ tyngden
av den fortrengte
fluidmengden (Arkimedes'
prinsipp)

Terminalfart: Maksimal fart ved "fritt" fall i
tyngdefeltet; tilsvarende $\sum \vec{F} = 0$, dvs

$$\vec{F}_b + \vec{f} = m\vec{g}$$

Ved fall i luft er ofte $F_b \ll f$, slik at $f(v_t) = mg$
gir terminalfarten v_t . Eks: Kule, stor fart, radius r .

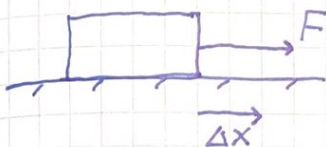
$$N1 \Rightarrow \frac{1}{2} \rho A C_d v_t^2 = mg \Rightarrow v_t \approx \{4mg / (\rho \pi r^2)\}^{1/2}$$

Arbeid og energi [OS1 7, 8]

(14)

Arbeid [OS1 7.1]

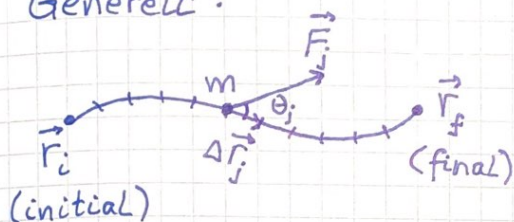
arbeid $\stackrel{\text{def}}{=}$ kraft $\cdot$ forflytning



$$\Delta W = F \cdot \Delta x = \text{arbeid utført av } F \text{ på klossen}$$

$$[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J} \quad (\text{joule})$$

Generelt:



$$\Delta W_j = \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j = F_j \Delta r_j \cos \theta_j$$

$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j \xrightarrow{\Delta \vec{r}_j \rightarrow 0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

= arbeid utført av $\vec{F}$ på massen m når den flytter seg fra $\vec{r}_i$ til $\vec{r}_f$

Effekt [OS1 7.4]

effekt $\stackrel{\text{def}}{=}$ utført arbeid (overført energi) pr tidsenhet

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad ; \quad [P] = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W} \quad (\text{watt})$$

TFY412S 21.05.24 nr 1:

Hvis 1 kWh koster 593 øre, hvor mange MJ får du for 100 kr?

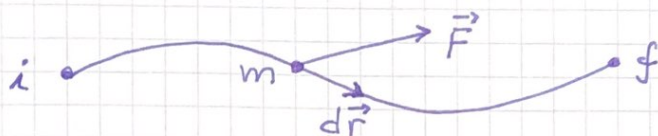
$$\text{Løsn: } 1 \text{ kWh} = 1000 \frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot 3600 \text{ s} = 3.6 \text{ MJ}$$

$$\Rightarrow \text{prisen er } 5.93 \text{ kr} / 3.6 \text{ MJ} = 1.647 \text{ kr/MJ}$$

$$\Rightarrow \text{for 100 kr får du } 100 \text{ kr} / (1.647 \text{ kr/MJ}) = \underline{\underline{60.7 \text{ MJ}}}$$

Kinetisk energi [OS1 7.2]

(15)



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m d\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{m}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{m}{2} dv^2$$

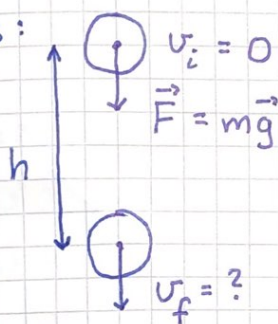
$$\Rightarrow W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m \int_i^f dv^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$K = \text{kinetisk energi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} m v^2$$

$$\text{Dvs: } \boxed{W = K_f - K_i = \Delta K}$$

Work-energy theorem

Eks:



$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot h = mgh$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_f^2 = mgh$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v_f = \sqrt{2gh}}}$$

Konservative krefter. Potensiell energi [OS1 8.1-8.4]

Dersom $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, er $\vec{F}$ konservativ.

↑ integral rundt lukket kurve

Da er arbeidet utført av $\vec{F}$ uavhengig av veien:



$$W_1 - W_2 = \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_1 - \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_2$$

$$= \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_1 + \left\{ \int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_2 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow W_1 = W_2$$

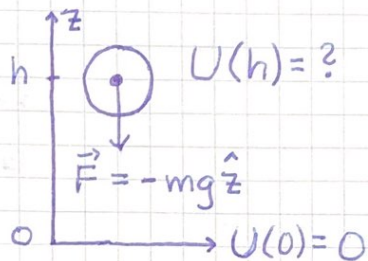
Forskjell i potensiell energi U , med konservativ $\vec{F}$: (16)

$$\Delta U = U_f - U_i \stackrel{\text{def}}{=} - \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Vi velger $U = 0$ der vi ønsker. Bare forskjeller i potensiell energi har fysisk betydning. Anta $U(\vec{r}_0) = 0$:

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Eks:



$$\begin{aligned} U(h) &= - \int_0^h F dz \\ &= - \int_0^h (-mg) dz = \underline{\underline{mgh}} \end{aligned}$$

Beregning av $\vec{F}$ fra U :

$$1D: dU = -F(x)dx \Rightarrow F(x) = -dU/dx$$

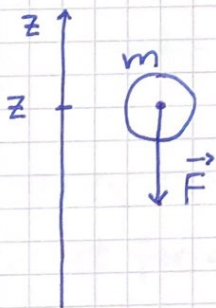
$$3D: dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \vec{F} = -\nabla U$$

Gradienten til en skalar funksjon $f(x, y, z)$:

$\nabla f = \left\{ \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right\} f$ = vektor i den retningen som f øker raskest; $|\nabla f|$ = endring i f pr lengdeenhet

$\Rightarrow \vec{F} = -\nabla U$ peker i den retningen som U avtar raskest

Eks:



$$U(z) = U(0) + mgz$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = mg$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{F} = -mg\hat{z}}}$$

Energibevarelse

[OS1 8.3]

(17)



$$\left. \begin{aligned} \Delta K &= K_f - K_i = W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ \Delta U &= U_f - U_i = - \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta K + \Delta U = 0$$

Total mekanisk energi $E = K + U$ er bevart i et kons. system

Eks: m  $z_i = h$
 $v_i = 0$

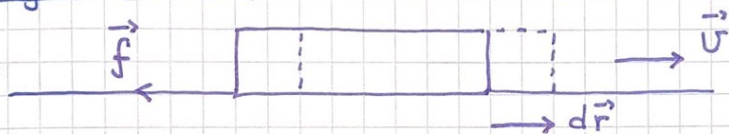
$$K_i = U_f = 0 \Rightarrow K_f = U_i$$

 $z_f = 0$
 $v_f = ?$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_f^2 = mgh \Rightarrow \underline{v_f = \sqrt{2gh}}$$

Friksjonsarbeid

[OS1 7.1]



Kinetisk friksjon: $dW_f = \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$ da $\vec{f}$ og $d\vec{r}$ har motsatt retning. Dermed er $\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$, og $\vec{f}$ er ikke konservativ. Mekanisk energi omdannes til varme, lydenergi osv.

Statisk friksjon: $d\vec{r} = 0 \Rightarrow dW_f = 0 \Rightarrow$ mekanisk energi er bevart

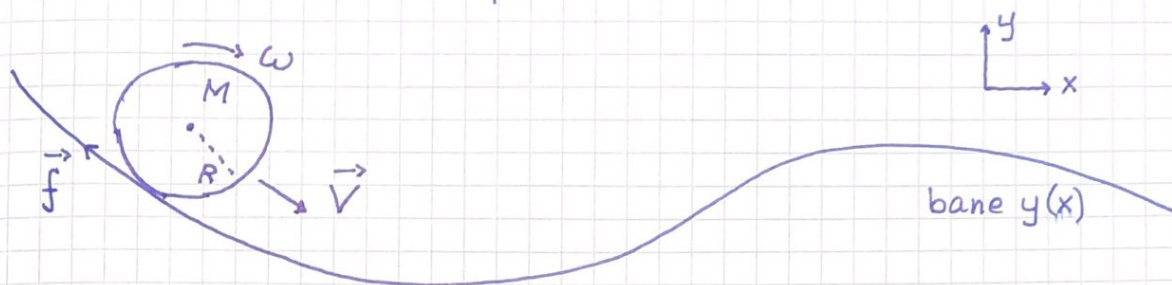
Eks: Hvis klossen får startfart 1.0 m/s og glir 40 cm på bordet før den stopper, hva er da μ_k ?

Løsn: $K_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$; $W_f = f \cdot s = \mu_k N \cdot s = \mu_k mgs$

$$\Rightarrow \mu_k = v_0^2 / (2gs) = 1.0^2 / (2 \cdot 9.81 \cdot 0.40) = \underline{0.13}$$

LAB: Rullende kule på krum bane

(18)



Ren rulling (kula glir ikke) $\Rightarrow$ statisk friksjon $\vec{f}$

$\Rightarrow$ Mekanisk energi er bevart

Pot. energi: $U = Mgy$

Translasjonsenergi: $K_{\text{trans}} = \frac{1}{2} MV^2$

Rotasjonsenergi: $K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_0 \omega^2$

Trehetsmoment for kompakt kule: $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$

Rullebetingelse: $\omega = V/R$

$$\Rightarrow K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} MR^2 \cdot \frac{V^2}{R^2} = \frac{1}{5} MV^2$$

Total kinetisk energi:

$$K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{7}{10} MV^2$$

Anta $V=0$ i start høyden y_0 . Energibevarelse gir:

$$\frac{7}{10} MV(y)^2 = U(y_0) - U(y) = Mg \cdot (y - y_0)$$

$$\Rightarrow V(y) = \sqrt{\frac{10}{7} g \cdot (y - y_0)}$$