

KLASSISK DYNAMIKK

①

[YF 1-11, 14 ; LL 1-7, 9]

Størrelser, enheter SI-systemet [YF 1]

Eks: Masse ; $m = 79.2 \mu\text{g}$

↑ ↑ ↓

Størrelse Symbol Måltall (Tallverdi) Enhet

Dekadisk prefiks: $\mu = \text{mikro} = 10^{-6}$

Notasjon: $[m] = \text{kg}$ ("enheten til masse er kilogram")

Grunnenheter i SI:

lengde: $[l] = \text{m}$ (meter)

tid: $[t] = \text{s}$ (sekund)

masse: $[m] = \text{kg}$ (kilogram)

elektrisk strømstyrke: $[I] = \text{A}$ (ampere)

temperatur: $[T] = \text{K}$ (kelvin)

stoffmengde: $[n] = \text{mol}$

Sammensatte enheter:

hastighet: $[v] = \text{m/s}$

akselerasjon: $[a] = \text{m/s}^2$

Abledte enheter:

kraft: $[F] = \text{kg m/s}^2 = \text{N}$ (newton)

energi: $[W] = \text{Nm} = \text{J}$ (joule)

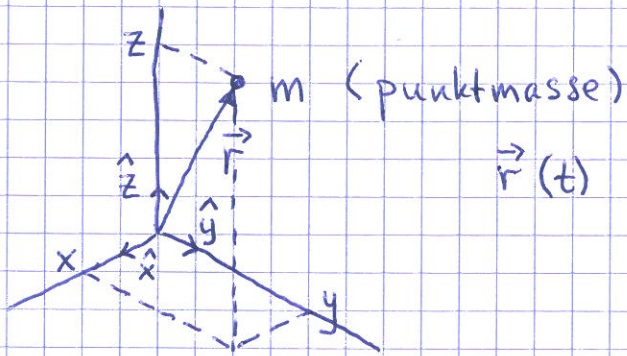
effekt: $[P] = \text{J/s} = \text{W}$ (watt)

Kinematikk

[YF 2,3 ; LL 1]

(2)

(= beskrivelse av bevegelse)



$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y} + z(t) \hat{z}$$

= m's posisjon ved tid t
i kartesiske koordinater

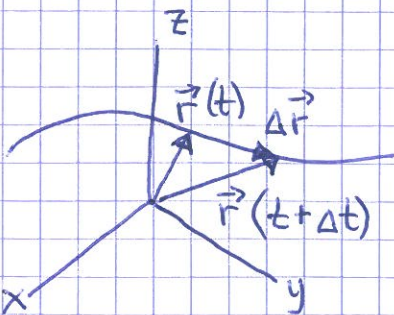
Enhetsvektorer $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$:

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$$

$$[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1 \quad (\text{dimensjonsløs})$$

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 \quad ; \quad \hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \dots = 0$$

Banen $\vec{r}(t)$ beskriver m's bevegelse:



$$\begin{aligned} \Delta \vec{r} &= \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) \\ &= \text{forflytningen mellom} \\ &\quad t \text{ og } t+\Delta t \end{aligned}$$

Hastighet = forflytning pr tidsenhet:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Dvs: $\vec{v} \parallel \Delta \vec{r}$ (da Δt er en skalar)

$\vec{v}$ er tangent til banen

Akselerasjon = hastighetsendring pr tidsenhet: ③

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Vanlig notasjon i fysikk:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2} \quad \text{osv} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}}, \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

Komponenter, kartesiske:

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} &= v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} + \dot{z} \hat{z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \text{osv}$$

$$\text{Tilsvarende: } a_x = \dot{v}_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x} \quad \text{osv}$$

$$\text{Ser at: } \vec{r} \xrightarrow{\text{derivasjon}} \vec{v} \xrightarrow{\text{derivasjon}} \vec{a}$$

Forventer da:

$$\vec{a} \xrightarrow{\text{integrasjon}} \vec{v} \xrightarrow{\text{integrasjon}} \vec{r}$$

som stemmer:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v_x dt$$

$$\Rightarrow \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^t v_x(t) dt$$

$$\Rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v_x(t) dt$$

Tilsvarende:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow dv_x = a_x dt \Rightarrow \dots \Rightarrow v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^t a_x(t) dt$$

Generalisering til 3D:

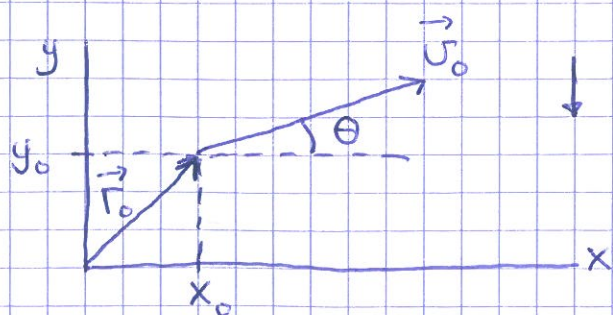
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \dots \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \dots \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt$$

Eks: Anta konstant $\vec{a}$ og $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$.
Bestem $\vec{r}(t)$ og $\vec{v}(t)$.

Løsn: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$; $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t^2$

Eks: Kast i tyngdefeltet



$$\vec{a} = -g \hat{y}$$

Finn $\vec{r}(t)$ og vis at $y(x)$,
banen, er en parabel.

Løsn: $x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 = x_0 + v_0 t \cos \theta$

$$y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 = y_0 + v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2$$

Eliminasjon av t gir $y(x)$ (vis selv)

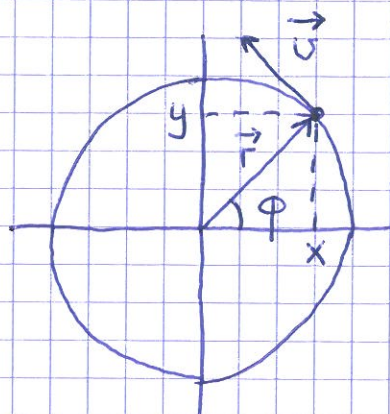
Øving 1: • Kast i motbakke.

• Gitt $a(v)$, hva blir $v(t)$?

Sirkelbevegelse

[YF 3.4 ; LL 1.7, 1.8]

(5)



Polarkoord:

r = avstand fra origo

φ = vinkel mellom $\hat{x}$ og $\vec{r}$

($\varphi > 0$ mot klokke)

Fra fig: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $\tan \varphi = y/x$,

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (= \text{konst. for sirkelbev.})$$

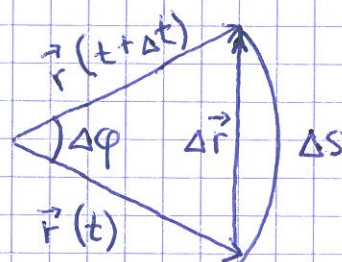
$$\vec{r} = r \cos \varphi \hat{x} + r \sin \varphi \hat{y}$$

Vinkelhastighet = vinkelendring pr tidsenhet:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Vinkel = buelengde / radius:

$$\Delta \varphi = \Delta s / r$$



Når $\Delta t \rightarrow 0$: $\Delta \varphi \rightarrow 0$, $\Delta r = |\Delta \vec{r}| \rightarrow \Delta s = r \Delta \varphi$

$$\Delta \vec{r} \perp \vec{r}$$

Dermed:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r \Delta \varphi}{\Delta t} = r \frac{d\varphi}{dt} = r \omega$$

$$\vec{v} \parallel \Delta \vec{r} \quad \text{og} \quad \Delta \vec{r} \perp \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \perp \vec{r}$$

6

Hvis v og $\omega = v/r$ er konst., har vi uniform sirkelbev., og da er

$$\int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} d\varphi = \omega \int_0^t dt = \omega t, \text{ og med } \varphi(0)=0 \text{ f\u00e5s}$$

$$\boxed{\varphi(t) = \omega t}$$

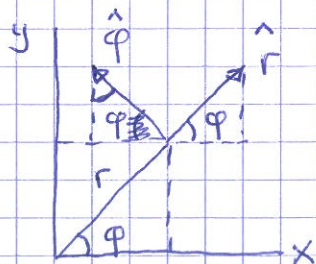
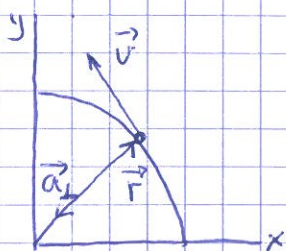
Har da:

$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y} = r \cos \omega t \hat{x} + r \sin \omega t \hat{y}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t) \hat{x} + \dot{y}(t) \hat{y} = -r\omega \sin \omega t \hat{x} + r\omega \cos \omega t \hat{y}$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t) \hat{x} + \ddot{y}(t) \hat{y} = -r\omega^2 \cos \omega t \hat{x} - r\omega^2 \sin \omega t \hat{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_\perp = -\omega^2 \vec{r}} \quad \text{Sentripetalakselerasjon}$$



$$\begin{aligned} \hat{r} &= \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi \\ \hat{\varphi} &= -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\text{Ser at: } \vec{r} = r \hat{r}, \quad \vec{v} = v \hat{\varphi} = r\omega \hat{\varphi}, \quad \vec{a}_\perp = -\omega^2 r \hat{r} = -\frac{v^2}{r} \hat{r}$$

Hvis $v = |\vec{v}|$ endrer seg, har vi ogs\u00e5 baneakselerasjon:

$$a_{||} = \dot{v} = \frac{d}{dt}(v\omega) = r \frac{d\omega}{dt} = r\dot{\omega}$$

$$\text{Total akselerasjon: } \vec{a} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_{||} = -\omega^2 r \hat{r} + r\dot{\omega} \hat{\varphi}$$

$$\text{Vinkelakselerasjon: } \alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \quad ; \quad [\alpha] = 1/s^2$$

$$\text{Periode: } T = \text{oml\u00f8pstid}; [T] = s$$

$$\text{Frekvens: } f = \text{antall omk\u00f8p pr tidsenhet}; [f] = \text{Hz (henz)} = 1/s$$

$$\Rightarrow v = 2\pi r/T \Rightarrow T = 2\pi r/v = 2\pi/\omega, \quad f = 1/T = \omega/2\pi$$

Newtons lover [YF 4,5 ; LL 2,3]

(7)

Eksperimentelle ("empiriske") Lover

N1: $\boxed{\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{konst.}}$

Med null netto ytre kraft $\vec{F}$ på et legeme, forblir legemet i ro eller i retlinjet bevegelse med konstant hastighet $\vec{v}$

N2: $\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$

Med netto ytre kraft $\vec{F}$ på et legeme, får legemet en akselerasjon prop. med $\vec{F}$, $\vec{a} = \vec{F}/m$; $m =$ legemets masse

N3: $\boxed{\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}}$

Hvis A virker på B med kraft $\vec{F}_{AB}$, virker B på A med kraft $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$.

Legemene vekselvirker med hverandre.

Enhet: $[F] = [m \cdot a] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{N} \quad (\text{newton})$