

Bølgedign. for (små) transv. utsving $y(x,t)$ på streng med snordrag S og masse μ pr lengdeenhet:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{S} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

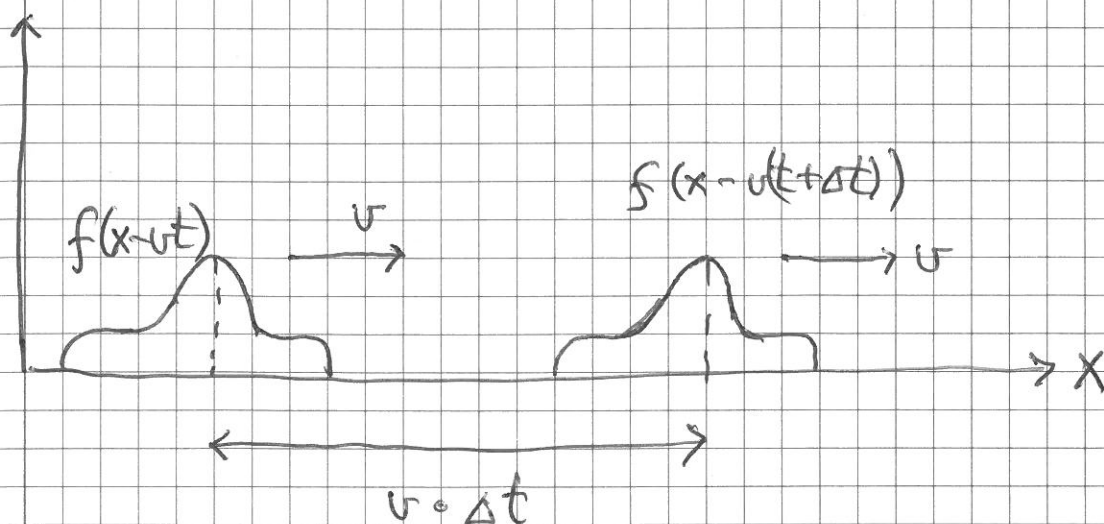
Generell løsning:

$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt);$$

$$v = \sqrt{S/\mu}$$

der f og g er vilkårlige kontinuerlige og to ganger deriverbare funksjoner.

$f(x - vt)$ = forstyrrelse fra likevekt som forplanter seg i positiv x -retning med hastighet v :



Tilsv. forpl. $g(x+vt)$ seg i negativ x -retning

Med $z = x - vt$ og kjerneregel:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot 1$$

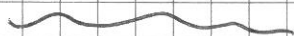
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cdot 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot (-v)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \dots = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cdot (-v)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cdot v^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} ; \text{ OK}$$

[Tilsv. vises at $\partial^2 g / \partial x^2 = (1/v^2) \partial^2 g / \partial t^2$
med $z = x + vt$ og kjerneregel.]



Vår spiralfjær har $M \approx 0.8 \text{ kg}$ og

$L \approx 8 \text{ m}$ når $S \approx 20 \text{ N}$

$$\Rightarrow v = \sqrt{S/\mu} = \sqrt{\frac{S \cdot L}{M}}$$

$$\approx \sqrt{\frac{20 \cdot 8}{0.8}} \text{ m/s}$$

$$\approx \underline{14 \text{ m/s}}$$

Enkel elastisitetsteori [YF 11.4 ; LL 7.2]

83

- [Fordi lydbølger er forplantning av forstyrrelser fra likevekt i elastiske medier - gasser, væsker og faste stoffer.]

↳ Mekanisk spenning = Kraft pr flateenhet (stress)

↳ Relativ deformasjon = $\frac{\Delta L}{L_0}$ evt. $\frac{\Delta V}{V_0}$ (strain)

• Elastisk modul $\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{Stress}}{\text{Strain}}$

Dette er essensielt Hookes lov ; dvs lineær respons.

Enheter: $[\text{stress}] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa}$ (pascal)

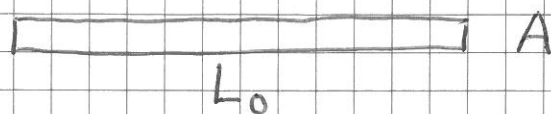
$[\text{strain}] = 1$

$\Rightarrow [\text{elastiske moduler}] = \text{Pa}$

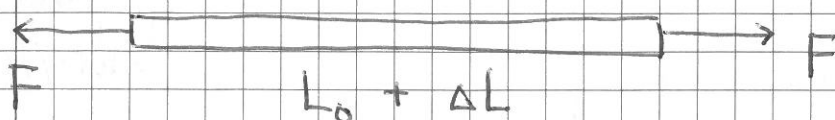
Youngs modul (= Elastisitetsmodulen) :

(84)

Tynn stang; likevekt:



Strukket (evt. sammenpresset) :



$$Y = E = \frac{F/A}{\Delta L/L_0} \quad (\text{Youngs modul})$$

Dus som ideell fjær med fjærkonstant

$$k = F/\Delta L = Y \cdot A/L_0$$

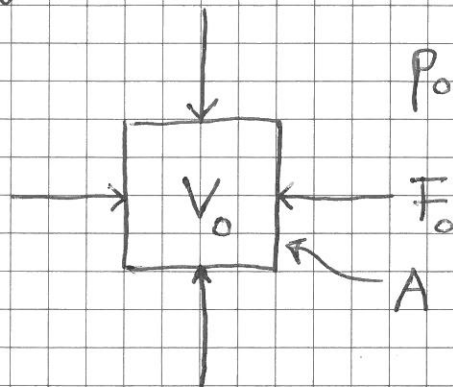
Eks:

$$\text{Stål: } E \sim 200 \text{ GPa}$$

$$\text{Grafen: } E \sim 1050 \text{ GPa}$$

Kompressibilitet:

Likevekt:

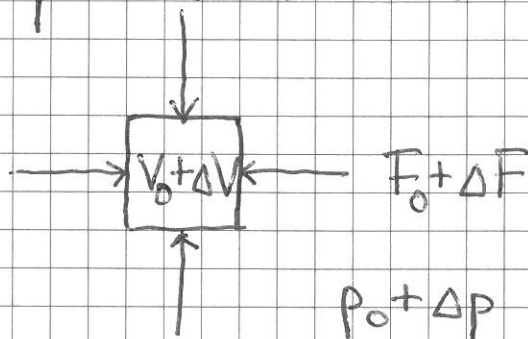


Likevektstilstand: $p_0 = F_0 / A$

Isotrop i fluid ("like i alle retninger")

$\Rightarrow \vec{F}_0 \perp$ flaten A

Økt $p \Rightarrow$ Redusert V :



$$\Delta p > 0 \Rightarrow \Delta V < 0$$

$$B = - \frac{\Delta F / A}{\Delta V / V_0} = - \frac{\Delta p}{\Delta V / V_0} \quad (\text{bulkmodulen})$$

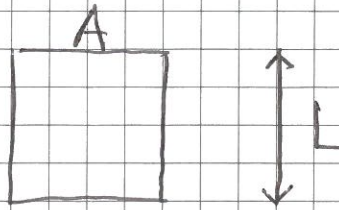
$\frac{1}{B}$ = kompressibiliteten

$$\left. \begin{array}{l} \text{Stål: } B \sim 160 \text{ GPa} \\ \text{Vann: } B \sim 2 \text{ GPa} \\ \text{Luft: } B \sim 10^{-4} \text{ GPa} \end{array} \right\} \Rightarrow B_{\text{gass}} \ll B_{\text{væske}} < B_{\text{faststoff}}$$

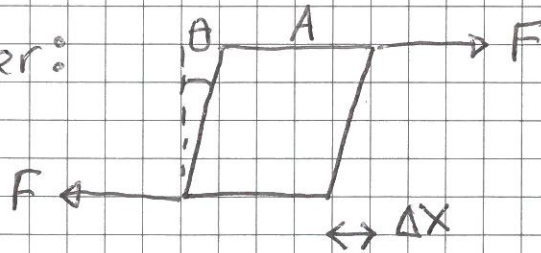
Skjærmodul:

(86)

Likerekt:



Med skjærkrefter:



$$G = \frac{F/A}{\Delta x/L} = \frac{F/A}{\tan \theta} \quad (\text{skjærmodulen})$$

Stål: $G \sim 80 \text{ GPa}$

$$\Rightarrow Y \sim B > G$$

for de fleste faste stoffer

[I væsker er $G=0$; "a fluid cannot resist
leg gasser!

a shear force". Like fullt er viskositet i

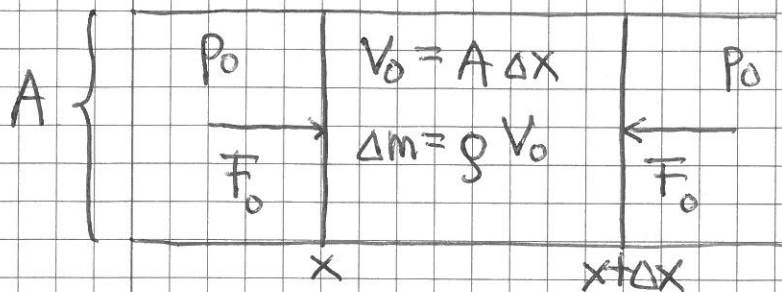
fluider direkte relatert til nettopp skjærkreftene

mellom ulike sjikt i fluidet.]

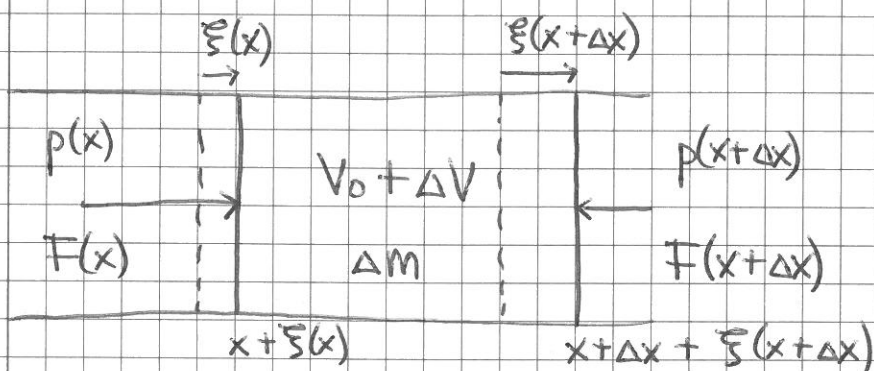
Longitudinale bølger. Lyd

[YF 16.1, 16.2; ~~LL~~ LL 10.6]

Rør fylt med fluid; likevekt:



Ikke likevekt:



Vi har:

$$p(x) = p_0 + \Delta p(x), \quad p(x + \Delta x) = p_0 + \Delta p(x + \Delta x)$$

$$\Delta V = A \cdot [\xi(x + \Delta x) - \xi(x)] = A \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\Delta p(x) = [F(x) - F_0]/A, \quad \Delta p(x + \Delta x) = [F(x + \Delta x) - F(x)]/A$$

⇒ Nettokraft på Δm er:

$$F(x) - F(x + \Delta x) = [\Delta p(x) - \Delta p(x + \Delta x)] \cdot A$$

Fra s. 85 har vi:

$$\bullet B = - \frac{\Delta p}{\Delta V/V_0} \Rightarrow \Delta p = -B \frac{\Delta V}{V_0}$$

$$\Rightarrow \Delta p(x) = -B \cdot \frac{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_x \cdot \Delta x \cdot A}{\Delta x \cdot A} = -B \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_x$$

Newtons 2. lov for Δm :

$$\begin{aligned} \Delta m \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= F(x) - F(x+\Delta x) \\ &= [\Delta p(x) - \Delta p(x+\Delta x)] \cdot A \\ &= -B \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_x - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} \right] \cdot A \\ &= +B \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \cdot A \\ &= +B \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \cdot V_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = B \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (\rho = \Delta m/V_0)$$

Med andre ord: Løsning $\xi(x,t)$ [longitudinelt!]
fra likevekt oppfyller bølgeligningen

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

med bølgehastighet $v = \sqrt{B/\rho}$

Eks: Luft $v = \sqrt{1.42 \cdot 10^5 \text{ Pa} / 1.29 \text{ kg/m}^3} = 332 \text{ m/s}$ (89)

Vann $v = \sqrt{2.2 \cdot 10^9 / 1000} \text{ m/s} = 1483 \text{ m/s}$

Stål $v = \sqrt{\frac{B + \frac{4}{3}G}{\rho}} = \sqrt{\frac{(160 + \frac{4}{3} \cdot 80) \text{ GPa}}{7800 \text{ kg/m}^3}} = 5847 \text{ m/s}$

Hvis vi har ei tynn stang:

$$v = \sqrt{Y/\rho}$$

Lydhastighet i gasser

Anta ideell gass, slik at $pV = NkT$ (p =trykk, V =volum, N =antall molekyler, k =Boltzmanns konst. $= 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$, T =temp)

Hvis T var konstant ved forplantning av lyd ("isoterme forhold"),

wille vi ha $B_T = -V(\partial p / \partial V)_{T=\text{konst}} = -V \cdot (-NkT/V^2) = p$, og

dermed $v = \sqrt{B_T/\rho} = \sqrt{p/\rho}$, som med $\rho = mN/V$ (med m =midlere molekylmasse) gir $v = \sqrt{kT/m}$. For luft, med $m = 29 \text{ g/mol} = 4.83 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$ pr molekyl, f.eks da $v = 289 \text{ m/s}$ ved $20^\circ\text{C} = 293 \text{ K}$. Eksperimentelt er $v \approx 340 \text{ m/s}$ ved 20°C !

Vi har ikke isoterme forhold! Derimot har vi adiabatiske

forhold, dvs ikke tilførsel eller fjerning av varme, ΔQ ,

fordi p og ρ svinger for raskt; varmeledning er en langsommere prosess! Ved adiabatiske forhold er $pV^\gamma = \text{konst.}$

med $\gamma = C_p/C_v$ = adiabatkonstanten. Her er $C_p = [\Delta Q/\Delta T]_p$

og $C_v = [\Delta Q/\Delta T]_v$, dvs varmekapasitet målt ved hhv

konstant trykk og konstant volum. For 2-atomig gass er

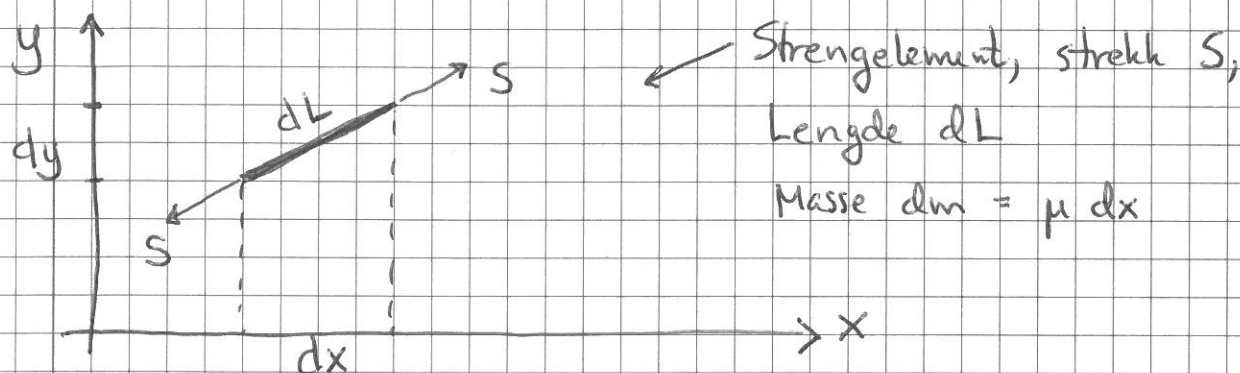
$\gamma = 7/5$, for 1-atomig gass er $\gamma = 5/3$. Med $pV^\gamma = \text{konst.}$

f.eks $\boxed{v = \sqrt{\gamma kT/m}}$, som er ca 340 m/s ved 293 K .

Energi ved bølgeforyplantning

[YF 15.5; LL 10.5]

Anta streng med transvers. utsving $y(x,t)$



Kin. energi: $dK = \frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu dx \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$

Pot. energi: $dU = S \cdot \underbrace{(dL - dx)}_{= \text{forlengelse}}$

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + (dy/dx)^2} \approx dx \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right)$$

[fordi $\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \alpha/2$ når $|\alpha| \ll 1$]

$$\Rightarrow dU \approx S \cdot dx \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

Siden $y = y(x \pm vt)$ er $\partial y / \partial t = \pm v \partial y / \partial x$.

Dessuten er $S = \mu v^2$. Dermed er mek. energi pr. lengdeenhet:

$$\epsilon = \frac{dE}{dx} = \frac{dK}{dx} + \frac{dU}{dx} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} S \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

$$= \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \mu v^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = \pm \mu v \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

Enhet: $[\epsilon] = \text{J/m}$

Siden $y = y(x \pm vt)$ er også $\partial y / \partial t$ og $\partial y / \partial x$

funksjoner av $x \pm vt$

$$\Rightarrow \varepsilon(x, t) = \varepsilon(x \pm vt)$$

$$\Rightarrow \varepsilon \text{ oppfyller bølgelign. } \partial^2 \varepsilon / \partial x^2 = (1/v^2) \partial^2 \varepsilon / \partial t^2$$

$\Rightarrow$ energien forplanter seg med hast. v i bølgens forplantningsretning

Tilsvarende utledning for longitudinale lydbølger:

1D $\rightarrow$ 3D ; $\mu \rightarrow \rho = \text{masse pr volumenhett}$

$$\varepsilon = \partial E / \partial x \rightarrow \partial E / \partial V = \text{energi pr volumenhett}$$

$y \rightarrow \xi = \text{molekylenes (midlere) utsving fra likevekt}$

$$v = \sqrt{S/\mu} \rightarrow v = \sqrt{B/\rho}$$

$$\varepsilon(x, t) = \rho v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = \rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = \pm \rho v \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$[\varepsilon] = \text{J/m}^3$$

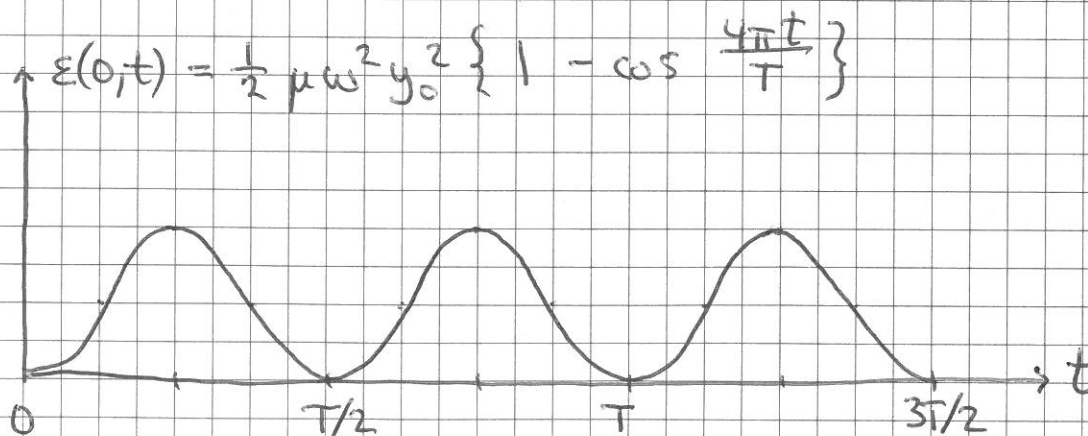
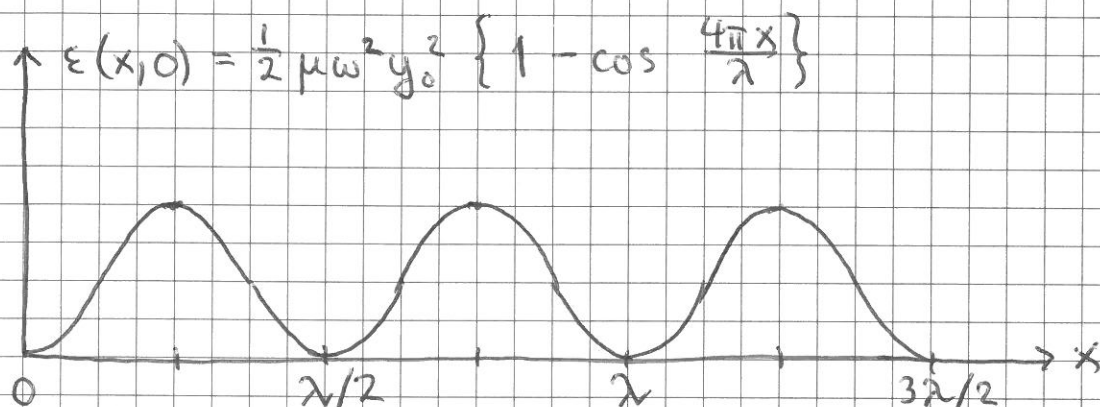
Energi i harmonisk bølge

(92)

$$y(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t) \quad ; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad v = \frac{\omega}{k}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -k y_0 \sin(kx - \omega t) \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \omega y_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varepsilon(x,t) &= \mu \omega^2 y_0^2 \sin^2(kx - \omega t) \\ &= \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2 \{ 1 - \cos(2kx - 2\omega t) \} \end{aligned}$$



Medlere energitæthed

- Periodisk $\varepsilon(x, t)$ med rumlig periode λ og tidsperiode T :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^\lambda \varepsilon(x, t) dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \varepsilon(x, t) dx \quad \text{Rumlig middelværdi}$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\int_0^T \varepsilon(x, t) dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon(x, t) dt \quad \text{Tidsmiddel}$$

For harmonisk bølge ser vi fra fig. s 92 at

$$\bar{\varepsilon} = \langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2$$

- Matematisk: Siden $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ og $\langle \sin^2 \varphi \rangle = \langle \cos^2 \varphi \rangle$

$$\text{må vi ha } \langle \sin^2(kx - \omega t) \rangle = \overline{\sin^2(kx - \omega t)} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \bar{\varepsilon} = \langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2$$

Plan harmonisk lydbølge:

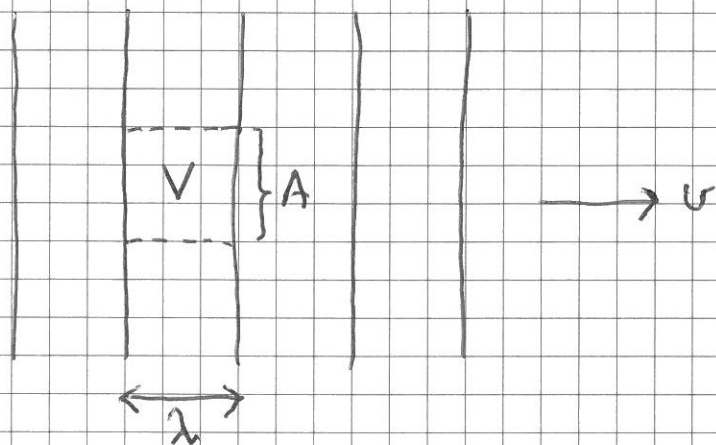
$$\bar{\varepsilon} = \langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 s_0^2$$

Bølgens intensitet [YF 16.3; LL 10.5]

(94)

$$\begin{aligned} I &= \text{overført energi pr tids- og flækeenhed} \\ &= \text{overført effekt pr flækeenhed} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} I &= \text{overført energi pr tids- og flækeenhed} \\ &= \text{overført effekt pr flækeenhed} \end{aligned}} \right\} [I] = \text{W/m}^2$$

Antag plan harmonisk lydølge:



Energi i volumet $V = A\lambda$ er $\bar{\epsilon} A\lambda$, og denne energien passerer arealet A i løbet af en periode T

$$\Rightarrow I = \frac{\bar{P}}{A} = \frac{\bar{\epsilon} A \lambda / T}{A} = \underline{\underline{\bar{\epsilon} \cdot v}} \quad (v = \lambda / T)$$

Desibelskalaen

(95)

- Knappt hørbar lyd: $I = I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$;
velges som "referanseintensitet" for lyd

Smertegrense: $I \sim 1 \text{ W/m}^2$

Stort spenn $\Rightarrow$ hensiktsmessig med logaritmisk skala:

- $$\beta = \# \text{ dB} \stackrel{\text{def}}{=} 10 \log(I/I_0)$$
 Lydnivå, målt i dB (desibel)

Høregrense: $10 \log(I_0/I_0) = 0$

Normal samtale: $10 \log(10^{-6}/10^{-12}) = 10 \cdot 6 = 60 \text{ dB}$

Smertegrense: $10 \log(1/10^{-12}) = 10 \cdot 12 = 120 \text{ dB}$