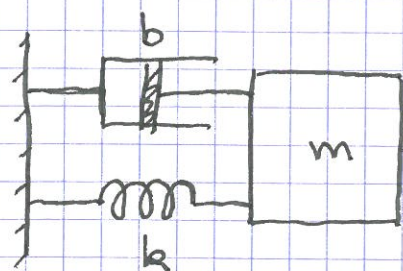


Tvingen swingning. Resonans

[YF 14.8; LL 9.9]

69



$$F_y(t) = F_0 \cos \omega t$$

= ytre harmonisk kraft

$$N2: -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

$$\gamma = b/2m$$

$$\omega_0^2 = k/m$$

Løsning:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t), \quad \text{slik at}$$

$$\ddot{x}_h + 2\gamma\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0 \quad (\text{homogen løsn.})$$

$$\ddot{x}_p + 2\gamma\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (\text{partikulærløsn.})$$

I starten bidrar både x_h og x_p til innsvingningsforløpet.

Etter hvert blir $t \gg 1/\gamma$ slik at $e^{-\gamma t} \rightarrow 0$ og $x_h \rightarrow 0$.

Da er $x(t) = x_p(t)$.

$$\text{Vi gjetter } x_p(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$

Innsetting av x_p , $\dot{x}_p$ og $\ddot{x}_p$ i N2 gir:

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}; \quad \varphi(\omega) = \arctan\left\{\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right\}$$

Resonans: Anta svak damping, $\gamma \ll \omega_0$. Da blir $A(\omega)$ stor hvis $\omega \approx \omega_0$, dvs ytre kraft "driver" systemet med frekvens ω lik systemets egenfrekvens (resonansfrekvens) $\omega_0 = \sqrt{k/m}$:

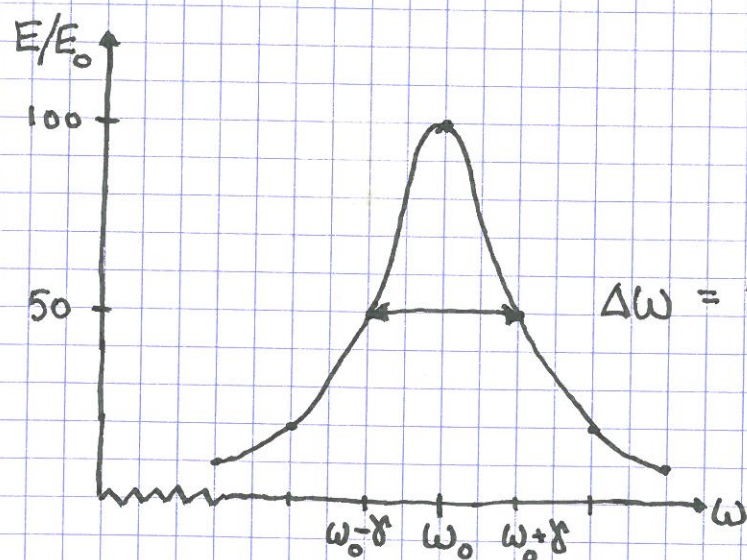
$A(\omega) \rightarrow \infty$ dersom $\gamma \rightarrow 0$ og $\omega \rightarrow \omega_0$

[Jf. Tacoma bridge, 1940]

Oscillatorens energi:

$$E \approx \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k \frac{F_0^2}{m^2} \cdot \frac{\omega_0^4 / \omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$$

$$= \underbrace{\frac{F_0^2}{2k}}_{E_0} \cdot \underbrace{\frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}_{\text{dimensjonsløs funksjon av } \omega}$$



Anta $\gamma = \omega_0/20$

$\Delta\omega = 2\gamma = \text{halvverdigbredden}$

Q-faktor: Mål for hvor "skarp" resonanstoppen er.

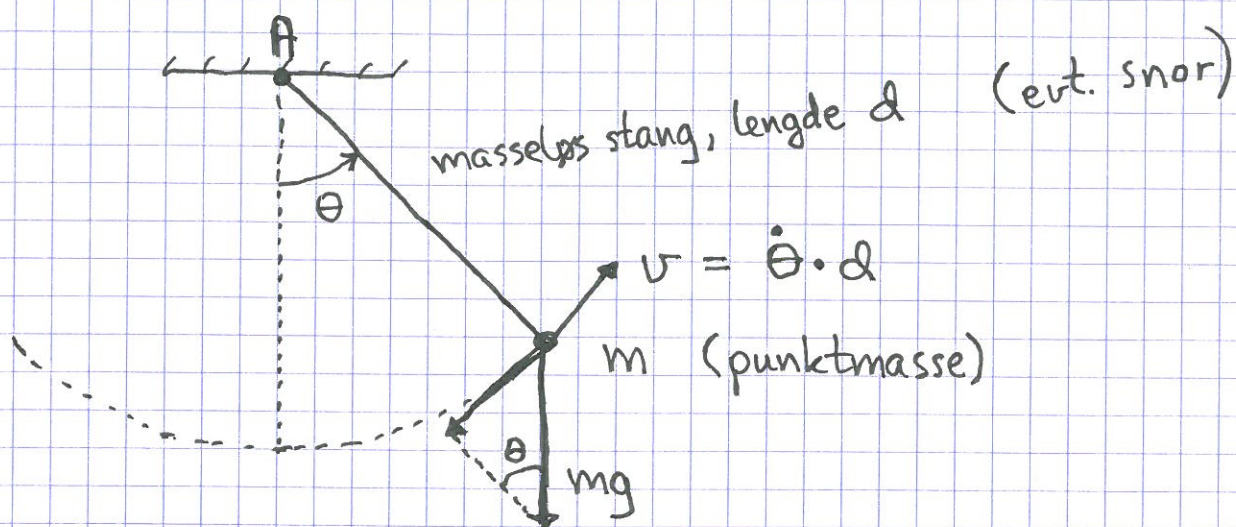
$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\gamma} \quad [Q \text{ for } \underline{q}uality!]$$

Dvs: Mindre damping $\Rightarrow$ Smalere resonans $\Rightarrow$ Større Q-verdi
[Her er $Q = 10$]

Matematisk pendel

[YF 14.5; LL 9.6]

(71)



N2 || sirkelbanen:

$$-mg \sin \theta = m a_{||} = m \dot{v} = m \cdot l \cdot \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Kan ikke løses analytisk, med mindre vi hele tiden har små utsving fra likevekt, dvs $|\theta| \ll 1$.

Da er $\sin \theta \approx \theta$, og vi har enkel harm. osc:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{med} \quad \omega_0 = \sqrt{g/l}$$

$$\text{Svingeperiode: } T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi \sqrt{l/g}$$

Større utsving gir avvik fra harm. osc.

Vi må beholde $\sin \theta$ i ligningen, som nå må løses numerisk, f.eks slik:

Anta kjente startbetingelser $\theta(0) = \theta_0$ og $v(0) = v_0$ (72)

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{d} \Rightarrow d\theta = \frac{v}{d} \cdot dt \Rightarrow \Delta\theta \approx \frac{v}{d} \cdot \Delta t$$

$$\frac{dv}{dt} = a_{||} \Rightarrow dv = a_{||} \cdot dt \Rightarrow \Delta v \approx a_{||} \cdot \Delta t \stackrel{(\text{her})}{=} -g \sin \theta \cdot \Delta t$$

Dermed:

$$\theta(\Delta t) \approx \theta_0 + \frac{v_0}{d} \Delta t ; v(\Delta t) \approx v_0 - g \sin \theta_0 \cdot \Delta t$$

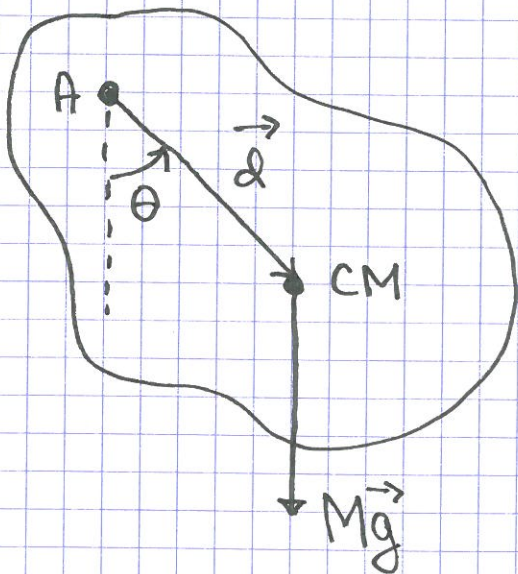
$$\theta(2\Delta t) \approx \theta(\Delta t) + \frac{v(\Delta t)}{d} \Delta t ; v(2\Delta t) \approx v(\Delta t) - g \sin \theta(\Delta t) \cdot \Delta t$$

osv. osv. [Eulermetoden]

[09.10.14]

Fysisk pendel

[YF 14.6 ; LL 9.6]



Størt legeme. Masse M .
Kan svinge (friksjonsfritt) om
akse gjennom A. Tregkrets-
moment I mhp rot.aksen.

Med ~~A~~ som ref. punkt
(ref.akse) er CM i
posisjon d

Bestem svingeperioden T .

(Anta små utsving, $|\theta| \ll 1$)

Ytre krefter: $M\vec{g}$, og $\vec{F}_A$ = kraften fra akslingen på legemet. $\vec{F}_A$ er ukjent, både abs.verdi og retning. [Med matematisk pendel, s.73, er $\vec{F}_A$ lik snordraget, rettet langs snora/stanga, og dermed med null komponent normalt på snora/stanga, slik at kun tyngden bidrar langs sirkelbanen. Med fysisk pendel har $\vec{F}_A$ generelt komponenter både parallelt med $\vec{d}$ (se fig) og normalt på $\vec{d}$.]

Men: $\vec{F}_A$ har ingen arm relativt akse gjennom A, og dermed ikke noe dreiemoment mhp denne akse.

Da gir N2 for rotasjon (om fast akse gjennom A):

$$\tau = I \ddot{\theta} \quad \text{med} \quad \tau = -d \cdot Mg \cdot \sin \theta$$

[Fortegnet: $\vec{\tau} = \vec{d} \times M\vec{g}$ er rettet inn i planet, dvs tyngdens dreiemoment gir reduisert vinkelakselerasjon når vinkelen θ er ~~negativ~~ positiv, som i figuren.]

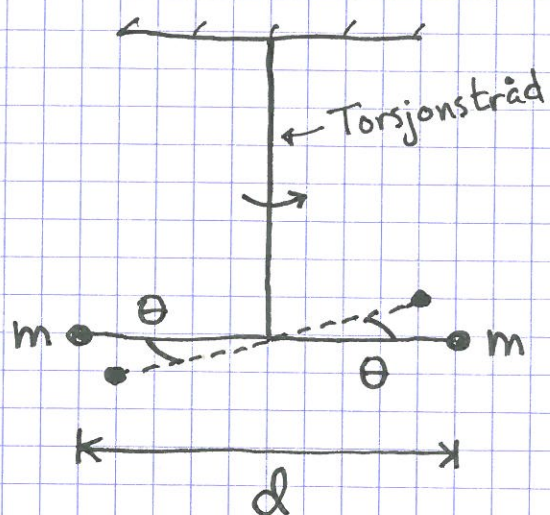
$$\Rightarrow -Mgd \sin \theta = I \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{Mgd}{I} \theta = 0 \quad (|\theta| \ll 1)$$

Dvs: Harmonisk osc. med $\omega_0^2 = Mgd / I$

$$\Rightarrow T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{I / Mgd}$$

Steiners sats $\Rightarrow 2\pi \sqrt{(I_0 + Md^2) / Mgd}$ ($\rightarrow \infty$ når $d \rightarrow 0$, som ventet)

Torsjionspendel [YF 14.4 ; LL 9.6]



Hookes lov: $|\tau| \sim |\theta|$

Tråden motsetter seg vridning og virker på pendelen [her: stang med lengde d og to masser m i hver ende; treghetsmoment $I = 2 \cdot m \cdot (d/2)^2 = md^2/2$] med dreiemoment τ prop. med vridningen θ

$$\Rightarrow \tau = -D \cdot \theta \quad [\text{YF: } \mathcal{H} ; \text{ LL: } \Gamma]$$

N2, rot. om trådens akse: $\tau = I \ddot{\theta}$

$$\Rightarrow -D \cdot \theta = I \cdot \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 ; \quad \omega_0^2 = D/I$$

$$\Rightarrow \text{Svingeperiode: } T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{I/D}$$

[Lab: Cavendisheksperimentet]

D = torsjonskonstanten / torsjonsstivheten

$$[D] = [1/\tau] = \frac{1}{\text{N} \cdot \text{m}} = \frac{1}{\text{J}}$$

BØLGER [YF 15, 16, 11.4; LL 10, 7.2]

75

Bølge = Forplantning av forstyrrelse fra likevekt

Energi og impuls forplanter seg med bølgen.

Partikler (masse) svinger, men forplanter seg ikke.

Transversale bølger: partikler svinger $\perp$ forplantn. retningen

Longitudinale — " — : — " — || — " —

Eksempler:

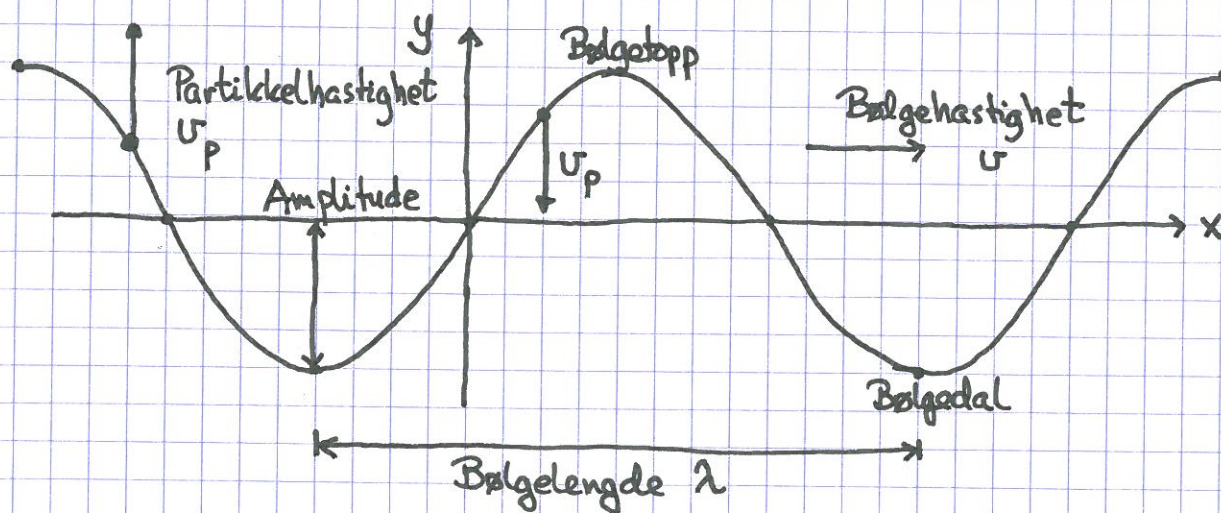
<u>Bølgetype</u>	<u>Hva svinger?</u>	<u>T eller L?</u>
Bølger på streng	Strengeløp	T
Bølger i fjær	Fjær — " —	T eller L
Lydbølger	Molekyler i mediet (gass, væske, fast stoff)	L
Overflatebølger (Grenseflatebølger)	Partikler i/nær grenseflaten (f.eks vann)	T og L: sirkelbevegelse
Elektromagnetiske bølger	Elektrisk felt $\vec{E}$ og magnetfelt $\vec{B}$	T

Harmonisk bølge [YF 15.2, 15.3; LL 10.2]

76

Ser på transversal bølge på (uendelig lang) streng.

$y(x, t)$ = utsving fra likevekt ($y=0$) av strengement i posisjon x ved tidspunkt t



T = periode = tiden det tar for bølgemønstret å flytte seg en bølgelengde λ

= tiden det tar for et gitt strengement å utføre en hel svingning

$\Rightarrow$ Bølgehastighet: $v = \lambda / T$ (Kalles også fasehastighet)

f = frekvens = antall svingninger (for gitt strengement) pr tidsenhet

$\Rightarrow f = 1/T$

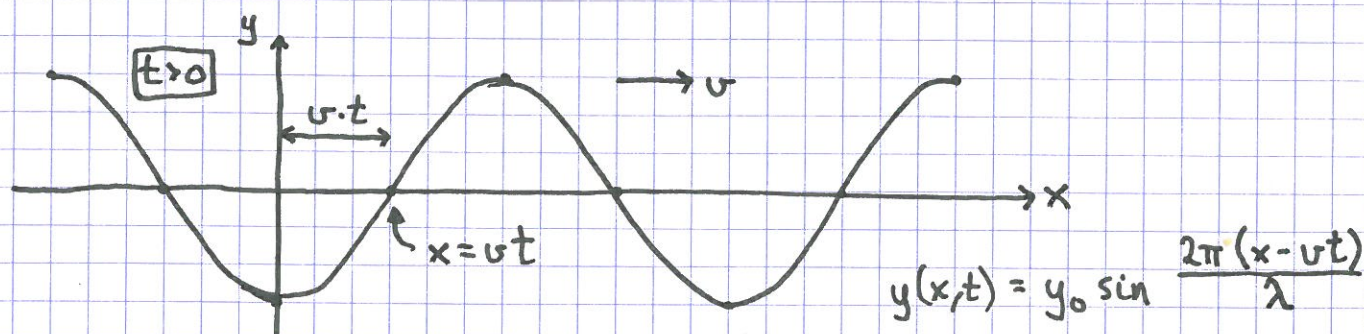
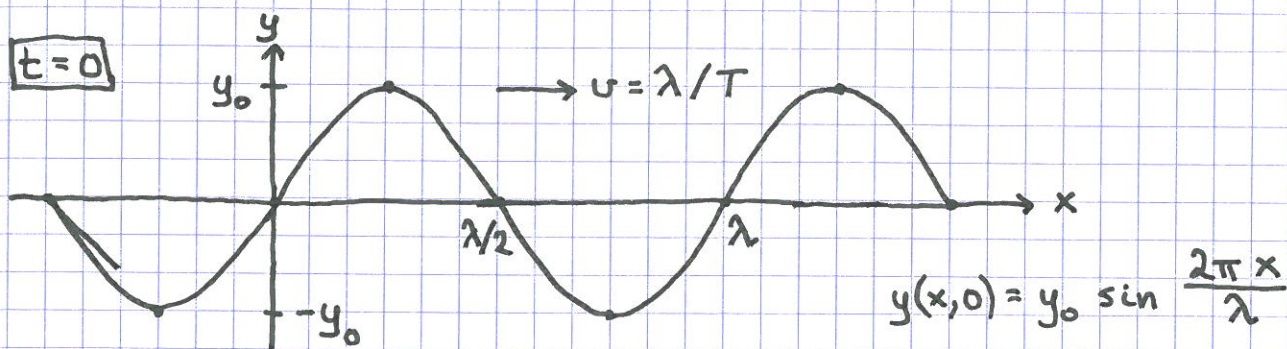
ω = vinkel frekvens = bølgens faseendring (for gitt strengement) pr tidsenhet

$\Rightarrow \omega = 2\pi f = 2\pi / T$ (faseendring 2π pr svingning)

Partikkelhastighet: $v_p = dy/dt$

77

Matematisk form på $y(x, t)$:



$$v = \lambda/T = \lambda \cdot \omega/2\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \cdot v = \omega$$

Innfør bølgetallet $k = 2\pi/\lambda$ = bølgens faseendring (for gitt tidspunkt) pr lengdeenhet

$$[k] = m^{-1}$$

Dermed:

$$y(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t)$$

Harmonisk bølge som forplanter seg i positiv x-retning med hastighet $v = \lambda/T = \omega/k$

Hvis forplantning i negativ x-retning:

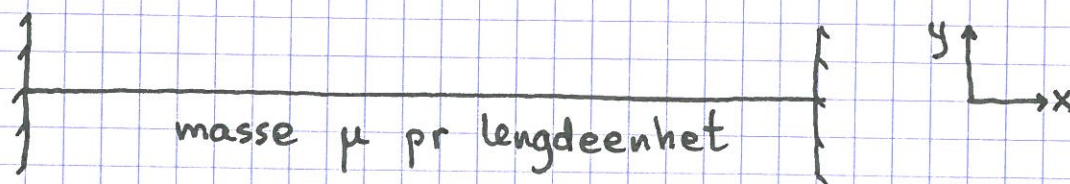
$$y(x, t) = y_0 \sin(kx + \omega t)$$

Hvis $y(0, 0) \neq 0$: $y(x, t) = y_0 \sin(kx \pm \omega t + \varphi)$; φ = fasekonstant

Transversal bølge på streng [YF 15.4; LL 10.1]

(78)

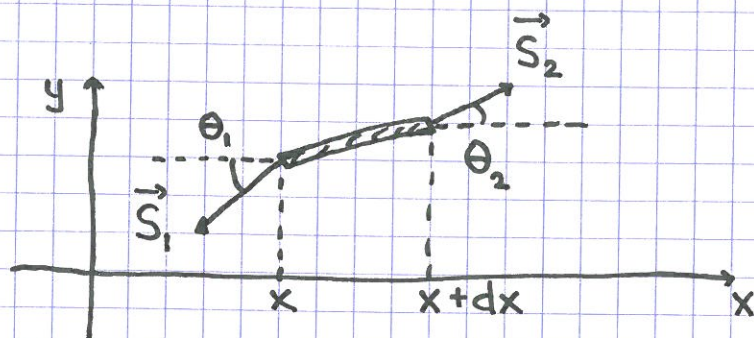
Likerekt: Horisontal streng, utsving $y=0$ overalt, strekk-kraft $S \gg$ strengens tyngde, som neglisjeres.



Bruker N2 til å finne ut hvordan en forstyrrelse fra likerekt forplanter seg langs strengen.

Antagelser: Små utsving; Ingen horisontal bevegelse av masse.

$\Rightarrow$ konstant $S_x = S$ overalt



Strengeløst mellom x
og $x+dx$, masse
 $dm = \mu \cdot dx$

$$N2: \vec{S}_1 + \vec{S}_2 = dm \cdot \vec{a}$$

$$\text{Horisontalt: } -S_1 \cos \theta_1 + S_2 \cos \theta_2 = 0$$

$$\Rightarrow S_1 \cos \theta_1 = S_2 \cos \theta_2 = S_x = S$$

$$\text{Vertikalt: } S_2 \sin \theta_2 - S_1 \sin \theta_1 = dm \cdot \ddot{y}$$

Divisjon med hhv $S = S_2 \cos \theta_2$, $S = S_1 \cos \theta_1$ og S gir

$$\tan \theta_2 - \tan \theta_1 = \mu \cdot dx \cdot \ddot{y} / S$$

Vi ser at $\tan \theta = dy/dx$ (= strengens "helning") (79)

Partiell derivasjon

Her avhenger utsvinget y av to variable, x og t .

Da kan vi spørre om ulike ting:

- 1) Hvordan endres y hvis vi endrer posisjonen fra x til $x+dx$, med tiden t holdt konstant?
- 2) Hvordan endres y hvis tiden endres fra t til $t+dt$, med posisjonen x holdt konstant?

Svar på 1) er selvsagt $dy = \frac{dy}{dx} \cdot dx$, der dy/dx er den deriverte av y mhp x , og som sagt, med variabel nr to, tiden t , holdt konstant.

Nærmest som en påminnelse om at andre variable (enn x) skal betraktes som konstanter (her: t), bruker vi notasjonen

$\frac{\partial y}{\partial x}$ def derivert av y mhp x ; andre variable holdes konstant

Vi kaller $\partial y / \partial x$ for den partiellderiverte av y mhp x .

Tilsvarende: Svar på 2) er $dy = \frac{dy}{dt} \cdot dt$, med dy/dt lik den deriverte av y mhp t , med x holdt konstant.

Vi skriver $\partial y / \partial t$ og kaller dette for den partiellderiverte av y mhp t .

Eks: Hvis $y(x,t) = y_0 \sin(kx - \omega t)$, blir

$$\frac{\partial y}{\partial x} = k y_0 \cos(kx - \omega t) \quad \text{og} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_0 \cos(kx - \omega t)$$

For strengen : $\tan \theta = \partial y / \partial x$
 $\ddot{y} = \partial^2 y / \partial t^2$

80

Dermed:

$$\frac{(\partial y / \partial x)_{x+dx} - (\partial y / \partial x)_x}{dx} = \frac{\mu}{S} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Her er, pr def., venstre side lik den deriverte av $\partial y / \partial x$ mhp x , med andre ord lik $\partial^2 y / \partial x^2$.

Dermed:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{S} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

[Linear 2.ordens partiell
diff. ligning]

Bølgeligning for transv. utsving
 $y(x,t)$ på streng med strekk-
kraft S og masse μ pr
lengdeenhet.