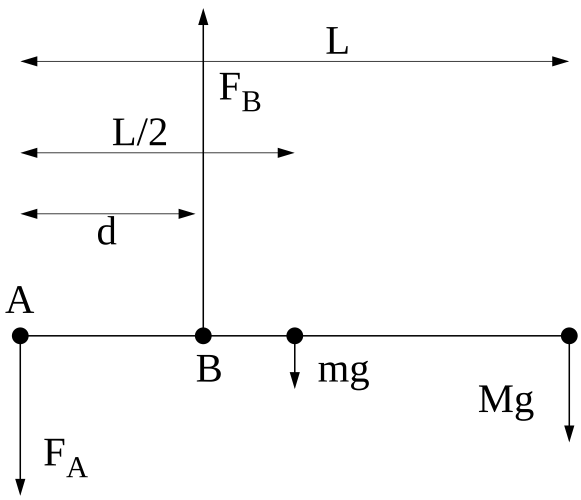
FY1001/TFY4145 Mekanisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2014.

Løsningsforslag til øving 5

Oppgave 1



Stupebrettet er i ro, dvs vi har statisk likevekt. Det betyr at summen av alle krefter i vertikal retning er null og at dreiemomentet om enhver akse er lik null. Vi ser da umiddelbart at kraften F_A er rettet nedover for å gi null dreiemoment om B. Vi ser videre at kraften F_B er rettet oppover for å gi null dreiemoment om A. Vi velger her først å beregne dreiemomentene om A. Kraften F_A har da null arm og dermed null dreiemoment. Dreiemomentene pga tyngdekreftene er negative siden de prøver å dreie *med klokka* om A. Tyngdekraften for stupebrettet angriper i tyngdepunktet som ligger i avstand $L/2$ fra A. Dreiemomentet pga F_B er positivt siden det prøver å dreie *mot klokka* om A. Totalt dreiemoment om A lik null gir

$$\begin{aligned} 0 &= F_A \cdot 0 - mg\frac{L}{2} - MgL + F_B d \\ F_B &= \frac{gL}{d}\left(M + \frac{m}{2}\right) \end{aligned}$$

Kraftbalanse i vertikal retning gir (med positiv retning valgt oppover)

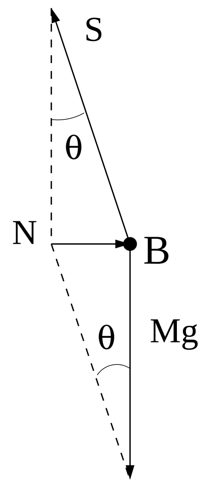
$$\begin{aligned} 0 &= -F_A - mg - Mg + F_B \\ F_A &= F_B - (m+M)g = \frac{gL}{d}\left(M + \frac{m}{2}\right) - (m+M)g \end{aligned}$$

La oss bruke dreiemomentbalanse om B til å kontrollere at vi har riktig uttrykk for F_A:

$$\begin{aligned} \tau_B &= F_A d - mg\left(\frac{L}{2} - d\right) - Mg(L-d) \\ &= gL\left(M + \frac{m}{2}\right) - (m+M)gd - mg\left(\frac{L}{2} - d\right) - Mg(L-d) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ser bra ut!

Oppgave 2



a) Det er tre krefter som virker på ballen, snordraget S, tyngdekraften $G = Mg$ og normalkraften fra veggen, N. Ballen er i ro, dvs i statisk likevekt. Da må f.eks det totale dreiemomentet om ballens tyngdepunkt B være null. Både N og G har null arm mhp en akse gjennom B, og bidrar derfor ikke til τ_B. Da kan heller ikke S gi noe dreiemoment om B, og snoras forlengelse må passere gjennom B.

La oss kalle vinkelen mellom veggen og snora for θ. Null nettokraft på ballen horisontalt gir da

$$N - S\sin\theta = 0,$$

mens null nettokraft vertikalt gir

$$S\cos\theta - Mg = 0.$$

Siden snoras forlengelse går gjennom B, har vi

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{(L+R)^2 - R^2}}{L+R} = \frac{\sqrt{L(L+2R)}}{L+R}$$

og

$$\tan\theta = \frac{R}{\sqrt{L(L+2R)}},$$

slik at

$$S = \frac{Mg}{\cos\theta} = Mg\,\frac{L+R}{\sqrt{L(L+2R)}}$$

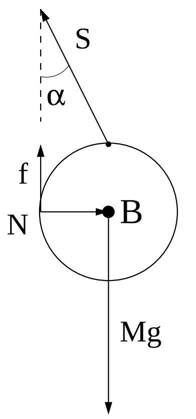
og

$$N = S\sin\theta = Mg\tan\theta = Mg\,\frac{R}{\sqrt{L(L+2R)}}.$$

Hvis snora er veldig lang, $L \gg R$, er $S \simeq Mg$ og $N \simeq 0$. Det er rimelig for en ball som henger i ei praktisk talt vertikal snor. Hvis snora er kort, $L \ll R$, blir både S og N store, og tilnærmet lik

$$S \simeq N \simeq Mg\sqrt{\frac{R}{2L}}.$$

Eksempelvis blir $S = N = 10Mg$ hvis $L = R/200$. (F.eks ball med radius 10 cm og snor med lengde 0.5 mm.) Litt friksjon mellom ball og vegg vil endre på dette.



b) La oss her kalle vinkelen mellom vegg og snor for α. Null dreiemoment om B gir da

$$S\sin\alpha \cdot R - f \cdot R = 0,$$

dvs

$$f = S\sin\alpha.$$

Maksimal friksjonskraft er $f_{\max} = \mu N$. Null nettokraft horisontalt gir da

$$N = S\sin\alpha = f = \mu N,$$

dvs $\mu = 1$, som akkurat gjør det mulig å ha snorfestet øverst på ballen. (En mye enklere løsning finnes ved å bruke snoras festepunkt som referansepunkt. Da har f og N like stor arm, R, slik at $f = N$ og $\mu = 1$ følger umiddelbart.)

Oppgave 3

a) Mhp aksen gjennom A (normalt papirplanet) har staven et treghetsmoment $MD^2/3$.
En ekstra (punkt-)masse m i avstand d gir ganske enkelt et ekstra bidrag md^2, slik at

$$I = \frac{1}{3}MD^2 + md^2.$$

b) Før sammenstøtet mellom kule og stav er det bare kula som har impuls, slik at

$$\boldsymbol{p}_i = mv\hat{x}.$$

c) Før sammenstøtet er det bare kula som har dreieimpuls om A, dens *banedreieimpuls* om A er

$$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_i = -d\hat{y} \times mv\hat{x} = mvd\hat{z}.$$

Med impuls i x-retning bidrar ikke x-komponenten av $\boldsymbol{r}$ til dreieimpulsen.

d) Tyngdekraften som virker på staven og kula i sammenstøtet har ingen arm mhp A. En eventuell kraft fra akslingen i sammenstøtet angriper staven i A og har dermed heller ingen arm mhp A. Da er det ikke noe ytre dreiemoment om A som påvirker systemet, og dreieimpulsen om A er bevart: $\boldsymbol{L}_f = \boldsymbol{L}_i = mvd\hat{z}$.

e) Stav pluss kule er et stivt legeme med treghetsmoment I og dreieimpuls mvd mhp A rett etter sammenstøtet. Da har vi $L = I\omega$, slik at

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{L}}{I} = \frac{v/d}{1 + MD^2/3md^2}\,\hat{z}.$$

f) Like etter sammenstøtet har alle deler av staven, inklusive den "absorberte" kula, hastighet i positiv x-retning:

$$\boldsymbol{v}(y) = -\omega y\hat{x},$$

slik at $\boldsymbol{v} = 0$ ved A ($y = 0$) og $\boldsymbol{v} = \omega D\hat{x}$ helt nederst ($y = -D$). Gjennomsnittshastigheten for staven blir dermed $\omega D\hat{x}/2$ og dens impuls $M\omega D\hat{x}/2$. Til dette må vi huske å addere kulas impuls $m\omega d\hat{x}$. Følgelig:

$$\boldsymbol{p}_f = \left(\frac{1}{2}MD + md\right)\omega\hat{x}.$$

Innsetting for ω fra *e*) gir

$$\boldsymbol{p}_f = \frac{mv + MvD/2d}{1 + MD^2/3md^2}\,\hat{x}.$$

Siden vi skal sammenligne p_f med p_i, trekker vi ut $mv = p_i$ fra telleren og får

$$\boldsymbol{p}_f = \boldsymbol{p}_i\,\frac{1 + MD/2md}{1 + MD^2/3md^2}.$$

Her vil forholdet mellom leddene som adderes til 1 i teller og nevner avgjøre om det er p_f eller p_i som er størst:

$$\frac{MD/2md}{MD^2/3md^2} = \frac{3d}{2D}.$$

Dermed: Hvis $d > 2D/3$, er $p_f > p_i$. Kula treffer staven så langt ned at rotasjonsbevegelsen ville ha blitt slik at stavens øverste ende rett etter støtet ville ha beveget seg mot venstre. Men staven er festet i A og

beveger seg ikke der. Dette må skyldes en kraft $\boldsymbol{F}$ fra akslingen på staven i A rettet mot høyre. Og et ytre kraftstøt $\boldsymbol{F} \cdot \Delta t$ rettet mot høyre vil som kjent gi en økning i systemets impuls i denne retningen. (Her er Δt sammenstøtets (korte) varighet.)
Tilsvarende: Hvis $d < 2D/3$, treffer kula staven så langt opp at øverste ende "prøver" å bevege seg mot høyre. En kraft fra akslingen rettet mot venstre forhindrer dette, og gir samtidig systemet en redusert impuls mot høyre.
Treffer kula nøyaktig i $d = 2D/3$, ønsker stavens øvre ende ikke å bevege seg i sammenstøtet, og vi har faktisk impulsbevarelse.
(I det *videre forløpet* har vi selvsagt ikke impulsbevarelse - og heller ikke dreieimpulsbevarelse - men det var det ikke spørsmål om her.)

g) Kinetisk energi før støtet:

$$K_i = \frac{1}{2}mv^2.$$

Kinetisk energi rett etter støtet:

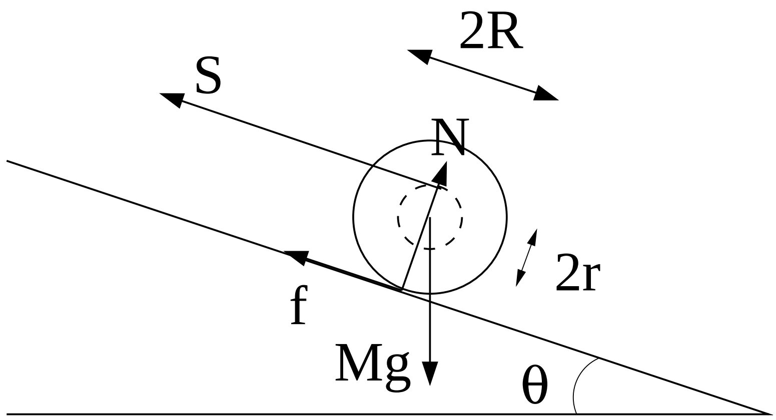
$$\begin{aligned}
K_f &= \frac{1}{2}m(\omega d)^2 + \frac{1}{2}\int_{\text{staven}} dm(\omega y)^2 \\
&= \frac{1}{2}m\omega^2 d^2 + \frac{1}{2}\int_{-D}^{0} \frac{M dy}{D}\omega^2 y^2 \\
&= \frac{1}{2}m\omega^2 d^2 + \frac{1}{6}MD^2\omega^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}md^2 + \frac{1}{6}MD^2\right)\frac{(v/d)^2}{(1 + MD^2/3md^2)^2} \\
&= \ldots \\
&= \frac{K_i}{1 + MD^2/3md^2}.
\end{aligned}$$

Dermed er endringen i kinetisk energi

$$\Delta K = K_f - K_i = -\frac{K_i}{1 + 3md^2/MD^2}.$$

Hvis kula har mye større masse enn staven, $m \gg M$, er $\Delta K/K_i \simeq 0$. Det høres rimelig ut: Staven representerer kun en "ubetydelig hindring" for kula, som (rett etter støtet) fortsetter som om intet hadde hendt. Hvis kula derimot har mye mindre masse enn staven, $m \ll M$, blir $\Delta K/K_i \simeq -1 = -100\%$. Det høres også rimelig ut: Staven er så tung i forhold til kula at den henger praktisk talt i ro etter støtet. (Tenk bare på grensen $M \to \infty$; da er staven som en "massiv vegg", all bevegelse opphører, og hele den kinetiske energien er tapt som varme og eventuelt deformasjon av kule og stav.)

Oppgave 4.



a) Her har vi fire ukjente: θ_0, S, f, N. Dette krever fire ligninger. Når snella holdes i ro av snora og friksjonen, gjelder N1:

Normalt skråplanet: $\sum F_\perp = 0 \quad \Rightarrow \quad N = Mg\cos\theta \quad$ (I)

Langs skråplanet: $\sum F_{||} = 0 \quad \Rightarrow \quad Mg\sin\theta = f + S \quad$ (II)
der f er friksjonskrafta.

N1 for rotasjon (mhp snellas massesenter): $\sum \tau = 0 \quad \Rightarrow \quad S\,r = f\,R \quad$ (III)

Statisk friksjonskraft kan ligge mellom null og en øvre grense:
$f \leq \mu_s N = \mu_s Mg\cos\theta \quad$ (IV)
Ved grensa $\theta = \theta_0$ – dvs der hvor snella akkurat glipper fra underlaget og begynner å rulle/slure – er friksjonskraften lik det maksimale: $f = \mu_s Mg\cos\theta_0$.
Ligning (III) gir $S = (R/r)f$, som innsatt i ligning (II) gir

$$Mg\sin\theta_0 - f - (R/r)f = 0.$$

Innsetting av maksimalverdien av f gir en ligning for θ_0:

$$Mg\sin\theta_0 = \mu_s Mg\cos\theta_0(1 + R/r) \qquad \Rightarrow \qquad \tan\theta_0 = \mu_s(1 + R/r),$$

og dermed

$$\underline{\theta_0 = \arctan\left[\mu_s(1 + R/r)\right]}.$$

Snorkrafta:

$$\underline{S = \frac{R}{r}f = \frac{R}{r}\mu_s Mg\cos\theta_0}\,, \quad \text{Alternative uttrykk: } S = \frac{MgR}{r+R}\sin\theta_0 = Mg\left(\sin\theta_0 - \mu_s\cos\theta_0\right).$$

b) Når snella har begynt å slure, må ligning (II) og (III) erstattes av N2. Vinkelen er nå gitt lik $\theta\,(\geq \theta_0)$, og de fire ukjente blir: a, S_1, f, N. Snorkraften blir en annen enn tidligere, derfor nytt symbol for den, og akselerasjonen a langs skråplanet blir en ukjent. Friksjonskraften nå er gitt av den *kinetiske* friksjonskoeffisienten μ_k:

$$f = \mu_k N = \mu_k Mg\cos\theta.$$

Ligning (I) bestemmer N og ligning () bestemmer f, slik at vi har igjen bare to ukjente, a og S_1. To ligninger:
N2 langs skråplanet: $\sum F_{||} = Ma \quad \Rightarrow \quad Mg\sin\theta - f - S_1 = Ma \quad$ (IIb)

N2 for rotasjon (om snellas massesenter): $\quad \sum \tau = I\dot{\omega} \quad \Rightarrow \quad -f\,R + S_1\,r = I\dot{\omega} \quad$ (IIIb) der I = treghetsmomentet om snellas akse. Vi har valgt a positiv nedover og positiv ω mot klokka (= den retningen det virkelig går). Når snella rutsjer nedover, rulles snora ut med hastighet $v = \omega\, r$ (IKKE $v = \omega R$!), og $\dot{\omega} = \dot{v}/r = a/r$. N2-ligningene (IIb) og (IIIb) gir da (vi venter litt med å sette inn for f):

$$
\begin{aligned}
M\,g\sin\theta - f - S_1 &= M a \qquad (1)\\
-fR + S_1\, r &= I\ (a/r). \qquad (2)
\end{aligned}
$$

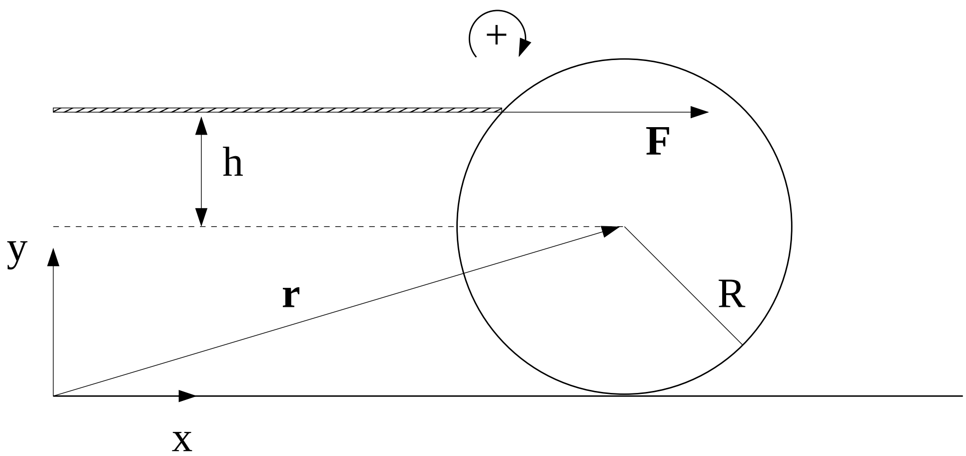
To ligninger og to ukjente (a og S_1). Eliminerer S_1 fra ligning (1) og setter inn i ligning (2):

$$S_1 = M\,g\sin\theta - f - Ma \quad \overset{(2)}{\Longrightarrow} \quad -fR + Mgr\sin\theta - fr = I\ (a/r) + Mar. \qquad (3)$$

Løsning av a, med litt smarte divisjoner og innsetting av f gir

$$\underline{a = g\,\frac{\sin\theta - \mu_k\cos\theta\left(1 + \frac{R}{r}\right)}{1 + I/(Mr^2)}}.$$

Oppgave 5.



a) Det kortvarige, kraftige støtet gir kula en (lineær) impuls og en dreieimpuls (relativt massesenteret):

$$
\begin{aligned}
F\Delta t &= M\Delta V = MV_0\\
\tau\Delta t &= Fh\Delta t = I_0\Delta\omega = I_0\omega_0.
\end{aligned}
$$

Fortegnsvalg: Positiv translasjon i positiv x-retning og positiv rotasjon med klokka, vist i figuren. Vi har som oppgitt neglisjert friksjonskraftens bidrag i det korte tidsrommet Δt, noe som er rimelig unntatt for slag som er veldig svake. En god snookerspiller kan mobilisere en langt større kraft F når *det* er hensiktsmessig. Vi eliminerer den ukjente størrelsen $F\Delta t$ fra de to ligningene, og får derved en relasjon mellom V_0 og ω_0,

$$MhV_0 = I_0\omega_0 \quad \Rightarrow \quad V_0 = \frac{2R^2}{5h}\,\omega_0 \ \text{ eller } \ \underline{\omega_0 = \frac{5h}{2R^2}\,V_0}. \qquad (4)$$

Ren rulling forutsetter at $V_0 = R\omega_0$, og denne betingelsen er bare oppfylt når $\underline{h/R = +2/5}$.

b) Dersom $h > 2R/5$, vil $\omega_0 > V_0/R$, dvs kula roterer for fort i forhold til ren rulling. Det innebærer at undersiden av kula glir mot venstre på underlaget, og friksjonskraften vil derfor være rettet mot høyre. Retningen kan også fastlegges ved at friksjonskraften forsøker å oppnå perfekt rulling ved å redusere vinkelhastigheten og øke translasjonshastigheten.

Dersom $h < 2R/5$, er situasjonen den motsatte: Friksjonskraften virker mot venstre og gir kula rotasjonsakselerasjon og translasjonsretardasjon. For $h < 0$ vil $\omega_0 < 0$, dvs kula roterer "feil" vei. Friksjonen virker fortsatt mot venstre, dvs den forsøker å få kula til å rotere rett vei.

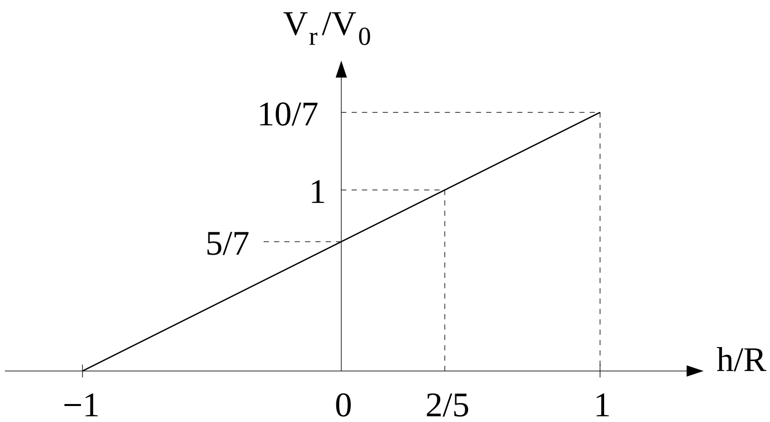
c) Velger vi referansepunktet (hvor som helst) langs x-aksen, vil $\boldsymbol{r_f} \times \boldsymbol{f} = 0$, der $\boldsymbol{r_f}$ er $\boldsymbol{f}$'s angrepspunkt, som er i kontaktpunktet mellom kule og bord. De to vektorene er parallelle. Ingen andre krefter gir noe dreiemoment om origo etter at støtet er avsluttet, og total dreieimpuls relativt origo må derfor være bevart. (Luftmotstanden, som vi har neglisjert, gir selvsagt et ørlite dreiemoment, noe som ødelegger for perfekt dreieimpulsbevarelse.)

d) Total dreieimpuls blir

$$\begin{aligned}
& L_z &=& \; L = M[\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V}]_z + I_0\omega = MRV + I_0\omega \\
\text{start:}\; & L_0 &=& \; MRV_0 + (2/5)MR^2\,\omega_0 \overset{(4)}{=} MRV_0(1 + h/R) \\
\text{ved ren rulling:}\; & L_r &=& \; MRV_r + (2/5)MR^2 \cdot V_r/R = (7/5)MRV_r.
\end{aligned}$$

Da dreieimpulsen er bevart, må vi ha $L_0 = L_r$, som gir hastigheten når ren rulling er oppnådd:

$$\underline{V_r = \frac{5}{7}\left(1 + \frac{h}{R}\right) V_0.} \tag{5}$$



Når $h/R = +\frac{2}{5}$, finner vi $V_r = V_0$, som vi burde. Når $h/R > \frac{2}{5}$, vil altså massesenterhastigheten *øke* på vei mot den endelige rullebevegelsen, ellers vil den avta. Merk at $V_r \geq 0$ *alltid*, uansett hvor lavt på kula køen treffer, dvs det er ikke mulig å få kula til å trille tilbake etter at ren rulling er oppnådd. For $h = -R$ (vanskelig i praksis!) stopper kula.

e) Når translasjonshastigheten endres fra V_0 til V_r i løpet av en tid t_r (som skal bestemmes), er det ene og alene friksjonskraften $f = \mu_k Mg$ som gir denne akselerasjonen. Akselerasjonen $a = f/M = \mu_k g$ er konstant, og vi kan bruke konstant-akselerasjonsligningen $V_r = V_0 + at_r$ til å bestemme t_r. Som funnet i *b*) peker f mot høyre, og a er positiv når $h/R > 2/5$, mens f peker mot mot venstre og a er negativ når $h/R < 2/5$. Vi tar først for oss tilfellet positiv a:

$$\begin{aligned}
V_r &= V_0 + at_r \qquad \text{og} \quad V_r = \frac{5}{7}\left(1 + \frac{h}{R}\right) V_0 \\
\Rightarrow\; t_r &= \frac{1}{a}(V_r - V_0) \;=\; \frac{1}{\mu_k g}\left(-\frac{2}{7} + \frac{5}{7}\frac{h}{R}\right) V_0 \;=\; V_0\,\frac{2}{7\mu_k g}\left(\frac{5}{2}\frac{h}{R} - 1\right) \qquad \text{når } h/R > 2/5.
\end{aligned}$$

Når $h/R < 2/5$, blir $a = -\mu_k g$, og fortegnet snus:

$$t_r \quad = \quad V_0 \, \frac{2}{7\mu_k g} \left(1 - \frac{5}{2}\frac{h}{R}\right) \qquad \text{når } h/R < 2/5.$$

Om ønsket kan vi sammenfatte dette til en ligning:

$$\underline{t_r = \frac{2V_0}{7\mu_k g} \left|1 - \frac{5}{2}\frac{h}{R}\right|} \quad \text{for alle } h/R \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Verdien er 0 *bare* for $h/R = 2/5$, i tråd med det vi visste fra før.

f) Energiberegninger: Først startenergien uttrykt ved translasjonsenergien $\frac{1}{2}MV_0^2$:

$$K_0 = \frac{1}{2}MV_0^2 + \frac{1}{2}I_0\omega_0^2 \overset{(4)}{=} \frac{1}{2}MV_0^2 \left(1 + \frac{5}{2}\frac{h^2}{R^2}\right).$$

Dernest energi for den rullende kula med $\omega_r = V_r/R$:

$$K_r = \frac{1}{2}MV_r^2 + \frac{1}{2}I_0\omega_r^2 = \frac{1}{2}MV_r^2 \cdot \frac{5}{7} \overset{(5)}{=} \frac{1}{2}MV_0^2 \cdot \frac{5}{7}\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2.$$

Og vi kan uttrykke energitapet:

$$\Delta K = K_r - K_0 = \frac{1}{2}MV_0^2 \left[\frac{5}{7}\left(1 + 2\frac{h}{R} + \frac{h^2}{R^2}\right) - \left(1 + \frac{5}{2}\frac{h^2}{R^2}\right)\right] = \underline{-\frac{1}{2}MV_0^2 \cdot \frac{2}{7} \cdot \left(1 - \frac{5}{2}\frac{h}{R}\right)^2}$$

etter litt algebra. Vi kan også uttrykke relativ energi etter at rulling er oppnådd:

$$\epsilon = \frac{K_r}{K_0} = \frac{\frac{5}{7}\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2}{1 + \frac{5}{2}\frac{h^2}{R^2}}.$$

En kontroll: Med et støt som gir ren rulling ($h/R = 2/5$) er $\epsilon = 1$, dvs ikke energitap. Med $h = -R$ er $\epsilon = 0$, dvs 100% energitap. Dessuten: Med $h = +R$ er $\epsilon = 40/49$ og med $h = 0$ er $\epsilon = 5/7$.

g) Det er konstant akselerasjon slik at lengden som kula glir langs underlaget før ren rulling oppnås, finnes fra gjennomsnittsfarten $\langle V \rangle$:

$$x_r = \langle V \rangle \, t_r = \frac{1}{2}(V_r + V_0)\, t_r = \underline{\frac{2V_0^2}{49\mu_k g}\left(6 + \frac{5h}{2R}\right)\left|1 - \frac{5h}{2R}\right|},$$

der vi har brukt uttrykk for V_r og t_r ovenfra. Kontroll: $x_r = 0$ når $h/R = 2/5$.
Vi har lært at det kreves relativt omfattende regning for å bestemme t_r eller x_r, mens V_r i pkt *d*) (og dermed, med litt ekstra faktoriseringsstrev, ΔK) faller nesten rett ut ved bruk av dreieimpulsbevarelse.
Det ville også ha vært interessant å analysere bevegelsen etter et støt som treffer til høyre eller venstre for xy-planet. Dette vil gi sidelengs rotasjon ($\boldsymbol{\omega}$ vertikal), noe som kan gi en ikkelineær bane. For curlingspillere er vertikal $\boldsymbol{\omega}$ viktig for curlingsteinens videre bevegelse. Men det er utfordrende å regne på!