FY1001/TFY4145 Mekanisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2014.

Løsningsforslag til øving 11

Oppgave 1

a) Vinkelfrekvensen er (antar matematisk pendel, men det spiller ingen rolle, det er bare avhengigheten av g som teller her) $\omega = \sqrt{g/L}$, så perioden er $T = 2\pi\sqrt{L/g}$. Ved høyde h over havet er tyngdens akselerasjon

$$g(h) = GM/(R+h)^2.$$

Dermed:

$$T(h) = T(0)(1 + h/R).$$

b) Med $h = 630$ m og $R = 6378000$ m blir relativ forsinkelse lik $h/R = 3.14 \cdot 10^{-5}$, dvs absolutt forsinkelse ca 1 minutt.

Oppgave 2

Ved uniform sirkelbevegelse er akselerasjonen ren sentripetalakselerasjon v^2/r, og eneste kraften som virker er gravitasjonskraften $G \cdot Mm/r^2$. N2 gir

$$\Sigma F = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad G \cdot \frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Radien r er avstanden fra jordsentrum, som ved starten A og ved slutten B er lik henholdsvis

$$\begin{aligned} r_A &= R + h_A = 6378\,\mathrm{km} + 8000\,\mathrm{km} = 14378\,\mathrm{km} \\ r_B &= R + h_B = 6378\,\mathrm{km} + 650\,\mathrm{km} = 7028\,\mathrm{km}\,. \end{aligned}$$

Får ofte bruk for og beregner derfor: $GM = 6.6742 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3/(\mathrm{kg}\,\mathrm{s}^2) \cdot 5.974 \cdot 10^{24}\mathrm{kg} = 3.9870 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$.

a) Endring i hastighet:
For den videre regning kan det være lurt å beregne hastighetene v_A og v_B separat og ikke bare differansen:

$$\left.\begin{aligned} v_A &= \sqrt{\frac{GM}{r_A}} = \sqrt{\frac{3.9870 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2}{14378 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}} = 5265.9\,\mathrm{m/s} \\ v_B &= \sqrt{\frac{GM}{r_B}} = \sqrt{\frac{3.9870 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2}{7028 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}} = 7531.9\,\mathrm{m/s} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \underline{\Delta v = v_B - v_A = +2266\,\mathrm{m/s}}\,.$$

Hastigheten øker altså.

b) Endring i kinetisk energi:

$$\left.\begin{aligned} K_A &= \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}m\frac{GM}{r_A} = 6.9325 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J} \\ K_B &= \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}m\frac{GM}{r_B} = 14.183 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \underline{\Delta K = K_B - K_A = +7.254 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J}}\,.$$

c) Endring i potensiell energi:

$$\left.\begin{array}{rcl} U_A &=& -m\dfrac{GM}{r_A} = -2\cdot K_A = -13.865\cdot 10^{10}\,\mathrm{J} \\ U_B &=& -m\dfrac{GM}{r_B} = -2\cdot K_B = -28.366\cdot 10^{10}\,\mathrm{J} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \underline{\Delta U = U_B - U_A = -2\cdot\Delta K = -14.50\cdot 10^{10}\,\mathrm{J}}\,.$$

Potensiell energi (relativt ∞) har alltid dobbelt verdi av kinetisk energi. Dette gjelder for alle sirkulære baner i gravitasjonsfelt. Når banen er elliptisk, varierer kinetisk og potensiell energi under omløpet.

d) Endring i totalenergi:

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = \Delta K - 2\cdot\Delta K = -\Delta K = \underline{-7.254\cdot 10^{10}\,\mathrm{J}}\,.$$

Eller med mer regnearbeid:

$$\begin{aligned} E_A = K_A + U_A &= -\frac{1}{2}m\frac{GM}{r_A} = -6.9325\cdot 10^{10}\,\mathrm{J}\,, \\ E_B = K_B + U_B &= -\frac{1}{2}m\frac{GM}{r_B} = -14.183\cdot 10^{10}\,\mathrm{J}\,. \\ \Delta E = E_B - E_A &= -\frac{1}{2}mGM\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) = \underline{-7.254\cdot 10^{10}\,\mathrm{J}}\,. \end{aligned}$$

En stor porsjon potensiell energi er tapt, halvparten av tapet er overført til kinetisk energi, resten friksjonsarbeid.

Oppgave 3

a) Gravitasjonskraften må være lik sentripetalkraften ved omløpstid $T = 24\,\mathrm{h} = 24\cdot 3600\,\mathrm{s} = 86400\,\mathrm{s}$:

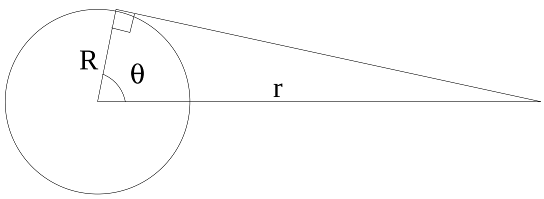
$$\Sigma F = ma = m\omega^2 r \quad \Rightarrow \quad G\,\frac{mM}{r^2} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$r = \left(GM\cdot\frac{T^2}{(2\pi)^2}\right)^{1/3} = \left(6.6742\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{kg^2}}\cdot 5.9742\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}\cdot\frac{(86400\,\mathrm{s})^2}{(2\pi)^2}\right)^{1/3} = 42246\,\mathrm{km}\,,$$

som er snaut 7 jordradier. Høyden over jordoverflaten er da

$$h = r - R = 42246\,\mathrm{km} - 6378\,\mathrm{km} = \underline{35868\,\mathrm{km}}\,.$$

b)

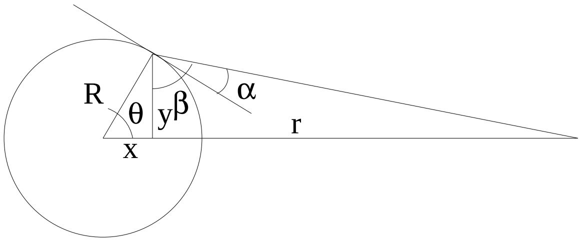


$$\cos\theta = R/r = 6378.1/42246 = 0.15098$$

$$\theta = 81.32^\circ = \underline{81^\circ 19'}.$$

$81^\circ 19'$ er like nord for nordspissen av Svalbard, så hele den befolkede verden vil ha geostasjonære satellitter tilgjengelig, med mindre et fjell skjuler sikten mot sør.

c)



I figuren er $x = R\cos\theta$ og $y = R\sin\theta$. La $\beta = \theta + \alpha$ være vinkelen mellom den vertikale linjen y på figuren og siktlinja til satellitten. Trondheims breddegrad er $\theta = 63°26' = 63.43°$. Da er

$$\begin{aligned} \tan\beta &= \frac{r-x}{y} = \frac{r/R - \cos\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{42246/6378.1 - \cos 63.43°}{\sin 63.43°} = 6.906\,, \end{aligned}$$

slik at $\beta = 81.76°$. Da er den søkte vinkelen over horisonten

$$\alpha = \beta - \theta = 81.76° - 63.43° = 18.33° = \underline{18°20'}\,.$$

Oppgave 4

a) Total energi ved jordens overflate er

$$E_J = U_J + K_J = -\frac{GmM_J}{R_J} + \frac{1}{2}mv_J^2.$$

Utenfor jordens gravitasjonsfelt, dvs for $r \to \infty$, er $U = 0$. Minste kinetiske energi der ute er $K = 0$. Total energi E må derfor være minst lik null, slik at

$$v_J \geq \sqrt{\frac{2GM_J}{R_J}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.6742 \cdot 10^{-11} \cdot 5.974 \cdot 10^{24}}{6378 \cdot 10^3}} \simeq 11.2 \text{ km/s}.$$

b) Total energi ved jordens overflate er nå

$$E_J = -\frac{GmM_S}{R_{SJ} + R_J} - \frac{GmM_J}{R_J} + \frac{1}{2}mv_S^2.$$

Kravet $K \geq 0$ når $r \to \infty$ gir nå

$$v_S \geq \sqrt{\frac{2GM_S}{R_{SJ} + R_J} + \frac{2GM_J}{R_J}},$$

som med tallverdier innsatt gir ($R_{SJ} = 1.5 \cdot 10^{11}$ m) $v_S \geq 43.5$ km/s. Hvis vi ser bort fra bidraget $2GM_J/R_J$ i uttrykket for v_S, får vi 42.1 km/s, en feil på ca 3%.

Oppgave 5

a) Av symmetrigrunner må $\boldsymbol{g}(y)$ ha retning normalt på staven og peke mot staven (siden gravitasjonskraften er tiltrekkende). Vi kan derfor konsentrere oss om y-komponenten av gravitasjonsfeltet. Ulike deler av staven er i ulik avstand fra punktet (P) der $g(y)$ skal bestemmes. Vi tenker oss derfor at vi deler opp staven i (uendelig) mange små biter, med lengde dx, masse $dm = M dx/L$, og posisjon x i stavens lengderetning. Avstanden fra et slik masseelement til P er $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Bidraget til g fra dm i posisjon x er gitt ved gravitasjonsloven, $dg = G dm/r^2$ (siden et slik infinitesimalt masseelement kan betraktes som en punktmasse). Vi er kun interessert i den komponenten av dette bidraget som har retning normalt inn mot staven. Derfor må vi multiplisere med $\cos\alpha$, der α er vinkelen mellom "loddlinjen" fra P mot staven og linjen fra P til dm:

$$dg_y = dg\,\cos\alpha = \frac{G\,dm\,\cos\alpha}{r^2} = \frac{GM\,dx\,\cos\alpha}{Lr^2}.$$

Vi har at $x = y \tan\alpha$, som betyr at $dx = y d\alpha/\cos^2\alpha = r^2 d\alpha/y$. Innsetting av dette for dx i dg_y gir $dg_y = (GM/Ly) \cdot \cos\alpha\, d\alpha$. Det totale gravitasjonsfeltet i P blir $g = \int dg_y$, dvs vi legger sammen bidragene fra alle stavens bestanddeler. Integrasjonsgrensene for α må velges slik at vi får med bidragene fra hele staven. Med andre ord, vi må integrere over α fra $-\phi$ til ϕ, der $\sin\phi = (L/2)/R = (L/2)/\sqrt{y^2 + (L/2)^2}$:

$$g(y) = \frac{GM}{Ly} \int_{-\phi}^{\phi} \cos\alpha d\alpha = \frac{GM}{Ly} \cdot 2\sin\phi = \frac{GM}{y\sqrt{y^2 + L^2/4}}.$$

b) Strategien blir den samme som i *a*). Vi holder oss til posisjoner $x > L/2$, dvs til høyre for stavens høyre ende. (Staven ligger mellom $-L/2$ og $L/2$.) Av symmetrigrunner må feltet her peke i negativ x-retning. Vi ser på absoluttverdien av bidraget til $g(x)$ fra et lite masseelement i posisjon x', med lengde dx' og dermed masse $dm = dx'M/L$. Avstanden fra dm til x er $r = x - x'$. Dermed er $dg = dg_x = G\,dm/r^2 = (GM/L)dx'/(x - x')^2$. Her må vi integrere fra $x' = -L/2$ til $x' = L/2$:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{GM}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx'}{(x - x')^2} \\
&= \frac{GM}{L} \Big|_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{x - x'} \\
&= \frac{GM}{L} \left(\frac{1}{x - L/2} - \frac{1}{x + L/2} \right) \\
&= \frac{GM}{L} \frac{(x + L/2) - (x - L/2)}{(x + L/2)(x - L/2)} \\
&= \frac{GM}{L} \frac{L}{x^2 - L^2/4} \\
&= \frac{GM}{x^2 - L^2/4}
\end{aligned}$$

c) Dersom observasjonspunktet P er veldig langt unna staven, slik at stavens lengde L er mye mindre enn henholdsvis avstanden y og x i oppgave *a*) og *b*), vil staven praktisk talt se ut som en punktmasse plassert i origo, med masse M. Da vet vi at gravitasjonsfeltet er henholdsvis $g(y) = GM/y^2$ og $g(x) = GM/x^2$. Vi ser at uttrykkene vi har regnet ut reduseres til nettopp dette når hhv $y \gg L$ og $x \gg L$.