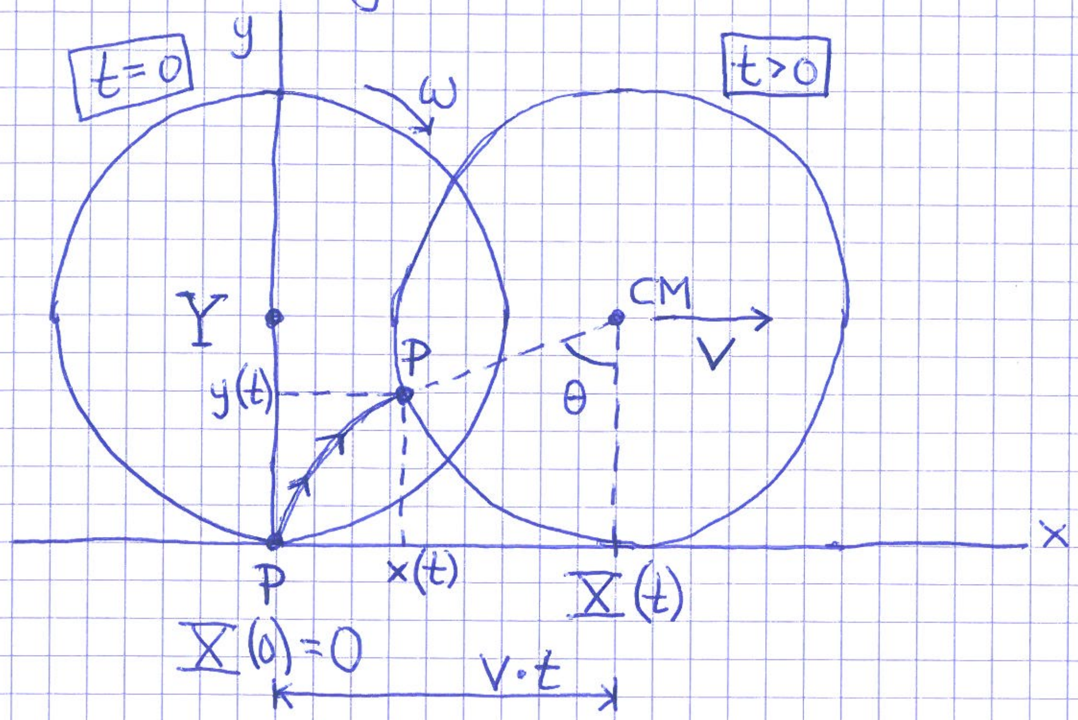
Rulling og sluring [YF 10.3 ; LL 6.7]

Ren rulling



P = punkt på periferien ; $(x(t), y(t))$ = banen til P

$V = \dot{R}_{CM} = \dot{\underline{X}}$; $\underline{Y} = R$

$\omega = \dot{\theta}$

$\underline{X} = V \cdot t = R \cdot \theta$

$V = \dot{\underline{X}} = R\dot{\theta} = R\omega$

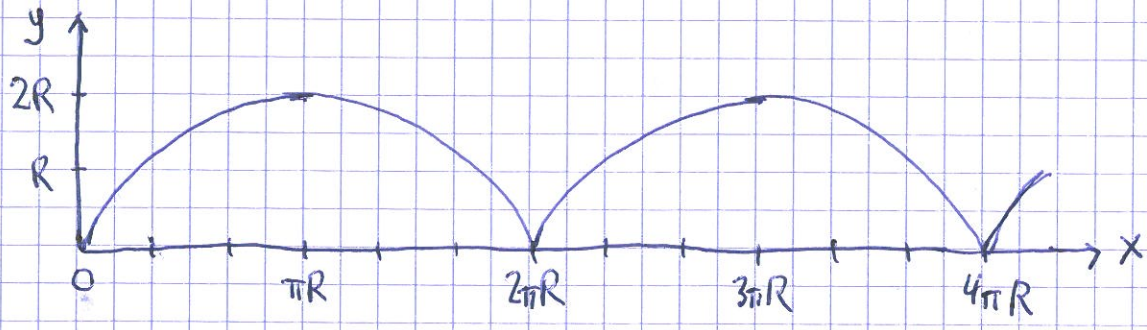
$A = \ddot{\underline{X}} = \dot{V} = R\ddot{\theta} = R\dot{\omega} = R\alpha$

Rullebetingelser : $\boxed{V = R\omega, \quad A = R\alpha}$

Banen til P:

$$x = X - R\sin\theta \quad , \quad y = R - R\cos\theta$$

Sykloide:

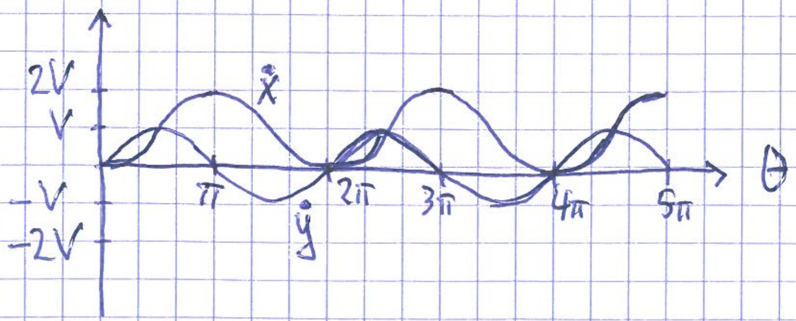


Hastigheten til P:

$$\dot{x} = \dot{X} - R\dot{\theta}\cos\theta = V(1-\cos\theta)$$

$$\dot{y} = R\dot{\theta}\sin\theta = V\sin\theta$$

$$\Rightarrow \vec{v}(\theta) = \hat{x}\,V(1-\cos\theta) + \hat{y}\,V\sin\theta$$



K ved ren rulling:

$$I_0 = c \cdot MR^2 \quad (c=1 \text{ for ring etc}) \quad ; \quad \omega = V/R$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}cMR^2\frac{V^2}{R^2} = \underline{\underline{(1+c)\cdot\frac{1}{2}MV^2}}$$

Sluring

$\omega \neq V/R \Rightarrow$ relativ hastighet $v = V - \omega R \neq 0$ mellom legeme og underlag i kontaktpunktet

$\Rightarrow$ legemet roterer og glir ; legemet slurer

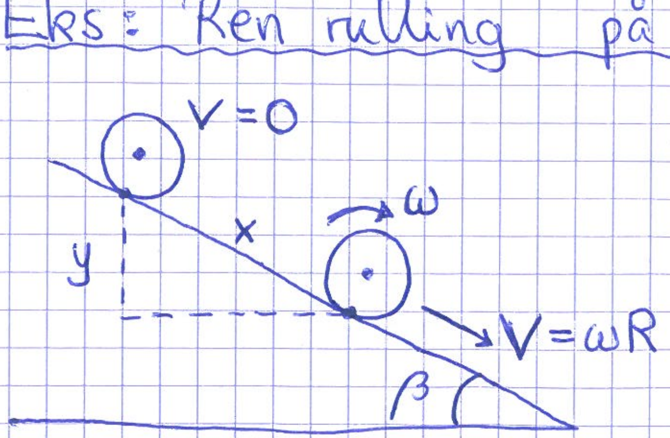
Effekttap: $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0 \qquad (f = |\vec{f}| = \mu_k N)$

Hvis ren rulling, $v = 0$: $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0$

Statisk friksjon $f \leq \mu_s N$; $\vec{f}$ rettet mot "tenkt relativhast." $\vec{v}$ hvis det ikke hadde vært friksjon.

[I praksis litt tap av mek. energi også ved ren rulling pga "rullefriksjon".]

Eks: Ren rulling på skråplan [YF 10.3; LL 6.8]



M = masse, R = radius, $I_0 = cMR^2$

Finn $\dot{V}$, samt minste tillatte μ_s for ren rulling.

Exp viser: $\dot{V}(\text{kule}) > \dot{V}(\text{skive}) > \dot{V}(\text{kuleskall}) > \dot{V}(\text{hul sylinder})$

Løsning: E er bevart $\Rightarrow Mgy = (1+c)\cdot\frac{1}{2}MV^2$ (49)

$$y = x\sin\beta$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow V = \sqrt{2gx\sin\beta/(1+c)}\\ \\ \end{array}\right\} \Rightarrow \text{exp. er forklart!}$$

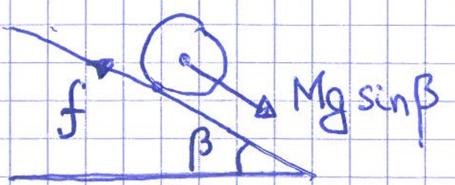
Objekt	kule	skive	kuleskall	hul sylinder
c	2/5	1/2	2/3	1

Akselerasjonen:

$$\dot{V} = \sqrt{\frac{2g\sin\beta}{1+c}}\cdot\frac{d}{dt}\sqrt{x}\ ; \quad \frac{d}{dt}\sqrt{x} = \frac{1}{2}x^{-1/2}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{V}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \dot{V} = \sqrt{\frac{2g\sin\beta}{1+c}}\cdot\frac{\sqrt{2gx\sin\beta/(1+c)}}{2\sqrt{x}} = \underline{\underline{g\cdot\frac{\sin\beta}{1+c}}}$$

Hvis bare $G_{\parallel} = Mg\sin\beta$ virket langs skråplanet, ville $\dot{V}$ ha blitt $g\sin\beta$. Friksjon f, rettet oppover skråplanet, reduserer $\dot{V}$ med faktoren $1/(1+c)$:



$$Mg\sin\beta - f = M\dot{V} = \frac{Mg\sin\beta}{1+c}$$

$$\Rightarrow f = Mg\sin\beta\cdot\left\{1 - \frac{1}{1+c}\right\}$$

$$= \frac{c}{1+c}Mg\sin\beta$$

Men: $f_{max} = \mu_s N = \mu_s Mg\cos\beta$

$\Rightarrow$ Ren rulling bare mulig hvis

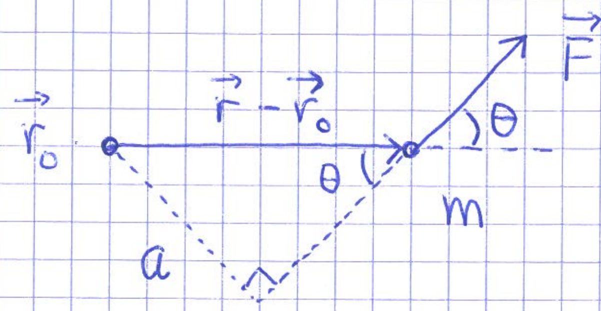
$$\mu_s Mg\cos\beta \geq \frac{c}{1+c}Mg\sin\beta$$

$$\underline{\underline{\mu_s \geq \frac{c}{1+c}\tan\beta}}$$

Kule (kompakt): $\mu_s \geq \frac{2}{7}\tan\beta$ osv.

Rotasjonsdynamikk

Dreiemoment [YF 10.1 ; LL 5.5, 6.4]



$$\boxed{\vec{\tau} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}}$$ = $\vec{F}$'s dreiemoment på m, relativt valgt referansepunkt $\vec{r}_0$

Retning:

$\vec{\tau} \perp \vec{F}$ og $\vec{\tau} \perp \vec{r} - \vec{r}_0$ (ut av planet i figuren)

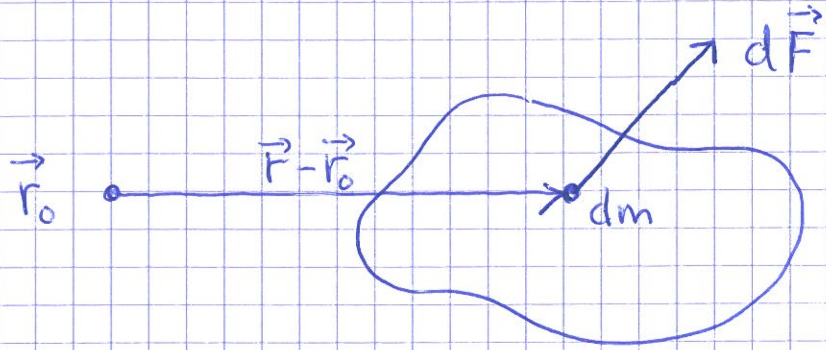
Absoluttverdi:

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r} - \vec{r}_0| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin\theta$$

$$= a \cdot F$$

(= arm · kraft)

For partikkelsystem:



$$d\vec{\tau} = (\vec{r}-\vec{r}_0) \times d\vec{F}$$

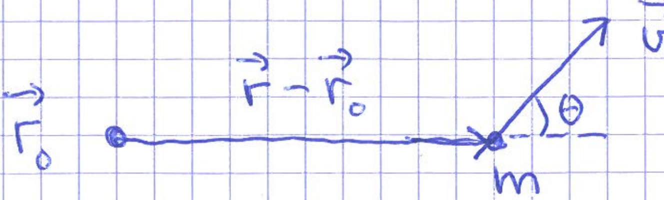
$$\vec{\tau} = \int d\vec{\tau} = \int (\vec{r}-\vec{r}_0) \times d\vec{F}$$

= totalt dreiemoment på legemet, relativt $\vec{r}_0$

Fra før: Netto ytre $\vec{F}$ $\Rightarrow$ endring i impulsen $\vec{p}$

Nå: Netto ytre $\vec{\tau}$ $\Rightarrow$ endring i dreieimpulsen $\vec{L}$

Dreieimpuls [YF 10.5 ; LL 6.6]



$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\boxed{\vec{L} = (\vec{r}-\vec{r}_0) \times \vec{p}}$$ = m's dreieimpuls, relativt $\vec{r}_0$

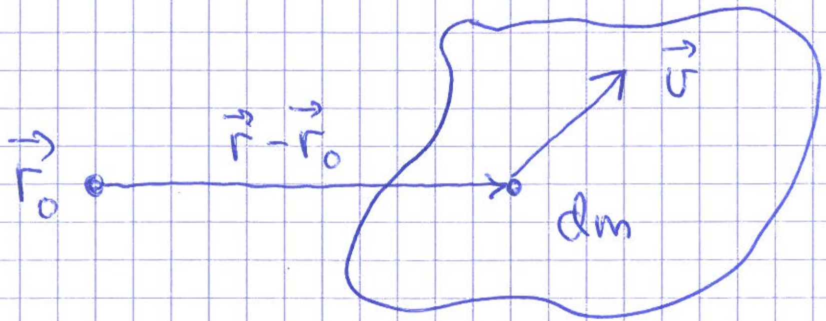
Retning:

$$\vec{L} \perp \vec{p} \quad \text{og} \quad \vec{L} \perp \vec{r} - \vec{r}_0$$

Absolittverdi:

$$|\vec{L}| = |\vec{r} - \vec{r}_0| \cdot |\vec{p}| \cdot \sin\theta \quad = a \cdot p \quad (\text{arm} \cdot \text{impuls})$$

For partikkelsystem:



$$d\vec{L} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{p} = dm\,(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v}$$

$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int dm\,(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v}$$

= legemets totale dreieimpuls, relativt $\vec{r}_0$

N2 for rotasjon [YF 10.5 ; LL 6.6]

N2 : $\vec{F} = m\vec{a} = m\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{p}}$

Anta fast $\vec{r}_0$, evt. $\dot{\vec{r}}_0 \parallel \vec{v}$, for da er $\dot{\vec{r}}_0 \times \vec{v} = 0$

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}\left\{m(\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{v}\right\} = \underbrace{m\vec{v}\times\vec{v}}_{=0} + m(\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{a}$$

$$\overset{N2}{=} (\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{F} \overset{(def)}{=} \vec{\tau}$$

For partikkelsystem:

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}\int dm\,(\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{v} = \int dm\,(\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{a}$$

$$\overset{N2}{=} \int (\vec{r}-\vec{r}_0)\times d\vec{F} = \int d\vec{\tau} = \vec{\tau}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{\tau} = d\vec{L}/dt}$ N2, rotasjon

der

$\vec{\tau}$ = netto ytre dreiemoment på legemet

$\vec{L}$ = legemets dreieimpuls

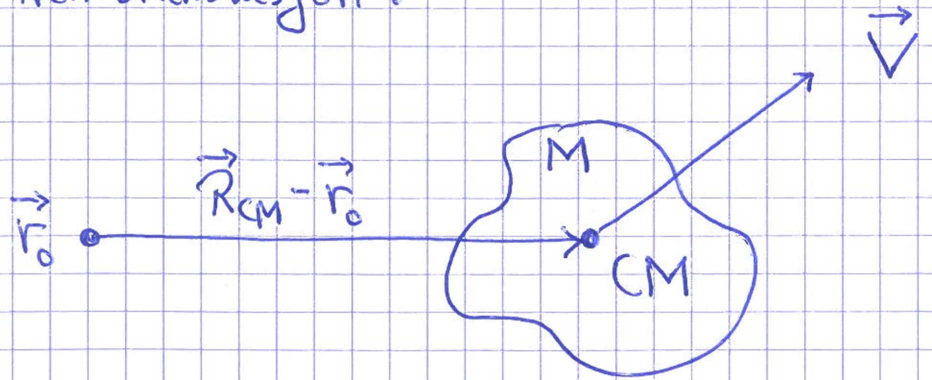
NB: <u>Samme</u> ref.punkt $\vec{r}_0$ i $\vec{\tau}$ og $\vec{L}$!

Bevaringslover, oppsummert

- $\vec{F}_{ytre} = 0$ (isolert system) $\Rightarrow$ $E_{(total)}$, $\vec{p}$ og $\vec{L}$ bevart
  (ingen ytre krefter)
- Konservativt system $\Rightarrow$ mek. energi $E = K + U$ bevart
- $\sum \vec{F}_{ytre} = 0 \Rightarrow \vec{p}$ bevart
- $\sum \vec{\tau}_{ytre} = 0 \Rightarrow \vec{L}$ bevart

$\vec{L}$ for stivt legeme [YF 10.5 ; LL 6.6]

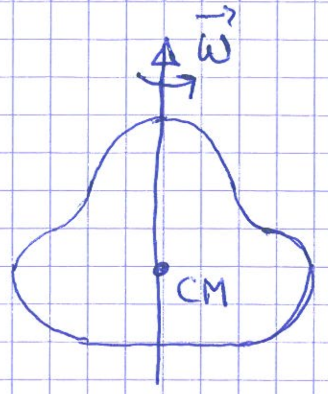
Ren translasjon:



$$\xRightarrow[\text{def.}]{\text{Fra}} \quad \vec{L}_b = M\left(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0\right) \times \vec{V}$$

$$= \text{banedreieimpuls}$$

Ren rotasjon; om akse gjennom CM:



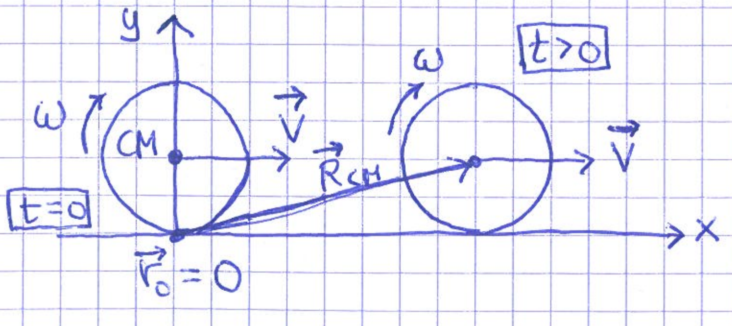
Med refleksjonssymmetri om rotasjonsaksen er

$\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega}$ = indre dreieimpuls, spinn; uavhengig av $\vec{r}_0$

Total dreieimpuls for stivt legeme:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + I_0 \vec{\omega}}$$

Eks: Snookerkule, masse M, radius R, $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$



$\vec{\omega} = -\omega \hat{z}$

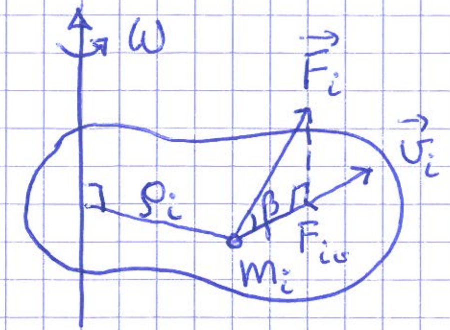
$\boxed{\vec{L} = ?}$

$$\vec{L} = M \vec{R}_{CM} \times \vec{V} + I_0 \vec{\omega}$$

$$= -MRV\hat{z} - \frac{2}{5} MR^2 \omega \hat{z}$$

Hvis ren rulling: $V = \omega R \Rightarrow \vec{L} = -\frac{7}{5} MR^2 \omega \hat{z}$

N2 for rotasjon om akse med fast orientering



$$\vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = F_i \, v_i \cos\beta$$
$$= F_{iv} \cdot v_i$$

Skal se at $\tau = I\dot{\omega}$ ved å regne ut to forskjellige uttrykk for effekten som tilføres det stive legemet.

$$P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i \overset{N2}{=} \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i \overset{s.21}{=} \frac{d}{dt} \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \left(= \frac{dK}{dt}\right)$$

$$= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i m_i \rho_i^2 \right\} \cdot \frac{1}{2}\omega^2 = I \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\omega \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

$$P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i F_{iv} \, v_i = \left\{ \sum_i F_{iv} \, \rho_i \right\} \omega = \tau\omega$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = I\dot{\omega}}$$ (N2, rot. om akse m/fast orientering)

der $\tau = \sum_i F_{iv} \, \rho_i$ = ytre dreiemoment på legemet,

(her referert til rotasjonsaksen, og ikke et ref. punkt $\vec{r}_0$)

$I = \sum_i m_i \rho_i^2$ = legemets treghetsmoment

mhp den ~~valg~~ fast orienterte rot. aksen