

Stive legemer og enkel rotasjonsmekanikk

(19)

Massesenter [OS1 9.6]

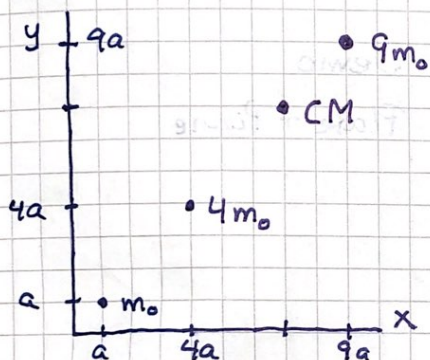
For N punktmasser $m_1, m_2, \dots, m_N$ i posisjoner $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i ; M = \sum_{i=1}^N m_i = \text{total masse}$$

TFY4125 17/8-24 nr 13:

$$m_j = j^2 m_0 ; x_j = y_j = j^2 a ; a = 10 \text{ cm} ; m_0 = 10 \text{ g} ; j = 1, 2, 3. R_{CM} = ?$$

Løsn:



$$M = 14 m_0$$

$$X_{CM} = Y_{CM} = \frac{1}{M} \{1 + 16 + 81\} m_0 a \\ = 98 m_0 a / (14 m_0) = 7a$$

$$\Rightarrow R_{CM} = \sqrt{X_{CM}^2 + Y_{CM}^2} = \sqrt{98} a \\ = \underline{\underline{99 \text{ cm}}}$$

For kontinuerlige massefordelinger:

$$\vec{r}_i m_i \rightarrow \vec{r} dm ; \sum_i \rightarrow \int$$

$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm ; M = \int dm$$

$$\text{Masseelement: } dm = \begin{cases} \lambda \cdot dl & (1D) \\ \sigma \cdot dA & (2D) \\ \rho \cdot dV & (3D) \end{cases}$$

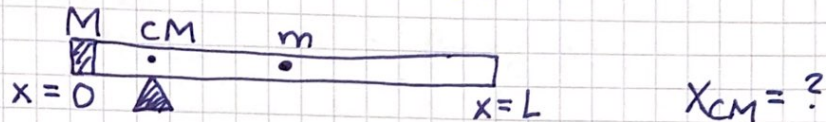
λ, σ, ρ = masse pr hhv lengde-, flate-, volumenhet
 dl, dA, dV = hhv lengde-, flate-, volumelement

Med uniform massefordeling:

(20)

$$dm = (M/L)dl \quad (1D); \quad dm = (M/A)dA \quad (2D); \quad dm = (M/V)dV \quad (3D)$$

Eks 1: Plastrør, $m = 165g$, med lod i enden, $M = 305g$



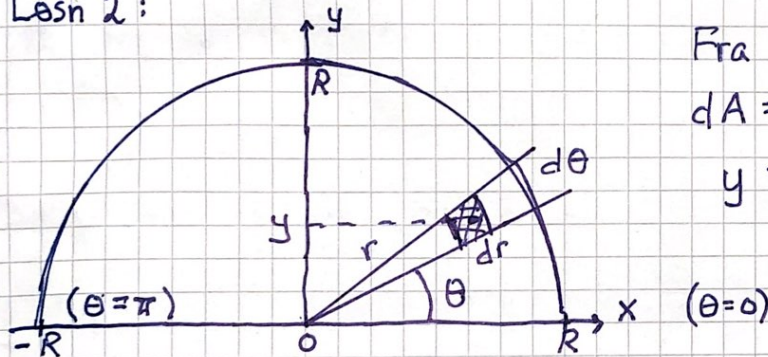
Løsn 1:
$$X_{CM} = \frac{1}{m+M} \left\{ M \cdot 0 + m \cdot \frac{L}{2} \right\} = \frac{mL}{2(m+M)} = \underline{\underline{0.18L}}$$

Eks 2: Halv sirkelformet skive



Masse M , radius R . $Y_{CM} = ?$

Løsn 2:



Fra figuren:

$$dA = r d\theta \cdot dr \quad (A = \frac{1}{2}\pi R^2)$$

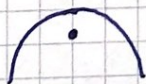
$$y = r \sin \theta$$

$$Y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{1}{A} \int y dA = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^\pi r \sin \theta r d\theta dr$$

Her er: $\int_0^R r^2 dr = \frac{1}{3}R^3$; $\int_0^\pi \sin \theta d\theta = \int_0^\pi (-\cos \theta) = 1 + 1 = 2$

$$\Rightarrow Y_{CM} = \frac{4}{3\pi} R \approx \underline{\underline{0.42 R}}$$

Halv tynn ring:



$$Y_{CM} = \frac{2}{\pi} R$$

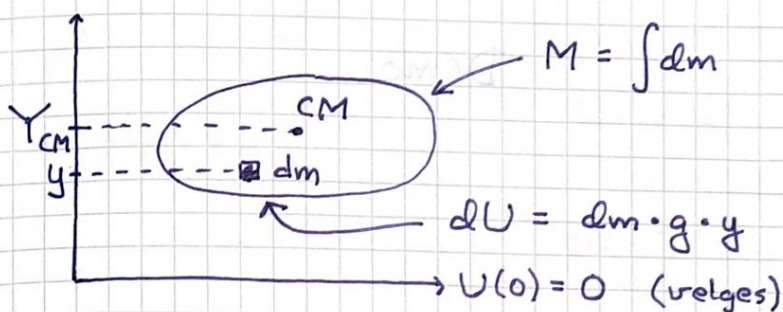
Halv kompakt kule:



$$Y_{CM} = \frac{3}{8} R$$

Eks 3: Potensiell energi i tyngdefeltet

(21)



Total pot.energi: $U = \int dU = \int g y dm = g M Y_{CM}$

Som om hele massen M er i massesenterhøyden Y_{CM}

Tyngdepunktbevegelsen [OS1 9.6]

Anta system med N punktmasser $\{m_i\}$ i pos. $\{\vec{r}_i\}$

$$N2 \text{ for } m_i: m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i,ytre} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$$

↑ "indre" kraft fra m_j på m_i

Legg sammen N2 for alle m_i i systemet:

$$VS: \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2} M \vec{R}_{CM} = M \ddot{\vec{R}}_{CM}$$

$$HS: \sum_i \vec{F}_{i,ytre} = \vec{F}_{ytre} = \text{netto ytre kraft på systemet}$$

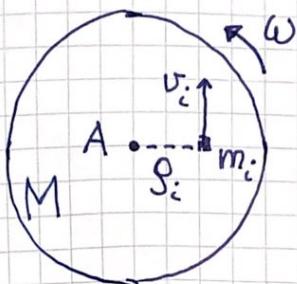
$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} + \dots = 0 \text{ pga } N3$$

$$\Rightarrow \boxed{M \ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{ytre}}$$

CM beveger seg som om hele massen M befinner seg i CM og påvirkes av den netto ytre kraften som virker på systemet.

Merk: Kreftenes angrepspunkt er uten betydning for CM-bevegelsen. (Men påvirker rotasjonsbevegelsen.)

Rotasjonsenergi, Trehetsmoment [OS1 10.4, 10.5] (22)



$M = \sum_i m_i = \text{legemets masse}$

$A = \text{rotasjonsaksen } (\perp \text{ papirplanet})$

$r_i = \text{avstanden fra } A \text{ til } m_i$

$\omega = \text{legemets vinkel fart}$

Rotasjonsenergi:

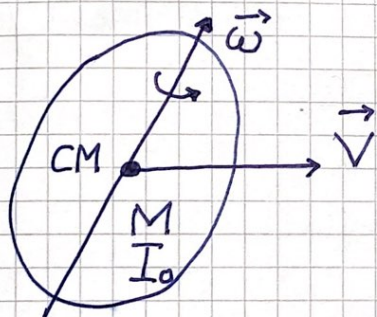
$$K_{\text{rot}} = \sum_i K_i = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i r_i^2 \right\} \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Trehetsmoment mhp aksen A: $I = \sum_i m_i r_i^2$

Med kontinuerlig massefordeling: $I = \int r^2 dm$

Generell bevegelse for et stivt legeme:

Translasjon av CM med fart $\vec{V}$ + Rotasjon omkring akse gjennom CM med vinkel fart $\vec{\omega}$.



$M = \text{massen}$

$I_0 = \text{treghetsmoment mhp rotasjonsaksen gjennom CM}$

Total kinetisk energi:

$$K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

[Se notat for bevis]

I_0 for legemer som kan rulle:

(23)

Ring og hul sylinder / rør:

M  $I_0 = \int r^2 dm = R^2 \int dm = \underline{\underline{MR^2}}$

Andre objekter med rotasjonssymmetri om aksen:

- Betrakt objektet som bygd opp av mange ringer (evt. rør)
- Uttrykk g og dm i passende koordinat(er)
- Integrer slik at hele objektet blir med

$\Rightarrow$ Kompakt skive/sylinder: $I_0 = \frac{1}{2} MR^2$

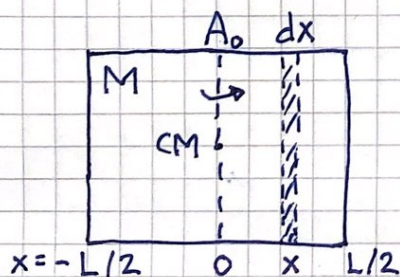
Tynt kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3} MR^2$

Kompakt kule: $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$

Dvs: $I_0 = c \cdot MR^2$ med $c = 1, 2/3, 1/2, 2/5$ for hhv
ring, kuleskall, skive, kule

Steiners sats [OS1 10.5]

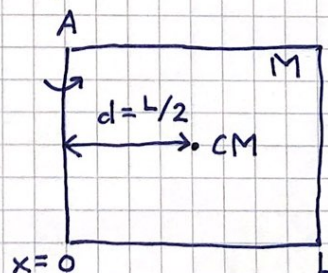
Vi illustrerer med svingdør vs sidehengsløst dør!



$g = x, dm = M dx / L$

$\Rightarrow I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 M dx / L = \underline{\underline{\frac{1}{12} ML^2}}$

Parallellforskyv
aksen med d :



$I = \int_0^L x^2 M dx / L = \frac{1}{3} ML^2$

som kan skrives slik:

$I = I_0 + Md^2$ med $d = L/2$

Gjelder generelt:

$I = I_0 + Md^2$

[Se notat for bevis]