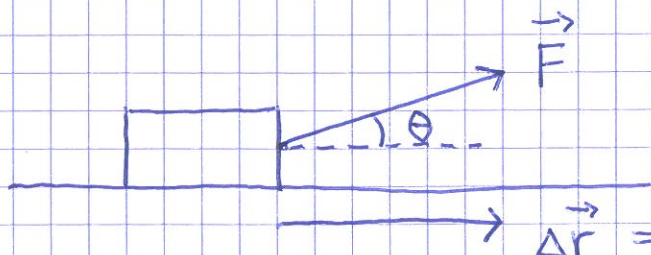


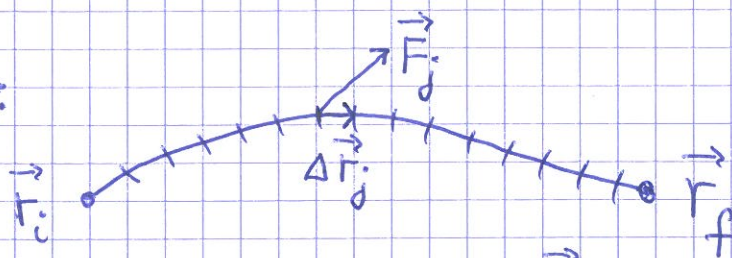
Arbeid og energi [YF 6,7 ; LL 4]Arbeid [YF 6.1-6.3 ; LL 4.1]

$\Delta \vec{r}$ = legemets forflytning

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta = \text{arbeid utført av ytre kraft } \vec{F} \text{ på legemet}$$

$$[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J} \quad (\text{joule})$$

Generelt:



$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j \quad \xrightarrow{\Delta \vec{r}_j \rightarrow 0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

= arbeid utført av $\vec{F}$ ved forflytning fra $\vec{r}_i$ til $\vec{r}_f$

Effekt [YF 6.4 ; LL 4.1]

effekt = arbeid (evt. energi) pr tidsenhet

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot d\vec{r}/dt = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$[P] = \text{J/s} = \text{W} \quad (\text{watt})$$

Eks: Hva er $\langle P \rangle$ på en hybel som bruker
4 MWh el.energi pr år?

Løsn: $\langle P \rangle = 4 \cdot 10^6 \text{ Wh} / [365 \cdot 24 \text{ h}] = 457 \text{ W} \approx \underline{\underline{0.5 \text{ kW}}}$

Kinetisk energi [YF 6.2; LL 4.2]



$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} \stackrel{N2}{=} \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$d(v^2) = d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = d\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot d\vec{v} = 2\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} m \int_{v_i^2}^{v_f^2} d(v^2) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2} m v^2$

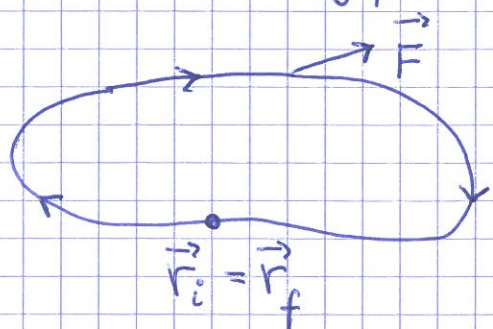
Dermed: $\boxed{W = K_f - K_i = \Delta K}$

Arbeid W utført på legemet tilsvarer endringen ΔK i legemets kinetiske energi.

Konservativ kraft [YF 7.3; LL 4.4]

(22)

Et system som ikke taper mekanisk energi til andre energiformer (f.eks. varme) er konservativt



Hvis $\vec{F}$ er konservativ,
er $K_f = K_i$ (dvs $|\vec{v}_f| = |\vec{v}_i|$),
dvs $W = \Delta K = 0$.

$$\Rightarrow \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Konservativ kraft

↑
Integral rundt
lukket kurve

Potensiell energi [YF 7.1-7.4; LL 4.3-4.4]

Når $\vec{F}$ er en konservativ kraft, er potensiell energi

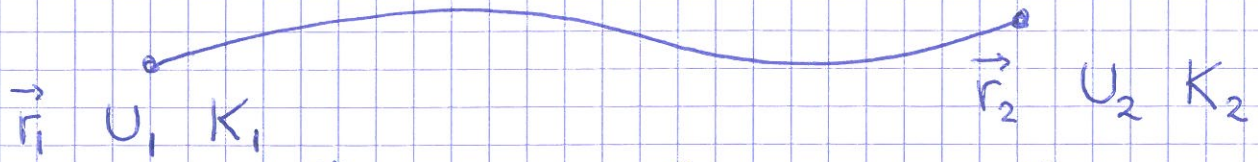
$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

der vi har valgt $U(\vec{r}_0) = 0$.

Bare forskjeller i pot. energi har fysisk betydning.

Mekanisk energibevarelse [YF 7.1-7.3; LL 4.5] (23)

Anta kons. system.



$$\begin{aligned} U_1 - U_2 &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= W = K_2 - K_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{K_1 + U_1 = K_2 + U_2}$$

Dvs: Total mekanisk energi

$$E = K + U$$

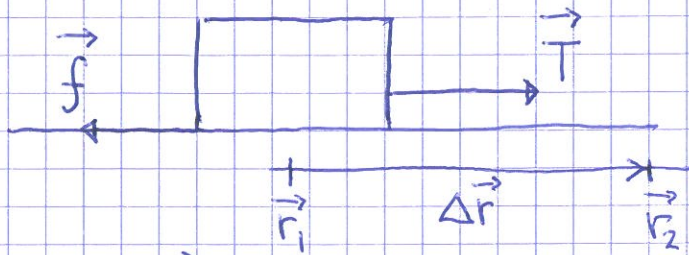
er konstant (bevarer)

i et konservativt system.

Friksjonsarbeid

[YF 7.3 ; LL 4.5]

(24)



$$W_f = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \quad \text{da } \vec{f} \text{ alltid har}$$

retning mot $d\vec{r}$. Friksjonsarbeidet W_f

"går tapt": Mekanisk energi omdannes til varme.

Når $\vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$ alltid, er selvsagt også

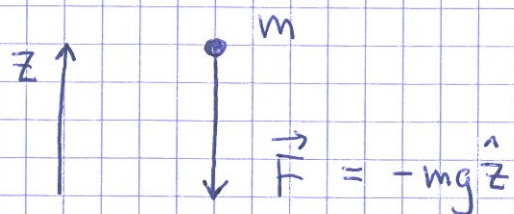
$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0,$$

dvs friksjonskraften $\vec{f}$

er ikke konservativ.

Eks 1: Fritt fall

(25)



Anta $U(0) = 0$ og $v(0) = 0$.
Bestem $U(z)$ og $v(z)$; $z < 0$.

Løsn:
$$U(z) = - \int_0^z \underbrace{(-mg\hat{z})}_{\vec{F}} \cdot \underbrace{(\hat{z} dz)}_{d\vec{r}} = \underline{\underline{mgz}}$$

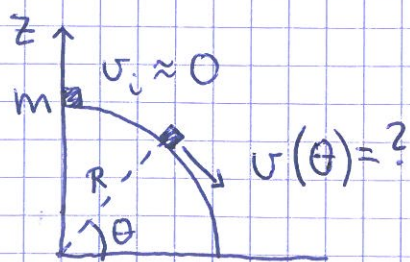
Total mek. energi er bevart

$$\Rightarrow U(z) + K(z) = U(0) + K(0) = 0$$

$$\Rightarrow mgz + \frac{1}{2}mv(z)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v(z) = \sqrt{-2gz}}} \quad (z < 0)$$

Eks 2: Glatt kuleformet tak



Løsn: E er bevart. Anta $U(0) = 0$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv(\theta)^2 + mgz(\theta) = mgR$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v(\theta) = \sqrt{2gR(1 - \sin\theta)}}}$$

- Hvor mister m kontakten med underlaget? ($N \rightarrow 0$)
- Hvordan ta hensyn til friksjon?
- Hva skjer hvis legemet ruller og "slurer"?

Impuls [YF 8 ; LL 5]

(26)

[evt. bevegelsesmengde ; eng: (linear) momentum]

$$N2: \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \begin{array}{l} \text{hvis} \\ m = \text{konst.} \end{array} \quad \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Impuls = masse · hastighet

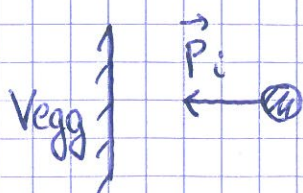
$$\vec{p} = m \vec{v} ; [p] = \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \quad N2$$

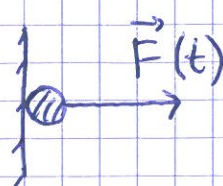
Impulsbevarelse:

Hvis $\sum \vec{F}_{\text{ytre}} = 0$, er legemets impuls bevart.

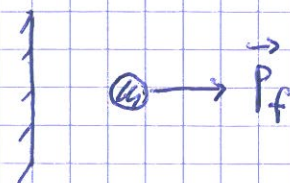
Ytre $\vec{F}$ gir impulsendring:



Før



Kollisjon



Etter

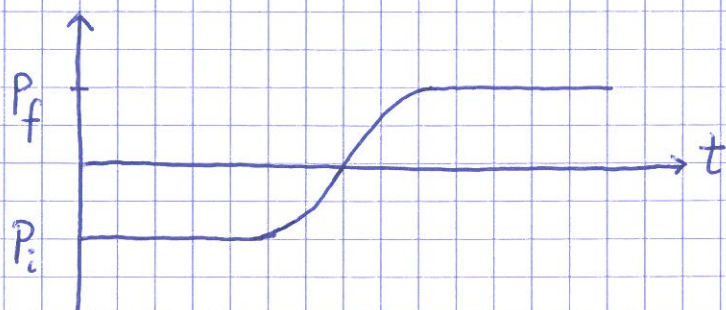


Impulsendring i
kollisjon med vegg:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

$$= \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p}$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt$$



Kollisjoner [YF 8.3, 8.4 ; LL 5.3]

Elastisk støt: $\Delta K = 0$ (mek. energi bevart)

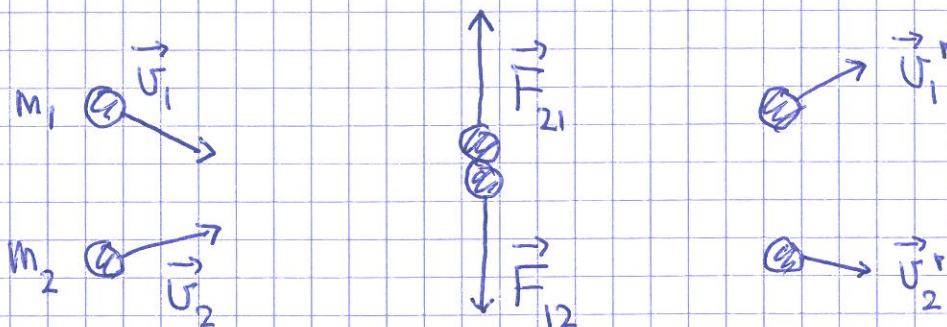
Uelastisk "": $\Delta K < 0$ (—" — ikke bevart)

Fullstendig uelastisk støt: Kolliderende legemer henger sammen, med felles hastighet, etter kollisjonen. Max energitap $|\Delta K|$.

Tapt mek. energi $\rightarrow$ deformasjon, lyd, varme...

$$\vec{F}_{\text{ytre}} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{p}_{\text{tot}} = 0$$

Indre krefter endrer ikke $\vec{p}_{\text{tot}}$:



Før

Kollisjon

Etter

$$N2: \vec{F}_{21} = d\vec{p}_1/dt, \quad \vec{F}_{12} = d\vec{p}_2/dt$$

$$N3: \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konst.}$$

Eks: Anslå $\langle F \rangle$ (midlere kraft) i et slag på en bordtennisball. ($m = 2.7 \text{ g}$)

(29)

Løsn: Anslår $v_i \sim 10 \text{ m/s}$, $v_f \sim 30 \text{ m/s}$, $\Delta t_{(\text{koll})} \sim 1 \text{ ms}$

$$\Rightarrow \langle F \rangle = \frac{m \Delta v}{\Delta t} = \frac{2.7 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 40 \text{ m/s}}{10^{-3} \text{ s}} = \underline{108 \text{ N}}$$

$$\langle F \rangle / mg = \frac{\Delta v}{g \Delta t} = \frac{\langle a \rangle}{g} = \frac{40000 \text{ m/s}^2}{10 \text{ m/s}^2} = \underline{4000}$$

Dvs, OK å neglisjere ytre kraft mg i kollisjonen

Sentralt støt [YF 8.2-8.4 ; LL 5.3]

Før: $m \xrightarrow{u} \quad \quad \quad \xleftarrow{V} M$ (i)

Etter: $u' \xleftarrow{m} \quad \quad \quad M \xrightarrow{V'}$ (f)

[I fig: $u, V' > 0$, $u', V < 0$]

$$\Delta p = 0 \Rightarrow \underbrace{mu + MV}_{P_i} = \underbrace{mu' + MV'}_{P_f}$$

(a) Fullstendig uelastisk:

(30)

$$u' = V' = \frac{mu + MV}{m+M}$$

(b) Delvis uelastisk: Kun 1 lign. ($\Delta p = 0$)
for 2 ukjente (u', V'). Må ha 1 opplysning ekstra.

(c) Elastisk, $\Delta K = 0$:

$$\frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mu'^2 + \frac{1}{2}MV'^2$$

$$\Rightarrow m(u+u')(u-u') = M(V'+V)(V'-V) \quad (1)$$

$$\Delta p = 0 \Rightarrow m(u-u') = M(V'-V) \quad (2)$$

$$(1)/(2) \Rightarrow u + u' = V + V'$$

$$\Rightarrow u' - V' = -(u - V) \quad (3)$$

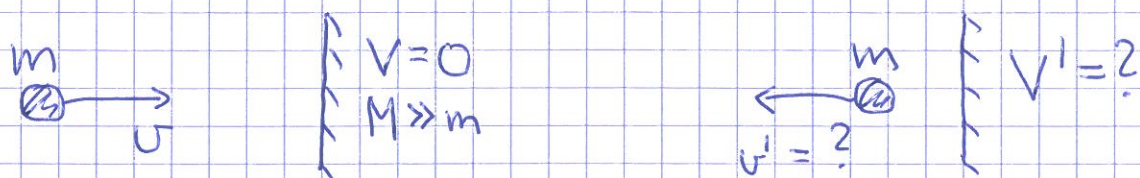
(2) og (3) gir

$$u' = \frac{M}{m+M} \left(2V + u \frac{m-M}{M} \right)$$

$$V' = \frac{m}{M+m} \left(2u + V \frac{M-m}{m} \right)$$

Eks: Ball mot vegg, elastisk.

(31)



Løsn:
$$v' = \frac{M}{m+M} \left(0 + v \frac{m-M}{M} \right) \approx \frac{M}{M} \cdot v \cdot \left(\frac{-M}{M} \right) = -v$$

$$V' = \frac{m}{M+m} (2v + 0) \approx \frac{m}{M} \cdot 2v \approx 0$$

Er $\Delta p = 0$?

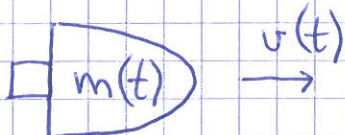
$$\left. \begin{aligned} p &= mv, \quad P = MV = 0, \quad p' = mv' = -mv, \\ P' &= MV' \approx M \cdot \frac{m}{M} \cdot 2v = 2mv \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{\Delta p = 0}$$

Er $\Delta K = 0$?

$$\left. \begin{aligned} K_m &= \frac{1}{2}mv^2, \quad K_M = 0, \quad K'_m = \frac{1}{2}mv'^2, \\ K'_M &= \frac{1}{2}MV'^2 \approx \frac{1}{2}M \left(\frac{m}{M} 2v \right)^2 = 2 \frac{m}{M} mv^2 \approx 0 \end{aligned} \right\} \Downarrow \underline{\Delta K = 0}$$

Rakettprinsipp [YF 8.6; LL 5.4]

(32)

Før (t) :  $p(t) = m(t)v(t)$

Efter $(t+dt)$:  $v_e \leftarrow$ eksos $\rightarrow v(t+dt)$
 dm_e

$$p(t+dt) = \underbrace{m(t+dt)}_{m(t)+dm} \underbrace{v(t+dt)}_{v(t)+dv} + \underbrace{dm_e}_{-dm} \underbrace{v_e(t)}_{v(t)+u}$$

$u =$ eksoshastighet relativt raketten $= v_e - v < 0$

$dm =$ rakettenes masseendring i løpet av $dt < 0$

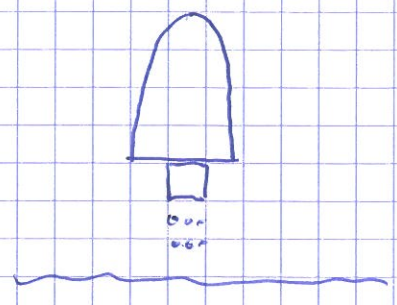
$$\Rightarrow p(t+dt) = \underbrace{m(t)v(t)}_{p(t)} + m(t)dv + \underbrace{v(t)dm - v(t)dm}_0 - u dm$$

Med $F_{ytre} = 0$ (outer space) er $p(t+dt) = p(t)$

$$\Rightarrow m dv = u dm$$

$$\Rightarrow \underbrace{m dv/dt}_{m \cdot a} = u dm/dt = \underbrace{u \dot{m}}_{F_{skyv}} (> 0)$$

I tyngdefelt :



$$F_{\text{ytre}} = -mg$$

⇒ Total kraft på (rest-)raketten blir

$$F_{\text{skyt}} + F_{\text{ytre}} = u\dot{m} - mg$$

Som gir

$$ma = u\dot{m} - mg \quad (N2)$$

Hittil : "Punktmasser"

Nå : Partikkelsystemer. Stive legemer.