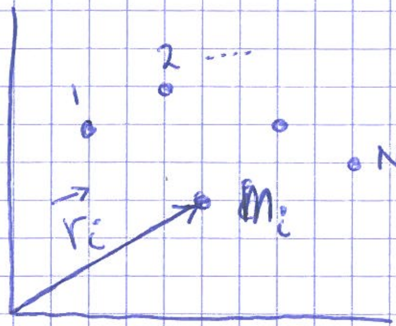
Massesenter. Tyngdepunkt

[YF 8.5, oppg 8.115+8.116 ; LL 5.6, 5.8, 6.1]

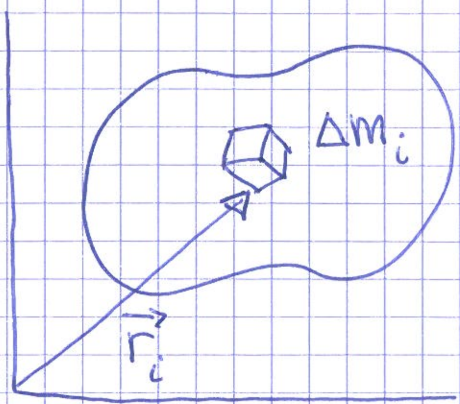


Massesenter (CM) for N punktmasser $m_1\ m_2 \cdots m_N$ i posisjoner $\vec{r}_1\ \vec{r}_2 \cdots \vec{r}_N$:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$M = \sum_i m_i = \text{total masse}$$

Kontinuerlig massefordeling:



$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum_i \Delta m_i} \xrightarrow{\Delta m_i \to 0} \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm}$$

$$= \frac{1}{M} \int \vec{r}\, dm$$

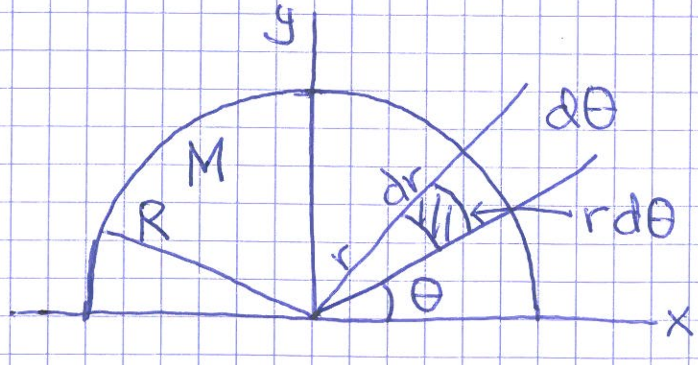
integral over der vi har masse

3D : $dm = \rho\, dV$, ρ = masse pr volumenhet,
dV = volumelement

2D : $dm = \sigma\, dA$, σ = masse pr flateelement,
dA = flateelement

1D : $dm = \lambda\, dl$, λ = masse pr lengdeenhet,
dl = linjeelement

Eks: Halvsirkulær tynn skive



$$dA = dr \cdot r\, d\theta$$

$$\frac{dm}{M} = \frac{dA}{A} = \frac{r\, dr\, d\theta}{\frac{1}{2}\pi R^2}$$

$$\vec{r} = \hat{x}\, r\cos\theta + \hat{y}\, r\sin\theta$$

$\vec{R}_{CM} = \hat{x}\, X_{CM} + \hat{y}\, Y_{CM}$; $X_{CM} = 0$ pga symmetri

$Y_{CM} \lesssim R/2$ (rektangel  gir $Y_{CM} = R/2$)

Exp. gir $Y_{CM} \approx 7R/18$ (papp og pinne!)

$$Y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm = \int r\sin\theta\,\frac{dA}{A} =$$

$$= \frac{2}{\pi R^2}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi} r\sin\theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi R^2}\underbrace{\int_0^R r^2\,dr}_{\frac{1}{3}R^3} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta}_{\left.(-\cos\theta)\right|_0^{\pi} = 1+1 = 2}$$

$$= \frac{4}{3\pi}R \approx 0.42R$$

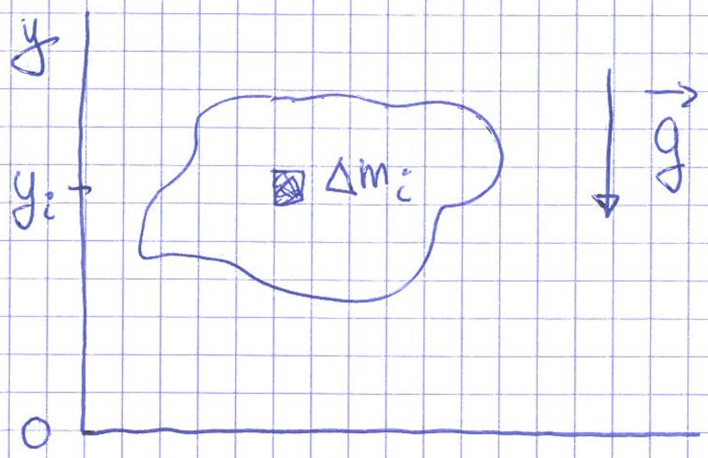
Vis selv:

Halvsirkulær tynn stang: $Y_{CM} = \frac{2}{\pi}R$ (1D)

Kompakt halvkule: $Y_{CM} = \frac{3}{8}R$ (3D)

[Tips: Omdreining av skiva rundt y-aksen gir halvkule, med volumelement $dV = dA \cdot 2\pi x$. Integrasjon over r fra 0 til R og over θ fra 0 til $\pi/2$ (hvorfor ikke π ?!) får med all massen. Volum av halvkule kjenner du (?)]

Potensiell energi U for partikkelsystem i tyngdefeltet



Velger $U(0) = 0$

$$U = \sum_i \Delta U_i = \sum_i \Delta m_i \, g \, y_i$$

Hvis g = konst. :

$$U = g \sum_i \Delta m_i y_i = \underline{g M Y_{CM}}$$

det samme som om hele massen $M = \sum_i \Delta m_i$

var samlet i høyden Y_{CM} !

(Og da f.eks. i nettopp $\vec{R}_{CM}$)

[Dette har vi antatt "hele livet".

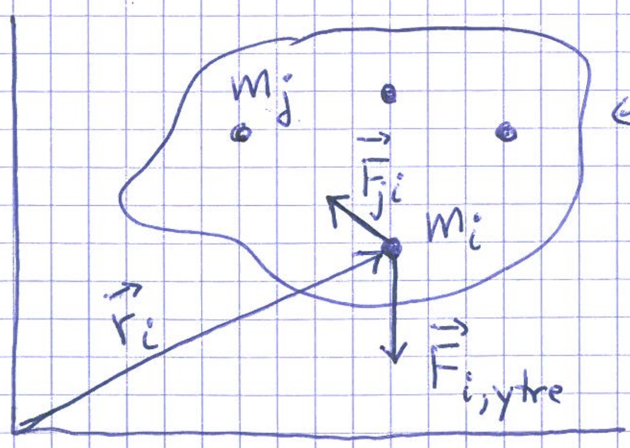
Nå vet vi at det er OK !]

Tyngdepunktbevegelsen [YF 8.5; LL 5.8]

Skal se at: $\boxed{M\ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{ytre}}$

Dvs:

Tyngdepunktet $\vec{R}_{CM}$ beveger seg som om hele massen M var samlet i $\vec{R}_{CM}$ og ble utsatt for summen av alle ytre krefter, $\vec{F}_{ytre}$, som virker på systemet!



$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

N2 for m_i:

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \underbrace{\vec{F}_{i,ytre}}_{\substack{\text{total ytre} \\ \text{kraft på } m_i}} + \underbrace{\sum_{j\neq i} \vec{F}_{ji}}_{\substack{\text{total indre} \\ \text{kraft på } m_i}}$$

Legg sammen N2 for alle massene:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \underbrace{\sum_i \vec{F}_{i,ytre}}_{\substack{=\text{ netto ytre} \\ \text{kraft } \vec{F}_{ytre} \\ \text{på systemet}}} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{\substack{= \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} + \dots + \vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N} \\ = 0 \quad (\text{pga N3})}}$$

Venstre side:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2}\left\{\sum_i m_i \vec{r}_i\right\} = \frac{d^2}{dt^2}\left\{M\vec{R}_{CM}\right\} = M\ddot{\vec{R}}_{CM}$$

Dermed: $$\boxed{M\ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{ytre}}$$

Bevegelse i tillegg til tyngdepunktbevegelsen:

- Rotasjon om CM
- Vibrasjon relativt CM

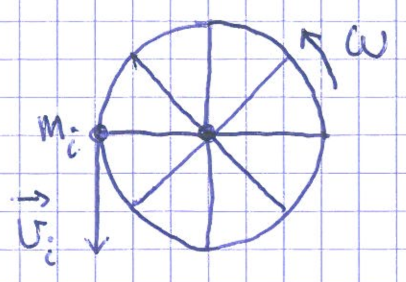
Stive legemer:

Kun translasjon av CM + rotasjon om CM

ROTASJON [YF 9,10; LL 6 (5)] 40

Innledning:

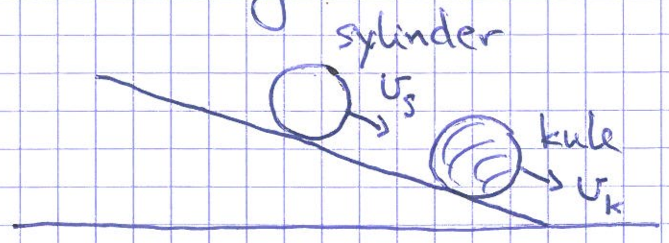
- Roterende hjul



CM i ro $\Rightarrow K_{trans} = 0$, men
$K_{rot} \neq 0$

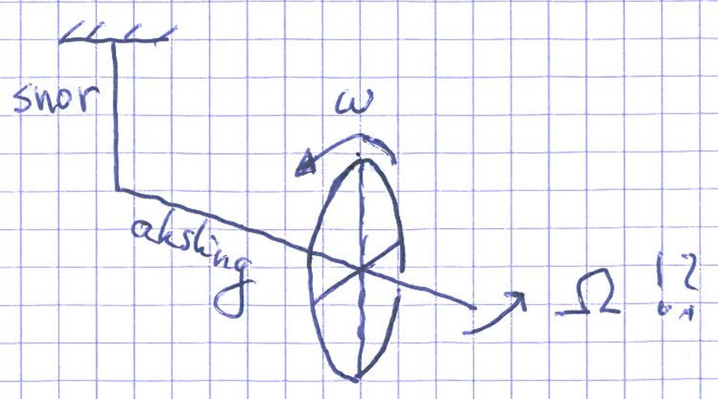
Impuls?
$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = 0$, men
dreieimpuls $\neq 0$

- Rulling



Hvor angriper kreftene?
Dreiemoment!
Hvorfor er $v_k > v_s$?
Friksjonens rolle

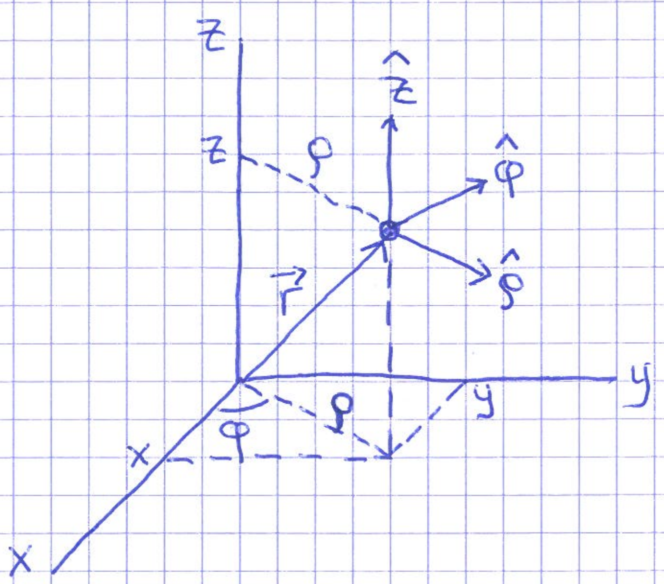
- Mer komplisert dynamikk



Presesjon
Gyroskop

Sirkelbevegelse [YF 9.1–9.3; LL 1.8]

Antar rotasjon om gitt akse, z-aksen, og bruker sylinderkoord. (= polarkoord. + z)



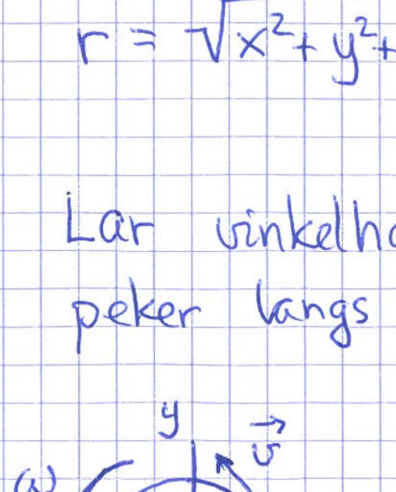
$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z} \quad (= x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})$$

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \tan\varphi = y/x$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\rho^2+z^2}$$

Lar vinkelhastigheten bli vektor som peker langs rotasjonsaksen:

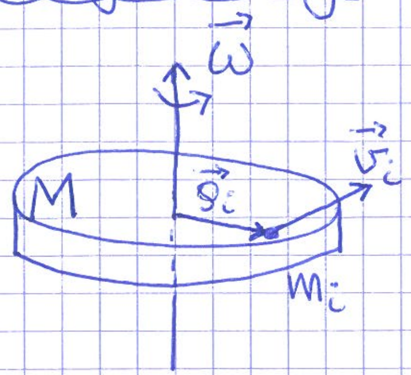


$$\vec{\omega} = \omega\hat{z} \quad (= \omega\hat{\omega}), \quad \vec{\rho} = \rho\hat{\rho}$$

$$\vec{v} = \rho\omega\,\hat{\varphi}$$

Ser at $\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}}$ gir riktig retning ($\hat{\varphi} = \hat{z} \times \hat{\rho}$) og tallverdi ($v = \omega\rho$)

Rotasjonsenergi [YF 9.4; LL 6.4]



$$K = K_{rot} = \sum_i K_i = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$= \sum_i \tfrac{1}{2} m_i (\rho_i \omega)^2 = \underline{\tfrac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i \rho_i^2 \right\} \omega^2}$$

Treghetsmoment [YF 9.4; LL 6.3]

$I = \sum_i m_i \rho_i^2$ = legemets treghetsmoment mhp gitt akse

Med kont. massefordeling:

$m_i \rightarrow \Delta m_i \xrightarrow{\Delta m_i \to 0} dm$ og $\sum_i \rightarrow \int$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = \int \rho^2 \, dm}$$

(der ρ = avstand fra aksen til dm)

Dermed:

$$\boxed{K_{rot} = \tfrac{1}{2} I \omega^2}$$

Kinetisk energi for stivt legeme [YF 10.3 ; LL 6.6]

Generell bevegelse: Translasjon av CM + Rotasjon om CM

$$\Rightarrow \boxed{K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2}$$

M = massen, $V = \dot{\vec{R}}_{CM}$,

I_0 = treghetsmoment mhp rot.aksen gjennom CM

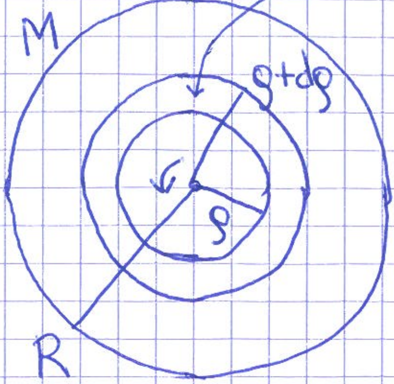
$\vec{\omega}$ = vinkelhast. for rot. omkring —— " ——

Eksempler på beregning av I [YF 9.6 ; LL 6.3]

Eks 1: Ring (evt. sylinderskall)

$$I_0 = \int_{ring} \rho^2 dm = R^2 \int_{ring} dm = \underline{\underline{MR^2}}$$

Eks 2: Sirkulær skive (evt. kompakt sylinder)

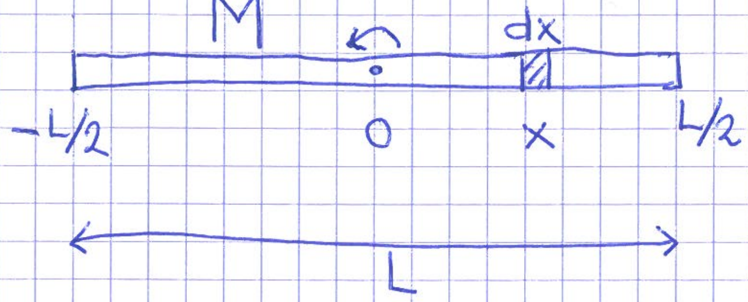


$$dI_0 = dm \cdot \rho^2 \ ; \quad dm = M \frac{dA}{A} = M \cdot \frac{2\pi \rho \, d\rho}{\pi R^2}$$

$$\Rightarrow I_0 = \int dI_0 = \int_0^R M \frac{2\pi \rho \, d\rho}{\pi R^2} \rho^2$$

$$= \frac{2M}{R^2} \underbrace{\int_0^R \rho^3 d\rho}_{R^4/4} = \underline{\underline{\frac{1}{2} MR^2}}$$

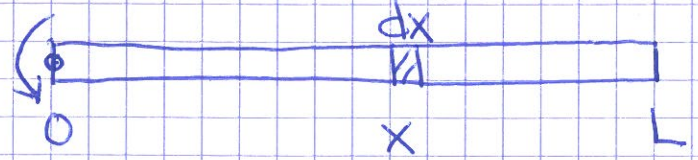
Eks 3: Tynn stang



$$\rho = x, \quad dm = M\,dx/L$$

$$\Rightarrow I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 M\,dx/L = \frac{M}{L}\left|_{-L/2}^{L/2} \frac{x^3}{3}\right. = \underline{\underline{\frac{1}{12}ML^2}}$$

Eks 4: Mhp akse gjennom stangas ende

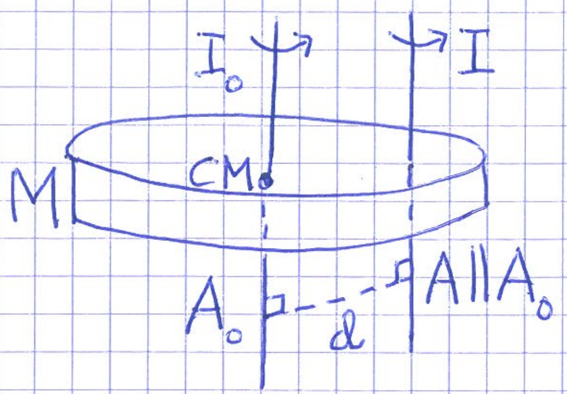


$$I = \int_0^L x^2 M\,dx/L = \underline{\underline{\frac{1}{3}ML^2}}$$

Eks 5: Kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3}MR^2$

Eks 6: Kompakt kule: $I_0 = \frac{2}{5}MR^2$

Steiners sats [YF 9.5; LL 6.3]



$$\boxed{I = I_0 + Md^2}$$

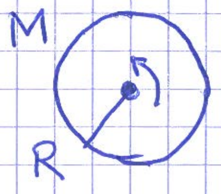
Eks 1: Tynn stang

$\xRightarrow{d=L/2}$

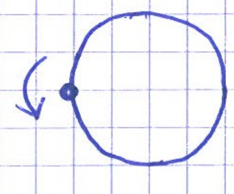
$$I_0 = \frac{1}{12}ML^2$$

$$I = I_0 + M(L/2)^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

Eks 2: Kuleskall



$\xRightarrow{d=R}$



$$I_0 = \frac{2}{3}MR^2$$

$$I = I_0 + MR^2 = \frac{5}{3}MR^2$$