FY1001/TFY4145 Mekanisk fysikk. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2014.
Veiledning: 14. - 17. oktober. Innleveringsfrist: Mandag 20. oktober kl 14.

Øving 7

Denne øvingen leveres i sin helhet pr epost til din studass. På oppgave 1 er det denne gang tilstrekkelig å levere inn 11 bokstavsvar, uten utregninger. (Litt regning er selvsagt nødvendig for å løse – og forstå – oppgavene.) På oppgave 2 leverer du de fire etterspurte PDF-figurene som vedlegg til eposten.

Oppgave 1: Flervalgsoppgaver om svingninger

En kloss med masse m er festet til ei (masseløs) fjær med fjærkonstant k. Fjæra er festet til en vegg i sin venstre ende. Klossen kan gli uten friksjon på et horisontalt underlag. Bevegelsen blir startet (ved $t = 0$) ved å dra klossen fra likevektsposisjonen $x = 0$ mot høyre til posisjon x_0 og gi den en hastighet v_0 mot høyre. Klossen utfører deretter harmoniske svingninger beskrevet ved $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$ der $\omega_0 = 2\pi/T$ er vinkelfrekvensen, T er perioden og ϕ er en fasekonstant.

a) Hva er perioden T for denne harmoniske svingningen?

A) $2\pi\sqrt{k/m}$ B) $\sqrt{k/m}$ C) $2\pi\sqrt{m/k}$ D) $\sqrt{m/k}$

b) Hva er amplituden A for denne harmoniske svingningen?

A) $\sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2}$ B) $x_0/\cos(\arctan(v_0/x_0\omega_0))$
C) Både A og B er riktige svar D) Verken A eller B er riktige svar

c) Hva er fasekonstanten ϕ for denne harmoniske svingningen?

A) $-\arctan(v_0/x_0\omega_0)$ B) $\arccos(1/\sqrt{1 + mv_0^2/kx_0^2})$
C) Både A og B er riktige svar D) Verken A eller B er riktige svar

d) Hva er systemets totale mekaniske energi E?

A) $kx_0^2/2$ B) $mv_0^2/2$ C) $kx_0^2/2 + mv_0^2/2$ D) 0

e) Vi kunne alternativt ha skrevet løsningen på formen $x(t) = B\cos\omega_0 t + C\sin\omega_0 t$. Hva blir da de to koeffisientene B og C?

A) $B = v_0/\omega_0$ og $C = x_0$ B) $B = x_0$ og $C = v_0/\omega_0$ C) $B = C = x_0$ D) $B = C = v_0/\omega_0$

f) Hva blir svingebevegelsens maksimale utsving og maksimale hastighet dersom $m = 100$ g, $k = 10$ N/m, $x_0 = 1.0$ cm og $v_0 = 10$ cm/s.

A) 1.4 cm og 14 cm/s B) 1.4 m og 14 m/s
C) 14 m og 1.4 m/s D) 14 cm og 1.4 cm/s

g) Svingesystemet dreies 90 grader slik at massen m henger vertikalt i tyngdefeltet. Med hvilken vinkelfrekvens ω vil massen nå svinge opp og ned?

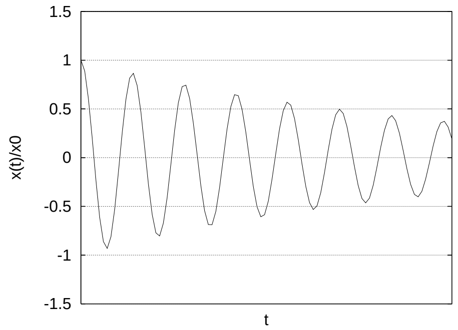
A) $\omega = \omega_0$ B) $\omega = 2\omega_0$ C) $\omega = 3\omega_0$ D) $\omega = 4\omega_0$

h) Figuren viser utsvinget

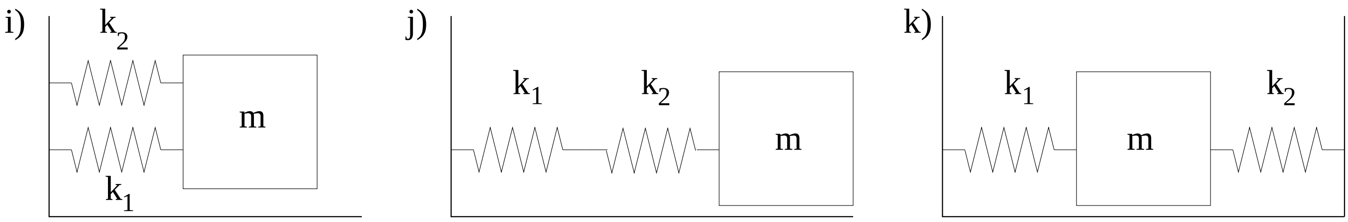
$$x(t) = x_0 e^{-t/\tau} \cos \omega t,$$

eller rettere sagt $x(t)/x_0$, for en dempet harmonisk svingning. Omtrent hvor stort er produktet $\omega\tau$ mellom vinkelfrekvensen og den "karakteristiske tiden" for dempingsforløpet?

A) 0.022
B) 1.7
C) 14
D) 45



Et enkelt masse-fjær-svingesystem med masse m og fjærstivhet k har som kjent vinkelfrekvens $\omega = \sqrt{k/m}$. Sett opp "N2" for de tre svingesystemene vist i figuren nedenfor og finn vinkelfrekvensen for hvert av systemene uttrykt ved $\omega_1 = \sqrt{k_1/m}$ og $\omega_2 = \sqrt{k_2/m}$. I alle tilfellene er fjærene masseløse, og det er ingen friksjon.



i) $\omega_i = \ldots$

A) $\omega_1 + \omega_2$ B) $\omega_1\omega_2/\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ C) $\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ D) $\sqrt{\omega_1\omega_2}$

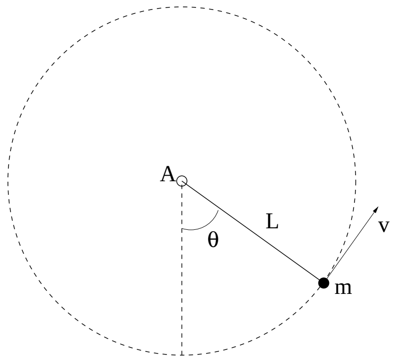
j) $\omega_j = \ldots$

A) $\omega_1 + \omega_2$ B) $\omega_1\omega_2/\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ C) $\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ D) $\sqrt{\omega_1\omega_2}$

k) $\omega_k = \ldots$

A) $\omega_1 + \omega_2$ B) $\omega_1\omega_2/\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ C) $\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ D) $\sqrt{\omega_1\omega_2}$

Oppgave 2: Matematisk pendel



Figuren til venstre viser en såkalt matematisk pendel, bestående av ei kule (punktmasse) med masse m i enden av ei masseløs stang med lengde L. Stanga kan svinge uten friksjon omkring festepunktet (A), slik at kula følger en sirkelbane med radius L. Kulas bevegelse er bestemt ved ligningen

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0.$$

(N2 tangentielt til sirkelbanen. Vi har brukt sammenhengen mellom hastighet og vinkelhastighet ved sirkelbevegelse.)

For små utsving fra likevekt, $|\theta| \ll 1$, kan $\sin\theta$ erstattes med θ, og vi har en enkel harmonisk oscillator, med kjent løsning, og med vinkelfrekvens ("egenfrekvens") $\omega_0 = \sqrt{g/L}$. Men for større utsving fra likevekt må vi beholde $\sin\theta$, og da kan ligningen ovenfor ikke løses analytisk. Numerisk er det imidlertid ingen problemer! En enkel og intuitiv numerisk måte å bestemme $\theta(t)$ på er den såkalte Euler-metoden. N2 kan skrives på formen

$$dv = a\,dt = \frac{F}{m}\,dt.$$

Det betyr at hastigheten ved tidspunktet $t+dt$ kan bestemmes dersom vi kjenner hastigheten ved tidspunktet t:

$$v(t+dt) = v(t) + a\,dt = v(t) + dv = v(t) + \frac{F}{m}\,dt.$$

Med et *endelig* tidssteg Δt blir ligningen

$$v(t+\Delta t) = v(t) + \Delta v = v(t) + \frac{F(t)}{m}\,\Delta t$$

bare tilnærmet riktig, men formodentlig en riktig *god* tilnærmelse dersom Δt velges tilstrekkelig liten. Samme oppskrift kan vi i neste omgang bruke for å bestemme posisjonen, eller som her, vinkelen $\theta(t)$. Vi har $v = ds/dt = L\,d\theta/dt$, dvs

$$d\theta = \frac{v}{L}\,dt,$$

og med endelig tidssteg gir dette

$$\theta(t+\Delta t) = \theta(t) + \Delta\theta = \theta(t) + \frac{v(t)}{L}\,\Delta t.$$

Hvis vi nå, som her, kjenner $\theta(t=0)$ og $v(t=0)$, dvs $\theta(0) = \theta_0$ og $v(0) = v_0$, kan ligningene over brukes til å finne $\theta(\Delta t)$ og $v(\Delta t)$, deretter $\theta(2\Delta t)$ og $v(2\Delta t)$ osv. I vårt konkrete tilfelle er det tyngdens tangentialkomponent som bestemmer akselerasjonen, og dermed hastigheten tangentielt,

$$a = \frac{F}{m} = -g\sin\theta.$$

I `pendel.m` er denne oppskriften delvis implementert i Matlab.

- Fullfør `pendel.m` (eller skriv ditt eget program fra grunnen av) slik at punktene nedenfor kan besvares.
- La pendelen ha lengde 1.0 m. Tyngdens akselerasjon er 9.81 m/s^2.
- Kjør programmet med startvinkel $\theta_0 = 0$, men med tre ulike verdier for starthastigheten v_0: (A) Med tilstrekkelig liten v_0 til at pendelen med god tilnærmelse utfører harmoniske svingninger med vinkelfrekvens $\sqrt{g/L}$. (B) Med v_0 slik at pendelen svinger *nesten* helt opp til toppen av sirkelbanen. Hvor lang periode T klarer du å lage? (C) Med tilstrekkelig stor v_0 til at pendelen passerer toppen av sirkelbanen, gjerne med god margin.

- For hvert av de tre tilfellene (A), (B) og (C), lag en figur der vinkelen θ plottes, i enheten grader, som funksjon av tiden t i intervallet fra $t = 0$ til $t = 2T$. Perioden T vil være forskjellig i de tre tilfellene. Figurene skal ha tekst på aksene, 't (s)' for horisontal akse og 'θ (grader)' for vertikal akse. Figurene lagres som PDF-filer, med navn `brukernavn_FIGA.pdf` osv, evt samlet i en PDF-fil. Verdien du har brukt for starthastigheten v_0 kan angis som tittel på den aktuelle grafen; alternativt oppgir du v_0-verdier i eposten til din studass.

- For minst ett av de tre tilfellene (A), (B), (C), sjekk i hvilken grad mekanisk energi (pr masseenhet) $E/m = (K+U)/m$ er bevart, ved å regne den ut og plotte den som funksjon av t i programmet. Figuren skal ha teksten 'E/m (m^2/s^2)' på vertikal akse og 't (s)' på horisontal akse. Figuren lagres med navn `brukernavn_FIGD.pdf`. Angi med figurtittel for hvilket av de tre tilfellene energien pr masseenhet plottes; alternativt angir du dette i eposten.