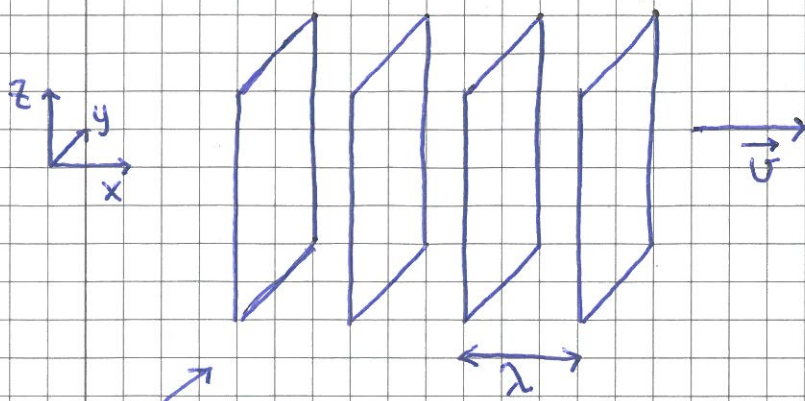


Bølgeforplantning i vilkårlig retning

- Plan harmonisk bølge med $\vec{v} = v \hat{x}$:



$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

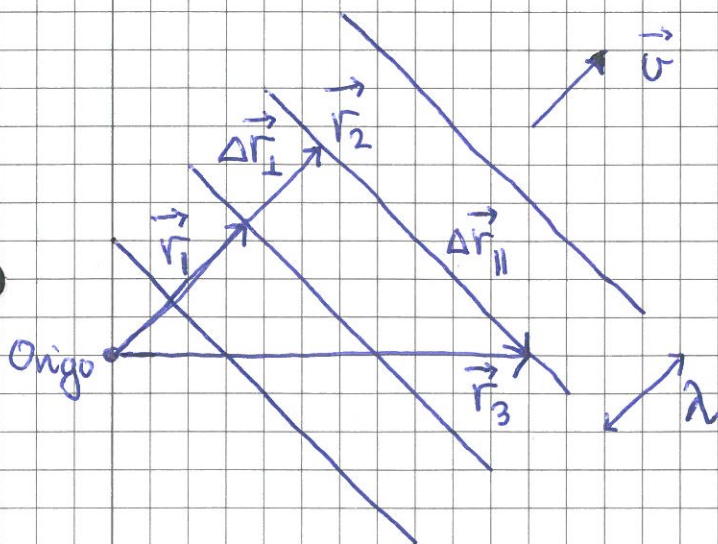
$$k = 2\pi/\lambda, \quad \omega = 2\pi/T,$$

$$v = \lambda/T = \omega/k$$

Bølgefronter: Flater med samme fase, og lik fase i alle hvis $\Delta x = \lambda$ mellom to. (Evt: $\varphi, \varphi \pm 2\pi, \varphi \pm 4\pi, \dots$)

Her: Plan $\perp$ x-aksen

Plan bølge i vilkårlig retning:



$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \vec{\xi}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

Longitudinal: $\vec{\xi} \parallel \vec{v}$

Transversal: $\vec{\xi} \perp \vec{v}$

Anta $t=0 \Rightarrow \vec{\xi}(\vec{r}, 0) = \vec{\xi}_0 \sin \vec{k} \cdot \vec{r}$

Må ha samme fase i $\vec{r}_2$ og $\vec{r}_3$

$$\Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r}_2 = \vec{k} \cdot \vec{r}_3 \Rightarrow \vec{k} \cdot (\vec{r}_3 - \vec{r}_2) = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \Delta \vec{r}_{||} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{k} \perp \Delta \vec{r}_{||} \Rightarrow \vec{k} \parallel \vec{v} \text{ og } \vec{k} \perp \text{bølgefrontene}$$

$\Rightarrow$ Bølgetallsvektoren $\vec{k}$ har retning i bølgens forplantningsretning

Må ha faseforskjell 2π mellom $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$

$$\Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r}_2 = \vec{k} \cdot \vec{r}_1 + 2\pi \Rightarrow \vec{k} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = 2\pi$$

$$\Rightarrow \vec{k} \cdot \Delta \vec{r}_{\perp} = 2\pi \Rightarrow k \cdot \lambda = 2\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{v}}$$

$$[\text{Evt. } \vec{k} = -\frac{2\pi}{\lambda} \hat{v} \text{ hvis } \vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{S}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)]$$

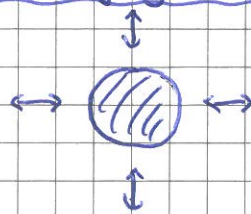
Kartesiske komponenter:

$$\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$$

$$k = |\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

$$\lambda = 2\pi/k$$

$I(r)$ for ulike bølgeformer



Kulebølger:

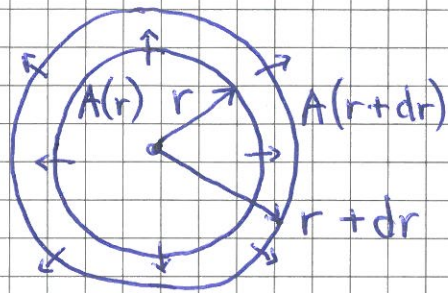
Kulesymmetrisk bølgekilde $\Rightarrow$ Bølge radielt utover med lik I i alle retninger $\Rightarrow$ Bølgefrontene er kuleskall med areal $A = 4\pi r^2$.

Pga energibevarelse: Like mye energi $E(r)$ gjennom

$A(r)$ pr tidsenhet som

$E(r+dr)$ gjennom

$A(r+dr)$ pr tidsenhet



$$\Rightarrow \langle P(r_1) \rangle = \langle P(r_2) \rangle \quad (\text{midlere effekt uavh. av } r)$$

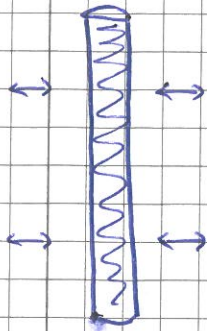
$$\Rightarrow 4\pi r_1^2 I(r_1) = 4\pi r_2^2 I(r_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{I(r) \sim 1/r^2 \text{ for kulebølger}}$$

Eks: Hvor mye lenger unna en kuleformet kilde må vi gå for å senke lydtrykkesnivået med 10 dB?

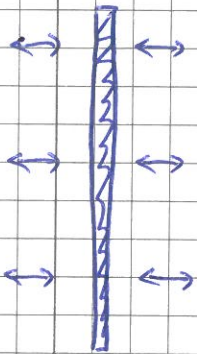
$$\begin{aligned} \text{Løsn: } -10 &= \beta_2 - \beta_1 = 10 \log(I_2/I_0) - 10 \log(I_1/I_0) = 10 \log(I_2/I_1) \\ &= 10 \log(r_1^2/r_2^2) = 20 \log(r_1/r_2) = -20 \log(r_2/r_1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow r_2/r_1 = 10^{1/2} \Rightarrow r_2 = \sqrt{10} r_1 \approx \underline{\underline{3.2 r_1}}$$

Sylinderbølger:

Sylindersymmetrisk bølgekilde
 gir sylinderformede bølgefronter
 med omkrets $2\pi r$, dvs areal A
 prop. med avstanden r fra kilden

$$\Rightarrow \boxed{I(r) \sim \frac{1}{r} \text{ for sylinderbølger}}$$

Plane bølger:

Plan bølgekilde gir plane
 bølgefronter med areal A
 som er uavh. av avstanden
 fra kilden

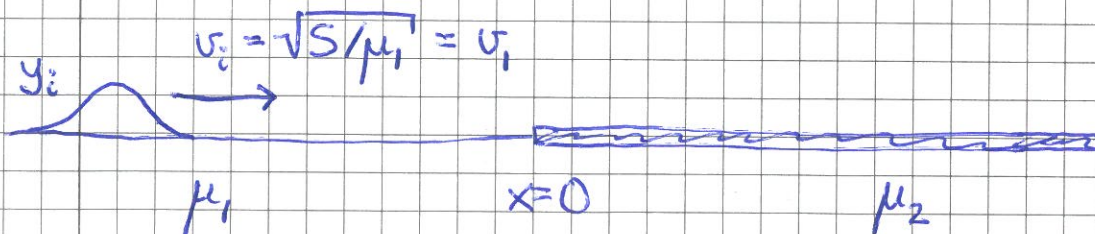
$$\Rightarrow \boxed{I = \text{konst. for plane bølger}}$$

Refleksjon og transmisjon av bølge på streng

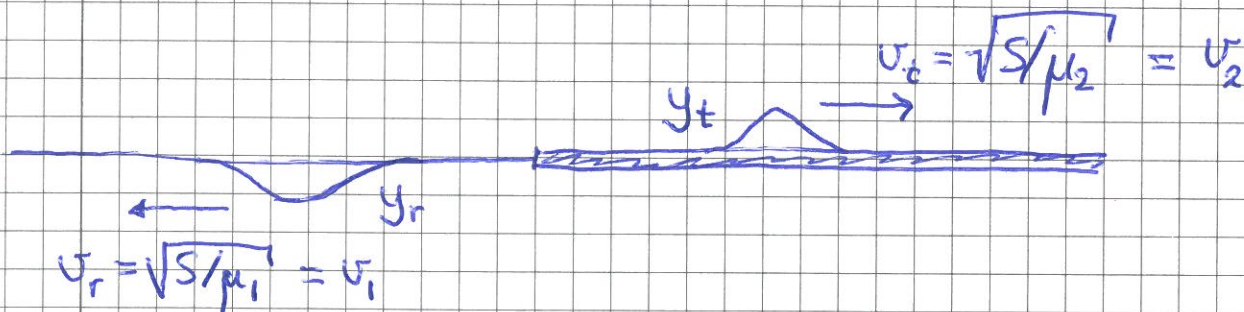
[YF 15.7 ; LL 10.3]

[= klassisk spredning i én dimensjon]

Bølge inn mot skjøt i $x = 0$:



Bli delvis reflektert og transmittert i skjøten:



Fysiske krav:

- Kontinuerlig y , $\partial y / \partial x$ og $\partial y / \partial t$
- Energibevarelse: $\bar{P}_i = \bar{P}_r + \bar{P}_t$ ($\bar{P}$ = midlere effekt)

Totalt utslag på strengen:

$$y(x,t) = \begin{cases} y_i(x,t) + y_r(x,t) & ; \quad x < 0 \\ y_t(x,t) & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

Antar harmonisk bølge:

$$y_i(x,t) = y_{i0} \sin(k_1 x - \omega t)$$

$$y_r(x,t) = y_{r0} \sin(k_1 x + \omega t)$$

$$y_t(x,t) = y_{t0} \sin(k_2 x - \omega t)$$

Kont. y i $x=0$

$$\Rightarrow y_{i0} \sin(-\omega t) + y_{r0} \sin \omega t = y_{t0} \sin(-\omega t)$$

$$\Rightarrow y_{i0} - y_{r0} = y_{t0}$$

Kont. $\partial y / \partial x$ i $x=0$

$$\Rightarrow k_1 y_{i0} \cos(-\omega t) + k_1 y_{r0} \cos \omega t = k_2 y_{t0} \cos(-\omega t)$$

$$\Rightarrow k_1 y_{i0} + k_1 y_{r0} = k_2 y_{t0}$$

For gitt y_{i0} er dette 2 lign. med 2 ukjente; løsn:

$$y_{r0} = \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} y_{i0} ; \quad y_{t0} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} y_{i0}$$

Med $k = \omega/v = \underbrace{(\omega/\sqrt{S})}_{\text{(felles konstant)}} \cdot \sqrt{\mu}$:

$$y_{r0} = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} y_{i0} ; \quad y_{t0} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} y_{i0}$$

Diskusjon av resultatet:

(102)

- $\mu_1 = \mu_2 \Rightarrow y_{ro} = 0, y_{to} = y_{io}; OK$
- $\mu_2 \rightarrow \infty$ (fast ende) $\Rightarrow y_{ro} = y_{io}, y_{to} = 0$
 $\Rightarrow y(0,t) = 0; OK; y_r = -y_i$ ved $x=0$
- $\mu_2 \rightarrow 0$ (fri ende) $\Rightarrow y_{ro} = -y_{io}, y_{to} = 2y_{io} (!?)$
 $\bar{E}_t = \frac{1}{2} \mu_2 \omega^2 y_{to}^2 \rightarrow 0; OK; y_r = +y_i$ ved $x=0$
 $\bar{E}_r = \bar{E}_i = \frac{1}{2} \mu_1 \omega^2 y_{io}^2$
- $\mu_2 > \mu_1 \Rightarrow y_r$ og y_i i motfase ved $x=0$
- $\mu_2 < \mu_1 \Rightarrow y_r$ og y_i i fase ved $x=0$

Transmisjonskoeffisient:

- $T = \bar{P}_t / \bar{P}_i =$ andel av innkommende energi og effekt som transmitteres

Refleksjonskoeffisient:

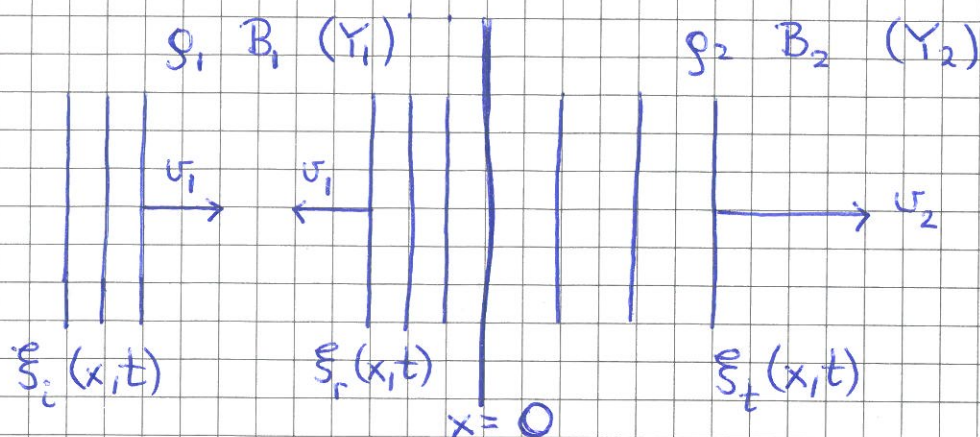
$$R = \bar{P}_r / \bar{P}_i = \text{andel som reflekteres}$$

Pga energibevarelse må vi ha

$$\boxed{T + R = 1}$$

$$\bar{P} = \bar{E}v = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2 v \Rightarrow T = \frac{4\sqrt{\mu_1 \mu_2}}{(\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2})^2}; R = \left[\frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} \right]^2$$

T og R for plan lydbølge normalt inn mot grenseflate mellom to ulike medier:



$$\xi_{ro} = \frac{B_2 k_2 - k_1 B_1}{B_1 k_1 + k_2 B_2} \xi_{io} \quad ; \quad \xi_{to} = \frac{2 k_1 B_1}{B_1 k_1 + k_2 B_2} \xi_{io} \quad \left(\begin{array}{l} \text{nesten} \\ \text{som p\aa} \\ \text{streng} \end{array} \right)$$

(fordi $B \cdot \partial \xi / \partial x$ er kontinuert i $x=0$)

$$(\text{s. 88: } B(\partial \xi / \partial x)_{x+\Delta x} - B(\partial \xi / \partial x)_x = \frac{\Delta m}{A} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \xrightarrow[\Delta x \rightarrow 0]{\Delta m \rightarrow 0} 0)$$

Med $k = \omega/v = \omega \sqrt{\rho/B}$:

$$\xi_{ro} = \frac{\sqrt{\rho_2 B_2} - \sqrt{\rho_1 B_1}}{\sqrt{\rho_1 B_1} + \sqrt{\rho_2 B_2}} \xi_{io} \quad ; \quad \xi_{to} = \frac{2 \sqrt{\rho_1 B_1}}{\sqrt{\rho_1 B_1} + \sqrt{\rho_2 B_2}} \xi_{io}$$

$$\Rightarrow T = \frac{4 \sqrt{\rho_1 B_1 \rho_2 B_2}}{(\sqrt{\rho_1 B_1} + \sqrt{\rho_2 B_2})^2} \quad ; \quad R = \left[\frac{\sqrt{\rho_2 B_2} - \sqrt{\rho_1 B_1}}{\sqrt{\rho_1 B_1} + \sqrt{\rho_2 B_2}} \right]^2 = 1 - T$$

Hvis tynn stang: $B \rightarrow Y$

Eks: Luft/Vann grenseflate, $R \approx 99.9\%$

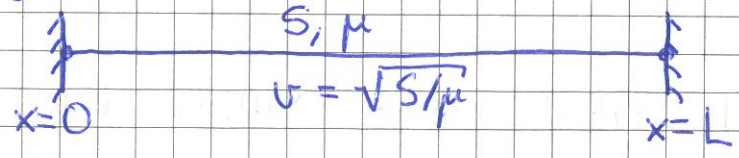
Tynn stang Al-Stål, $R \approx 24\%$

Dvs: $R \approx 1$ hvis svært ulike medier

$R \approx 1$ hvis relativt like medier

Stående bølger [YF 15.7, 15.8, 16.4; LL 10.3]

Streng fast i begge ender:



$$y(0,t) = y(L,t) = 0$$

Grensen $\mu_2 \rightarrow \infty$ (s. 102) : $y_{r0} = y_{l0} = y_0$

$$\Rightarrow y(x,t) = y_0 \{ \sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t) \}$$

Ser at $y(0,t) = 0$.

Bruger $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$

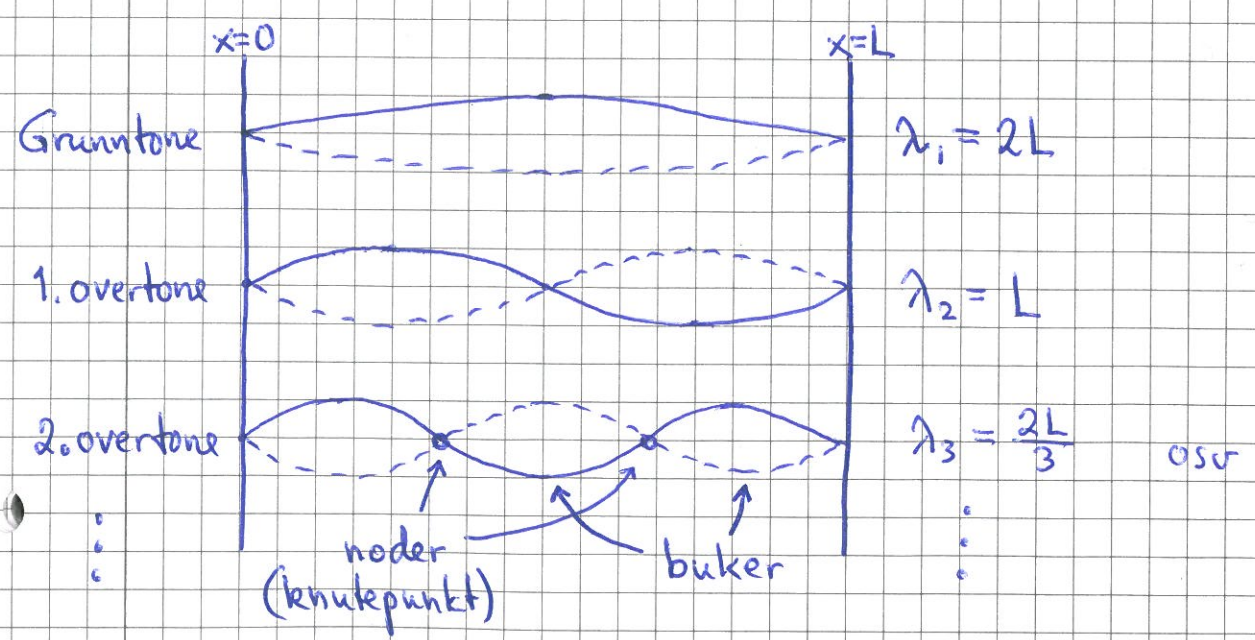
$$\Rightarrow y(x,t) = 2 y_0 \sin kx \cos \omega t$$

Dvs: Svingning, med posisjonsavhengig amplitude $2 y_0 \sin kx$.
 Kalles en stående bølge.

Mulige λ og f :

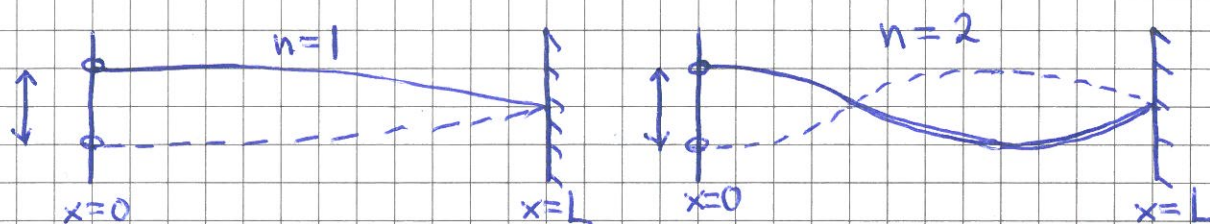
$$y(L,t) = 0 \Rightarrow \sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow \boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}} \quad (n=1,2,3,\dots)$$

$$\Rightarrow \boxed{f_n = v/\lambda_n = \sqrt{S/\mu} n / 2L} \quad (n=1,2,3,\dots)$$



Med en fast og en fri ende: $y_{ro} = -y_{lo} = -y_0$ s. 102

$$\Rightarrow y(x,t) = y_0 \{ \sin(kx - \omega t) - \sin(kx + \omega t) \} = -2y_0 \cos kx \sin \omega t$$



$$\cos kL = 0 \Rightarrow kL = (n - \frac{1}{2})\pi \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_n = \frac{4L}{2n-1}}$$

Max amplitude (buk), $2y_0$, i fri ende.

$$\Rightarrow \boxed{f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \sqrt{S/\mu} (2n-1)/4L}$$

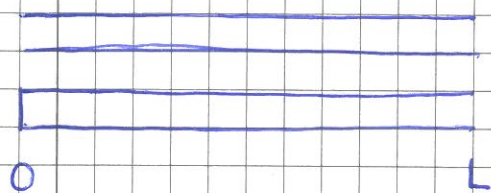
Eks: A-streng på bratsj, grunntone 440 Hz, 390 mm mellom de to faste endene, massetetthet 20g/m. Bestem strammingskraften.

Løsn: $f_1 = \sqrt{S/\mu}/2L$

$$\Rightarrow S = \mu \cdot (2L f_1)^2 = 0.0020 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot 4 \cdot 0.390^2 \text{ m}^2 \cdot 440^2 \text{ s}^{-2} \\ \approx \underline{\underline{236 \text{ N}}}$$

$$(v = 343 \text{ m/s})$$

Samme prinsipp for blåseinstrumenter:



To åpne ender (Tverrflyte, Pikkolo)

En lukket ende (De fleste andre)

Null longit. utsving ξ ved lukket ende,
max " " " " ved åpen ende

$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad f_n = \frac{\sqrt{B/\rho}}{2L} n \quad \text{med to åpne ender} \quad (n=1,2,3,\dots)$$

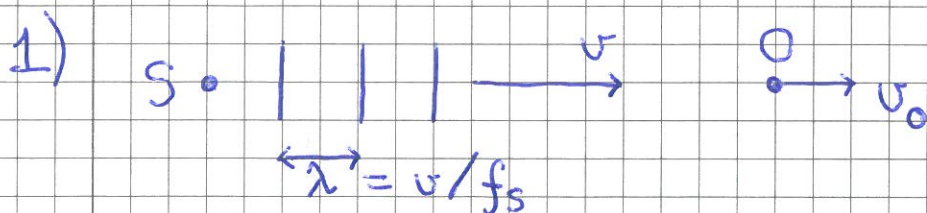
$$\lambda_n = \frac{4L}{2n-1}, \quad f_n = \frac{\sqrt{B/\rho} (2n-1)}{4L} \quad \text{med en lukket ende}$$

Fra s 88: $\Delta p(x,t) = -B \frac{\partial \xi}{\partial x}$ (trykkbølgen)

$\Rightarrow \Delta p$ har buk ved lukket og node ved åpen ende

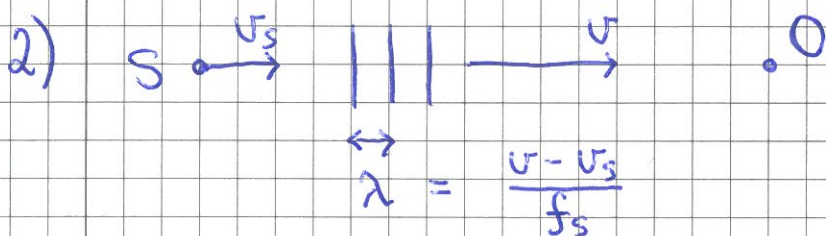
Dopplereffekt [YF 16.8 ; LL 10.8]

- Lydkilde S og observatør O i relativ bevægelse langs forbindelseslinjen S --- O $\Rightarrow$ Observeret frekvens $f_0 \neq$ Utsendt frekvens f_s

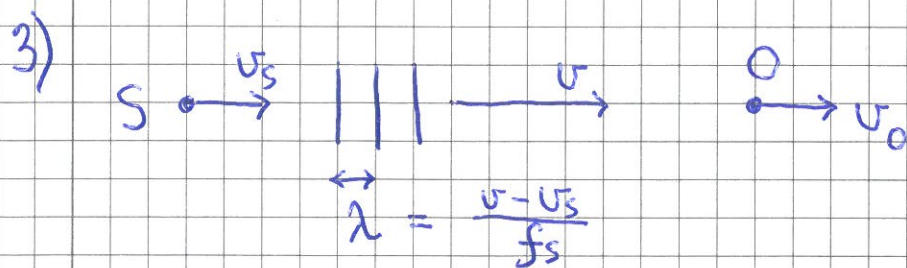


Bølgefart relativt O: $v - v_o$

$$\Rightarrow f_0 = \frac{v - v_o}{\lambda} = \frac{v - v_o}{v} \cdot f_s < f_s \text{ hvis } v_o > 0$$



$$f_0 = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{v - v_s} \cdot f_s > f_s \text{ hvis } v_s > 0$$



$$f_0 = \frac{v - v_o}{\lambda} = \frac{v - v_o}{v - v_s} \cdot f_s$$

4) Vind, v_m = luftas fart, $v \rightarrow v + v_m \Rightarrow f_0 = \frac{v + v_m - v_o}{v + v_m - v_s} \cdot f_s$