FY1001/TFY4145 Mekanisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2014.

Løsningsforslag til øving 2

Oppgave 1

a) Hvis vi velger $\phi(0) = \pi/2$, peker $\boldsymbol{r}(0)$ rett oppover, dvs $\hat{r}(0) = \hat{y}$ og $\hat{\phi}(0) = -\hat{x}$. Da innser vi at det vil passe bra med

$$\begin{aligned} \hat{r}(t) &= -\hat{x}\sin\omega t + \hat{y}\cos\omega t, \\ \hat{\phi}(t) &= -\hat{x}\cos\omega t - \hat{y}\sin\omega t. \end{aligned}$$

b) Sammenhengene som skal vises i resten av oppgaven er generelle og kan ikke avhenge av om vi velger $\phi(0) = 0$ eller $\phi(0) = \pi/2$. La oss her f.eks bruke det førstnevnte. Derivasjon av de oppgitte uttrykkene gir

$$\begin{aligned} \dot{\hat{r}} &= -\omega\hat{x}\sin\omega t + \omega\hat{y}\cos\omega t = \omega\hat{\phi} \\ \dot{\hat{\phi}} &= -\omega\hat{x}\cos\omega t - \omega\hat{y}\sin\omega t = -\omega\hat{r} \end{aligned}$$

c) Siden $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$, $\boldsymbol{r} = r\hat{r}$ og r er konstant, har vi

$$\boldsymbol{v} = r\dot{\hat{r}} = r\omega\hat{\phi},$$

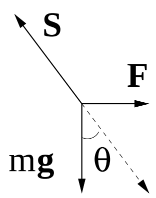
der vi brukte det første resultatet i spm *b*. Akselerasjonen:

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = r\omega\dot{\hat{\phi}} = -r\omega^2\hat{r},$$

der vi brukte det andre resultatet i spm *b*.

Oppgave 2

a)



Vi har her et eksempel på statisk likevekt. Newtons 2. lov gir da at $\boldsymbol{F} + m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{S} = 0$, dvs $\boldsymbol{F}$ og $m\boldsymbol{g}$ balanseres av strekket i stanga, $\boldsymbol{S}$, som peker *langs stanga.* (Hvor opplagt er egentlig det...?) Dermed må også summen av $\boldsymbol{F}$ og $m\boldsymbol{g}$ peke langs stanga, som vist på figuren. Derav følger at

$$\tan\theta = \frac{F}{mg} \qquad \Rightarrow \qquad F = mg\tan\theta.$$

b) Kula roterer i horisontalplanet. Det er ingen bevegelse vertikalt, og dermed heller ingen akselerasjon vertikalt. Dermed må vertikalkomponenten av strekket i stanga, $S\cos\theta$, akkurat balansere tyngdekraften mg. Horisontalt er det kun horisontalkomponenten av strekket i stanga, $S\sin\theta$, som virker på kula. Dette må derfor også være lik sentripetalkraften $mv^2/r = m\omega^2 r$ som holder kula i sirkulær bane. Vi har altså de to ligningene

$$\begin{aligned} S\cos\theta &= mg, \\ S\sin\theta &= m\omega^2 r = m\omega^2 L\sin\theta, \end{aligned}$$

og eliminasjon av S (ved å dele den første ligningen med den andre) gir

$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 L} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \arccos\frac{g}{\omega^2 L}.$$

Vi vet at $|\cos\theta| \leq 1$. Med gitt verdi for L (og g) må derfor ω være større enn minimumsverdien

$$\omega_{\text{min}} = \sqrt{g/L}$$

for at stanga og kula skal rotere med vinkel $\theta > 0$. Hvis systemet roterer med $\omega \leq \omega_{\text{min}}$, vil stanga og kula henge rett ned. Helt til slutt kan vi jo registrere at meget rask rotasjon, $\omega \gg \sqrt{g/L}$, gir $\cos\theta \simeq 0$, dvs $\theta \simeq \pi/2$, og stanga peker praktisk talt horisontalt utover. Ikke uventet!

c) Kula og flyet har lik akselerasjon a, ellers ville vinkelen θ forandre seg. Kulas situasjon er den samme som i spm a, bortsett fra at det *ikke* virker noen kraft $\boldsymbol{F}$ rettet mot høyre. Vertikal kraftbalanse (pga ingen bevegelse og dermed heller ingen akselerasjon vertikalt) gir

$$S\cos\theta = mg.$$

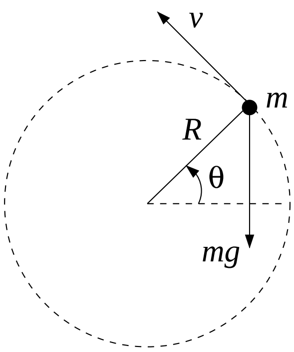
Horisontalt er det horisontalkomponenten av strekket i stanga, $S\sin\theta$, som virker på kula, og som gir kula en lineær akselerasjon a:

$$S\sin\theta = ma.$$

Divisjon av den siste med den første eliminerer S og gir

$$\tan\theta = a/g \qquad \Rightarrow \qquad a = g\tan\theta = 9.81/\sqrt{3} = 5.7\,\text{m/s}^2.$$

Oppgave 3.



a) Snordraget S er rettet langs snora, radielt inn mot midten av sirkelen, og har ingen komponent tangentielt til sirkelbanen. Steinens vekt gir følgende kraftkomponent tangentielt, regnet positiv i positiv θ-retning (mot klokka): $-mg\cos\theta$. Akselerasjonen i tangentialretning er $a_{\parallel} = dv/dt = Rd\omega/dt$. N2 langs sirkelbanen gir da

$$-mg\cos\theta = m \cdot R\,\frac{d\omega}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{R\,\frac{d\omega}{dt} = -g\cos\theta},$$

som vi skulle vise. Kjerneregelen for $\omega(\theta(t))$ gir

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \omega.$$

Derved har vi funnet følgende separable differensialligning for $\omega(\theta)$:

$$\underline{R\,\omega\,d\omega = -g\cos\theta\,d\theta}.$$

b) Vi løser ligningen ved å integrere fra starttilstand $\theta = 0$; $\omega = \omega_0$ til vilkårlig tilstand θ; ω:

$$R\int_{\omega_0}^{\omega} \omega\,d\omega = -g\int_0^{\theta} \cos\theta\,d\theta \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}R(\omega^2 - \omega_0^2) = -g \cdot \sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{2g}{R} \cdot \sin\theta}.$$

c) Snordraget S må, sammen med komponenten av steinens vekt radielt (dvs normalt på sirkelbanen), gi opphav til sentripetalakselerasjonen $R\omega^2$. N2 radielt gir da

$$S + mg\sin\theta = mR\omega^2 = mR\omega_0^2 - 2mg\sin\theta \qquad \Rightarrow \qquad \underline{S(\theta) = mR\omega_0^2 - 3mg\sin\theta}.$$

Vi ser at vi har maksimalt snordrag S_{max} når $\sin\theta = -1$, dvs når massen passerer sirkelens bunnpunkt, som forventet. Vi ser videre at vi har minimalt snordrag S_{min} når $\sin\theta = 1$, dvs på toppen. Heller ikke uventet. Da er $S_{\text{min}} = mR\omega_0^2 - 3mg$. Stram snor hele veien rundt har vi hvis $S_{\text{min}} > 0$, som gir $\omega_0 > \sqrt{3g/R}$.

Oppgave 4.

a) Ingen bevegelse normalt skråplanet, og dermed null nettokraft i denne retningen. Tyngden mg har komponent $mg\cos\theta$ normalt skråplanet, følgelig er $N = mg\cos\theta$. Riktig svar: B.

b) Klossen ligger i ro, og dermed null nettokraft også parallelt med skråplanet. Tyngden mg har komponent $mg\sin\theta$ langs skråplanet, følgeli er $f = mg\sin\theta$. Riktig svar: A.

c) Maksimal friksjonskraft er $f_{\text{max}} = \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta$. Ligger klossen i ro er dessuten $f = mg\sin\theta$ (se *b*). Dermed må statisk friksjonskoeffisient minst være $\mu_s^{\text{min}} = (mg\sin\theta)/(mg\cos\theta) = \tan\theta$. Riktig svar: C.

d) Hvis klossen glir, er $f = \mu_k N = \mu_k mg\cos\theta$. Netto kraft nedover langs skråplanet er dermed $mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta$, hvoretter N2 gir $a_{\|} = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$. Riktig svar: A.

e) Konstant hastighet dersom $a_{\|} = 0$ dvs $\tan\alpha = \mu_k$. Riktig svar: C.

Oppgave 5.

a) Klossene glir, da er $f = \mu N = \mu mg\cos\beta$. (Der μ er kinetisk friksjonskoeffisient.) Riktig svar: B.

b) Med stram snor virker snordraget S nedover på kloss nr 1. N2 gir da:

$$m_1 g\sin\beta + S - \mu_1 m_1 g\cos\beta = m_1 a_1,$$

dvs

$$a_1 = g(\sin\beta - \mu_1\cos\beta) + S/m_1.$$

Riktig svar: B.

c) Med stram snor virker snordraget S oppover på kloss nr 2. N2 gir da:

$$m_2 g\sin\beta - S - \mu_2 m_2 g\cos\beta = m_2 a_2,$$

dvs

$$a_2 = g(\sin\beta - \mu_2\cos\beta) - S/m_2.$$

Riktig svar: D.

d) $a_1 = a_2 = a$ gir, ved å trekke ligningen for a_2 fra ligningen for a_1,

$$S\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = g\cos\beta\,(\mu_1 - \mu_2)\,.$$

Stram snor, $S > 0$, krever altså $\mu_1 > \mu_2$. Riktig svar: B.

e) Fra forrige punkt finner vi

$$S = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,g\cos\beta(\mu_1 - \mu_2).$$

Dette setter vi inn for S i ligningen for a_1 (eller a_2):

$$a = g(\sin\beta - \mu_1 \cos\beta) + S/m_1,$$

hvoretter litt opprydding gir

$$a = g\left(\sin\beta - \cos\beta \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}\right).$$

Konstant hastighet hvis $a = 0$, dvs

$$\sin\beta = \cos\beta \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2},$$

og dermed

$$\tan\beta = \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$