

Interferens [YF 15.6, 16.6; LL 10.7]

(108)

"To eller flere bølger på samme sted til samme tid"

Samme retning, ulik fase:

$S_1 \circ \quad | \quad | \quad | \rightarrow v$

$S_2 \circ \quad | \quad | \quad | \rightarrow v$

$\Delta\phi$

○

• $y(x,t) = ?$

Totalbølge ved 0:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

$$= y_0 \cos(kx - \omega t) + y_0 \cos(kx - \omega t + \Delta\phi)$$

$$\cos \frac{a-b}{2} + \cos \frac{a+b}{2} = 2 \cos \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$$

$$\Rightarrow y(x,t) = 2y_0 \cos \frac{\Delta\phi}{2} \cos(kx - \omega t + \frac{\Delta\phi}{2})$$

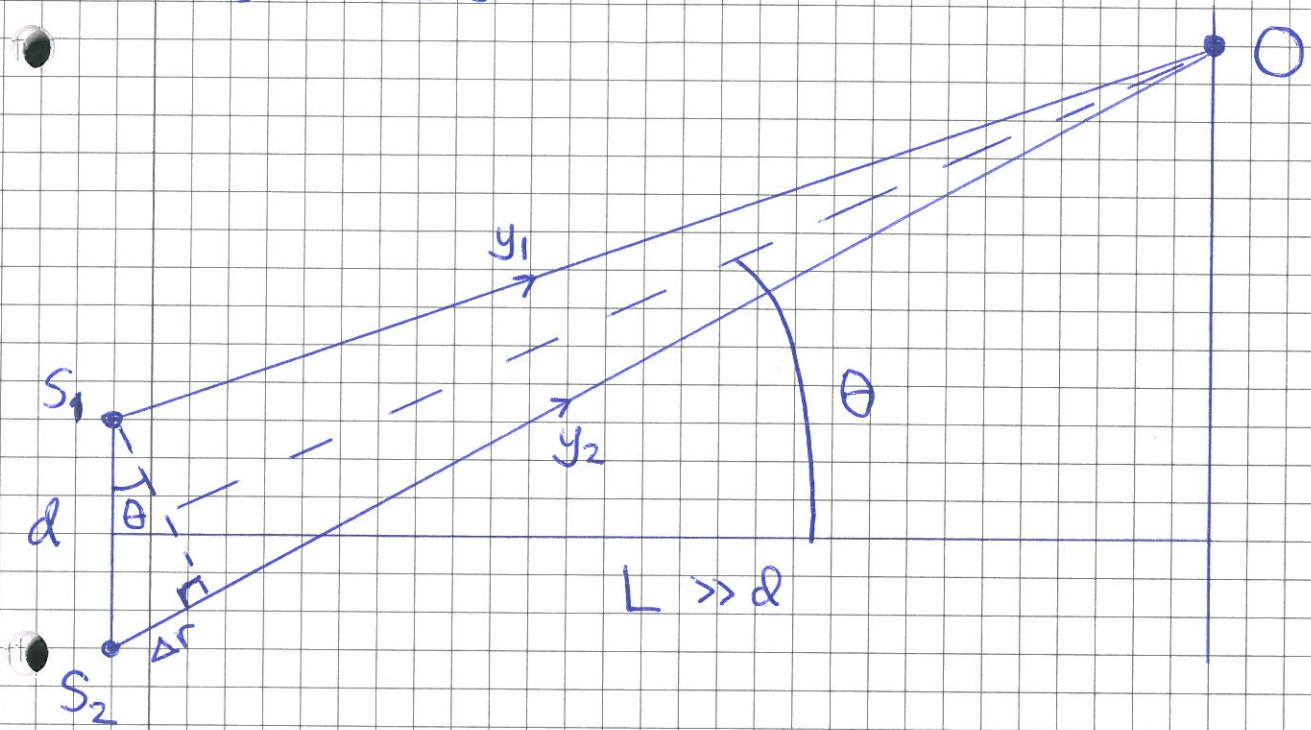
$\Rightarrow$ Konstruktiv interferens og max amplitude $2y_0$

hvis $\Delta\phi = 0$, dvs y_1 og y_2 i fase ved 0.

Destruktiv interferens og null amplitude

hvis $\Delta\phi = \pi$, dvs y_1 og y_2 i motfase ved 0.

Retningsavhengig interferens:



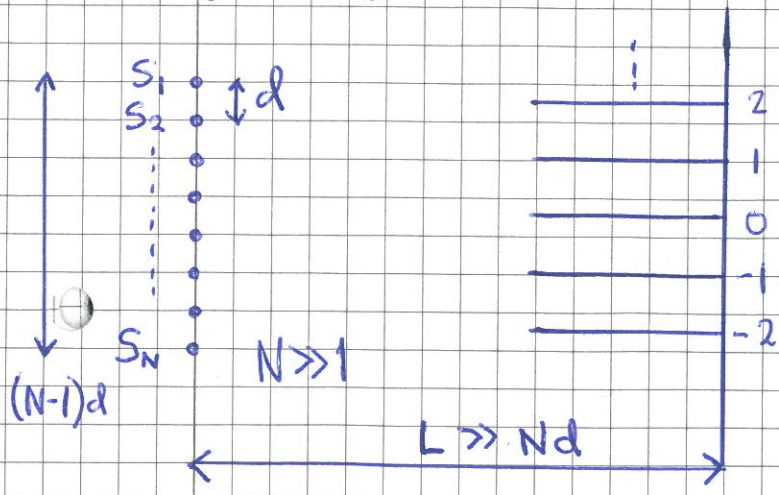
S_1 og S_2 er to like bølgekilder som svinger i fase

Veikengdeforskjell: $\Delta r \approx d \sin \theta$ når $L \gg d$

$\Rightarrow$ Max. intensitet ved 0 når $d \cdot \sin \theta = n \cdot \lambda$

Min. ————— " ————— $d \cdot \sin \theta = (n + \frac{1}{2}) \lambda$
($n=0, 1, 2, \dots$)

Mange bølgekilder (diffraksjonsgitter):



Skarpe intensitetsmaksima
i retninger gitt ved
 $d \cdot \sin \theta = n \lambda$
($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

Støvning [YF 16.7; LL 10.7]

110

"Interferens i tid"

$S_1 \bullet \begin{array}{c} \longleftrightarrow \lambda_1 \\ | \quad | \quad | \end{array} \xrightarrow{v} \quad \xi_1(x,t) = \xi_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t) \quad x=0$

$S_2 \bullet \begin{array}{c} | \quad | \quad | \\ \longleftrightarrow \lambda_2 \approx \lambda_1 \end{array} \xrightarrow{v} \quad \xi_2(x,t) = \xi_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t) \quad \xi(0,t) = ?$

Total bølge: $[\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}]$

$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t)$

$$= 2\xi_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos(kx - \omega t)$$

med $\Delta k = k_1 - k_2$, $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, $k = \frac{k_1 + k_2}{2}$, $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

Antar $\Delta k \ll k$ og $\Delta\omega \ll \omega$.

Observeret bølge ved $x=0$:

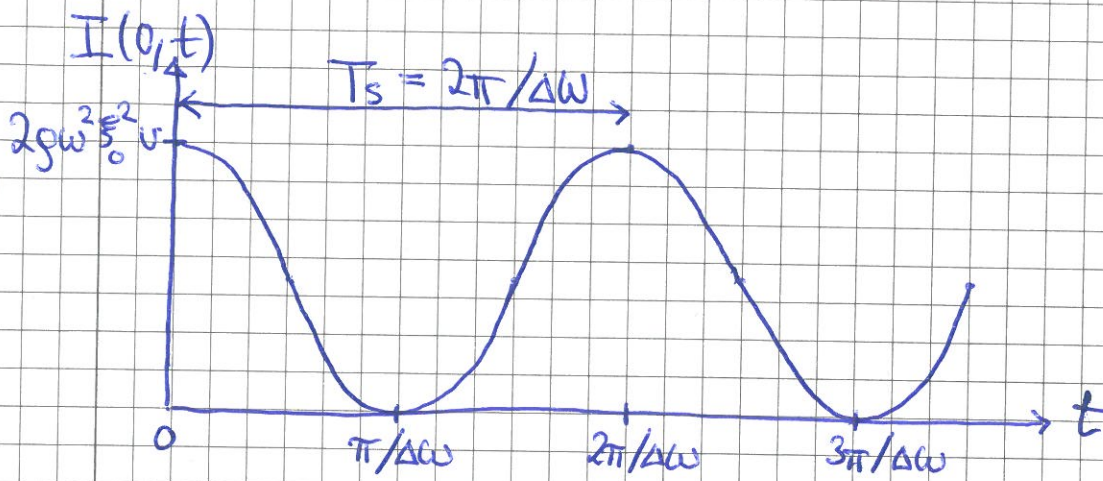
$\xi(0,t) = 2\xi_0 \cos \frac{\Delta\omega}{2}t \cos \omega t$

Observeret intensitet ved $x=0$:

$$I(0,t) = \langle \epsilon \rangle \cdot v = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (2\xi_0)^2 v \cdot \cos^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$
$$= \rho \omega^2 \xi_0^2 v \{1 + \cos(\Delta\omega \cdot t)\}$$

Her er $\langle \epsilon \rangle$ et middel over en periode $T = 2\pi/\omega$ over den raske svingningen (den som gir tæren)

(III)



Vi hører tonen (frekvensen)

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

med moduleret intensitet (sveining, beats) med
svevefrekvens

$$f_s = \frac{1}{T_s} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = f_1 - f_2$$

Gruppehastighet og dispersjon

(112)

Summen av ξ_1 og ξ_2 på s. 110 gir "bølgepakke"

$$\xi(x,t) = 2\xi_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right) \cdot \cos(kx - \omega t)$$

med en raskt varierende bærebølge

$$\cos(kx - \omega t)$$

med hastighet

$$v = \omega/k = v_f = \text{fasehastigheten}$$

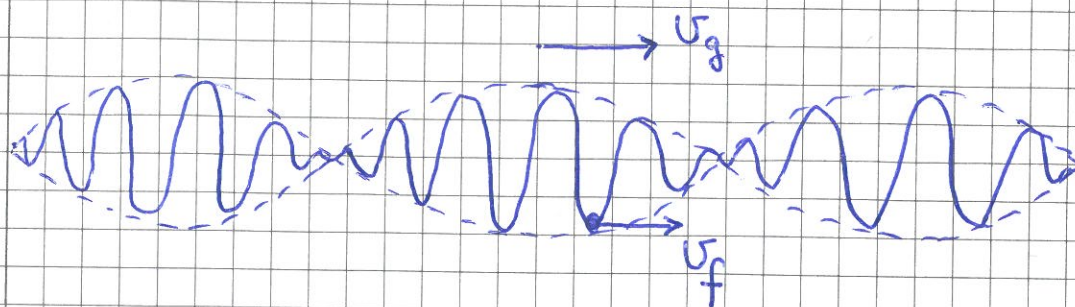
og en langsomt varierende modulasjonsbølge

$$\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right)$$

med hastighet $\Delta \omega / \Delta k$. Hvis $\Delta \omega$ og

Δk er små, er $\Delta \omega / \Delta k \approx d\omega / dk$, som er

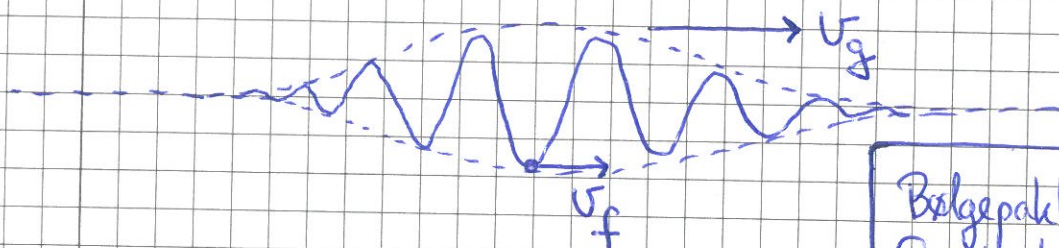
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \text{gruppehastigheten}$$



v_g er fellestastigheten til bølgepakken (-gruppen)

v_f er hastigheten til f.eks. en bestemt bølgedal

Sum av mange harmoniske delbølger med
bølgelengder omkring en "typisk" bølgelengde λ
kan gi en romlig avgrenset bølgepakke:



Bølgepakkens energi
forplanter seg med
hastighet v_g

$\omega(k)$ = dispersjonsrelasjonen

- For bølger på streng ($v_f = \sqrt{S/\mu}$) og lydbølger i fluid ($v_f = \sqrt{B/\rho}$) har vi lineær dispersjon, dvs $\omega = v_f \cdot k$ med v_f uavhengig av k
 $\Rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(v_f k) = v_f$

Overflatebølger på vann ["Vannbølger i bølgerenna";
Notat + Filmer]

- Dypt vann ($D \gg \lambda$): $\omega(k) = \sqrt{gk + \gamma k^3/\rho}$
 med $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\gamma = 0.073 \text{ N/m}$ (overflate-
 spenning)

Tyngdekraften "styrende" når $gk \gg \gamma k^3/\rho$ (tyngdebølger);
 overflatespenning — — — — — når $gk \ll \gamma k^3/\rho$ (kapillærbølger);
 "like viktige" når $gk = \gamma k^3/\rho$, dvs $\lambda = 2\pi\sqrt{\gamma/\rho g} \approx \underline{1.7 \text{ cm}}$

Tyngdebølger: $\omega \approx \sqrt{gk} \Rightarrow v_f = \sqrt{g/k}$, $v_g = \frac{1}{2}\sqrt{g/k} = \frac{1}{2}v_f$
 Kapillærbølger: $\omega \approx \sqrt{\gamma k^3/\rho} \Rightarrow v_f = \sqrt{\gamma k/\rho}$, $v_g = \frac{3}{2}v_f$

Tyngdebølger, generelt: $\omega^2 = gk \tanh kD$; D = vann dybden
 Dypt vann: $\omega^2 = gk$ (som over) Grunt vann: $\omega^2 = gDk^2$
 ($\tanh x \approx 1$ når $x \gg 1$, $\tanh x \approx x$ når $x \ll 1$)

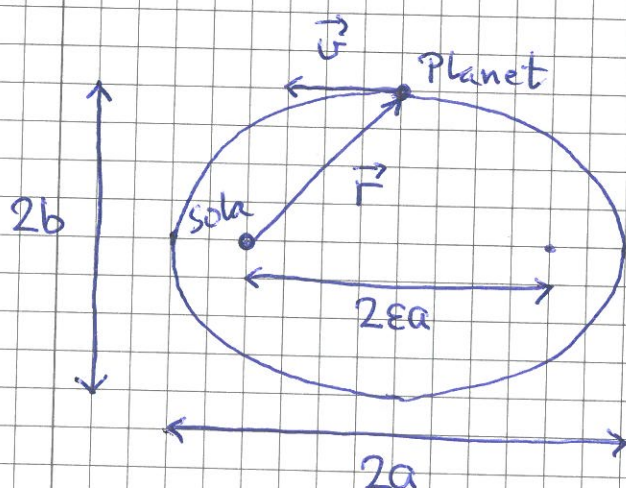
Gravitasjon [YF 13, LL 11]

(114)

Keplers lover [YF 13.5; LL 11.5]

Kepler (1571-1630) analyserte Brahes observasjoner (1546-1601)

K1: Ellipseformede planetbaner med sola i et brennpunkt



$$\epsilon = \sqrt{1 - b^2/a^2} = \text{ellipsens eksentrisitet}$$

	ϵ
sirkel	0
ellipse	$0 < \epsilon < 1$
parabel	1
hyperbel	$\epsilon > 1$

(Mer i TFY4345
Klassisk mekanikk)

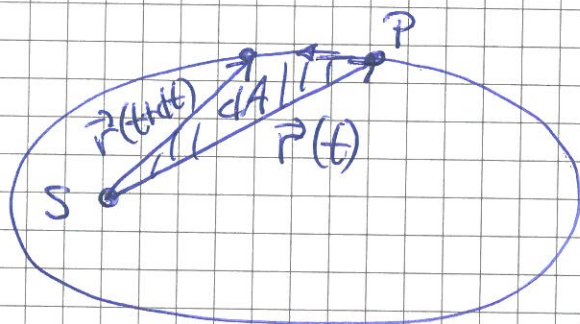
K3: $T^2/a^3 \approx \text{konstant}$ for alle planetene (Se TFY4345)

$T = \text{omløpstid}$

$$\left(T^2/a^3 = \frac{4\pi^2}{G(M_S + m_p)} \right)$$

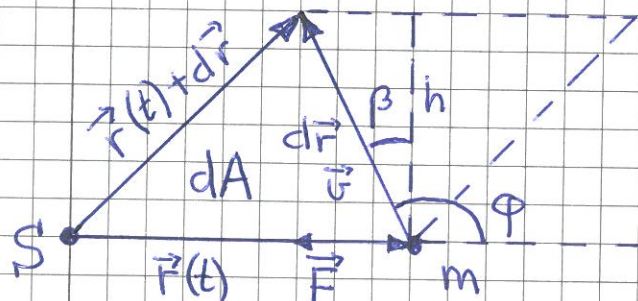
K2:

115



$$\frac{dA}{dt} = \text{konstant}$$

Beweis:



$$\varphi = \pi/2 + \beta$$

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt$$

$$\vec{F} \parallel -\hat{r} \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \stackrel{N2}{\Rightarrow} \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{konstant}$$

$$L = r \cdot m v \cdot \sin \varphi$$

$$dA = \frac{1}{2} r h \quad (\text{halb-} \text{parallelogram})$$

$$= \frac{1}{2} r dr \cos \beta = \frac{1}{2} r dr \cos (\varphi - \pi/2)$$

$$= \frac{1}{2} r dr \sin \varphi$$

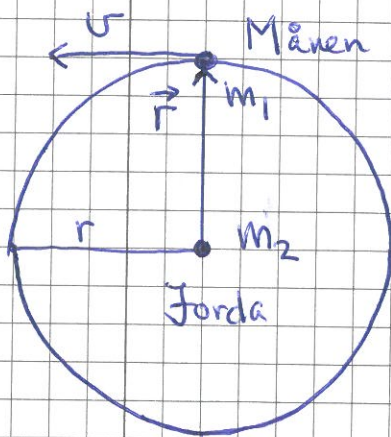
$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r \frac{dr}{dt} \sin \varphi = \frac{1}{2} r v \sin \varphi = \frac{L}{2m} = \text{konstant.}$$



Newtons gravitasjonslov [YF 13.1; LL 2.5, 11.1]

(116)

[1642-1727; "Principia", 1687]



- $\epsilon = 0.0549$ for månen
Anta $\epsilon \approx 0$; K1 $\Rightarrow$ sirkelbane
~~elliptisk~~ ($a = b = r$)

- K2: $\vec{L} = \text{konst.} \Rightarrow \vec{F} \parallel -\hat{r}$

- Sirkelbane $\Rightarrow F_{21} = m_1 \cdot \frac{v^2}{r} = m_1 \omega^2 r = m_1 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$

- K3: $T^2 = G \cdot a^3 = G \cdot r^3$

$$\Rightarrow F_{21} \sim m_1 / r^2$$

- N3: $F_{12} = F_{21} \Rightarrow F \sim m_2$

Dermed: $\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$

- Cavendish, 1798 $\Rightarrow G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

På jordoverflaten:

$$F = mg \quad \text{med} \quad g = GM/R^2 = 9.81 \text{ m/s}^2$$



Potensiell energi [YF 13.3; LL 11.1]

$$U(r) = - \int_{r_0}^r F(r) dr ; \text{ Velger } U(r_0 \rightarrow \infty) = 0$$

$$\Rightarrow U(r) = - \int_{\infty}^r \left(- \frac{GMm}{r^2} \right) dr = \int_{\infty}^r \left(- \frac{GMm}{r} \right) = \underline{\underline{- \frac{GMm}{r}}}$$

Masse m i jordas tyngdefelt; $z = r - R = \text{høyde over bakken}$:

$$U(z) - U(0) = - \frac{GMm}{z+R} - \left(- \frac{GMm}{R} \right)$$

$$= GMm \frac{-R + (z+R)}{(z+R) \cdot R}$$

$$\stackrel{R \gg z}{\approx} m \cdot \frac{GM}{R^2} \cdot z$$

$$= \underline{\underline{mgz}}$$

Satellitter [YF 13.4]

Antar sirkelbane: $N2 \Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = ma = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow \underline{v = \sqrt{\frac{GM}{r}}}$

Geostasjonær bane hvis $T = 24 \text{ h} \Rightarrow r = 42246 \text{ km}$ (Ø-11)
(Over fast sted på ekvator)

Energier: $E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m \frac{GM}{r} - \frac{GMm}{r} = \underline{\underline{- \frac{GMm}{2r}}}$

ders $K = -\frac{1}{2}U = -E > 0$

Potensial og felt [LL 11.1]

(118)

Felt $\stackrel{\text{def}}{=}$ Kraft pr masseenhet

$$\vec{g} = \left(\lim_{m \rightarrow 0} \right) \frac{\vec{F}}{m} = - \frac{MG}{r^2} \hat{r}$$

= gravitasjonsfeltet som massen M
omgir seg med

Potensial $\stackrel{\text{def}}{=}$ Potensiell energi pr
masseenhet

$$V(r) = \frac{U(r)}{m} = - \frac{MG}{r}$$

= gravitasjonspotensialet som
 M omgir seg med