

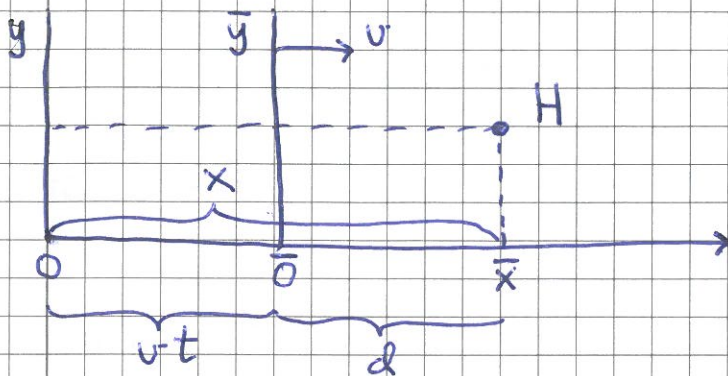
Lorentztransformasjonene (LT) [YF 37.5; LL 12.2]

129

LT uttrykker hendelse H i S , der (x, y, z, t) ved samme hendelse i $\bar{S}$, der $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$.

$\bar{S}$ har hastighet $v \hat{x}$ relativt S (og omvendt)

Felles origo, $O = \bar{O}$, ved synkronisert tid $t = \bar{t} = 0$.



Galilei:

$$\bar{x} = x - vt$$

$$\bar{t} = t$$

Einstein: $d = \bar{O}\bar{x}$ målt i $S = x - vt$

$$\bar{x} = \bar{O}\bar{x} \text{ målt i } \bar{S} = d / \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

pga
(lengde-
kontraksjon)

Lorentzfaktoren: $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \geq 1$

Dermed: $\bar{x} = \gamma(x - vt)$

Da S har hastighet $-v \hat{x}$ relativt $\bar{S}$:

$$x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t})$$

(S og $\bar{S}$ er like gode inertialsystemer)

Ingen lengdekontraksjon $\perp \vec{v}$

$$\Rightarrow \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z$$

Fra $\bar{x}(x, t)$ og $x(\bar{x}, \bar{t})$ bestemmes $\bar{t}(x, t)$ og $t(\bar{x}, \bar{t})$:

$$x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t}) = \gamma(\gamma(x - vt) + v\bar{t})$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \bar{t} &= \frac{1}{v} \left\{ \frac{x}{\gamma} - \gamma x + \gamma vt \right\} \\ &= \gamma t - \frac{\gamma x}{v} \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) \\ &= \gamma t - \frac{\gamma x}{v} \left(1 - (1 - v^2/c^2) \right) = \gamma t - \gamma xv/c^2\end{aligned}$$

og tilsvarende: $t = \gamma\bar{t} + \gamma\bar{x}v/c^2$

Oppsummert:

Når $\bar{S}$ har hastighet $v\hat{x}$ relativt S , dvs S har hastighet $-v\hat{x}$ relativt $\bar{S}$, uttrykkes hendelse i $\bar{S}$ ved ^(sanne) hendelse i S , og omvendt, med Lorentztransformasjonene

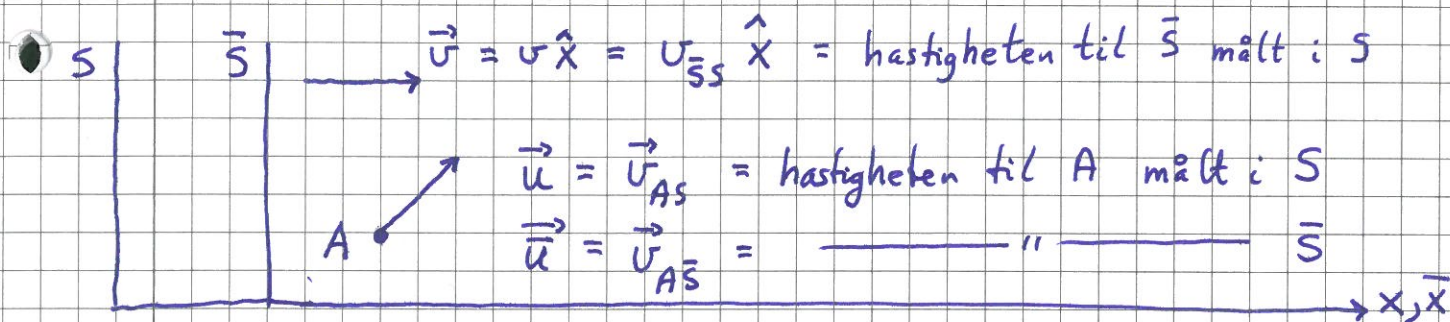
$\bar{x} = \gamma(x - vt)$	$x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t})$
$\bar{y} = y$	$y = \bar{y}$
$\bar{z} = z$	$z = \bar{z}$
$\bar{t} = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x)$	$t = \gamma(\bar{t} + \frac{v}{c^2}\bar{x})$

Lorentzfaktoren: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Transformasjon av hastighet

[YF 37.5 ; LL 12.3]

(131)



Galilei: $u_x = \bar{u}_x + u$, $u_y = \bar{u}_y$, $u_z = \bar{u}_z$

Einstein: $d\bar{x} = \gamma(dx - u dt)$, $d\bar{y} = dy$, $d\bar{z} = dz$, $d\bar{t} = \gamma(dt - \frac{u}{c^2} dx)$

$$\Rightarrow \bar{u}_x = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{\gamma(dx - u dt)}{\gamma(dt - \frac{u}{c^2} dx)} = \frac{dx/dt - u}{1 - \frac{u}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \frac{u_x - u}{1 - \frac{u_x u}{c^2}}$$

Tilsvarende:

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \dots \text{sjekk selv} \dots = \frac{\bar{u}_x + u}{1 + \frac{\bar{u}_x u}{c^2}}$$

Dessuten:

$$\bar{u}_y = \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = \frac{dy}{\gamma(dt - \frac{u}{c^2} dx)} = \frac{u_y/\gamma}{1 - \frac{u_x u}{c^2}}; \quad u_y = \frac{\bar{u}_y/\gamma}{1 + \frac{\bar{u}_x u}{c^2}}$$

$$\bar{u}_z = \frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} = \dots = \frac{u_z/\gamma}{1 - \frac{u_x u}{c^2}}; \quad u_z = \frac{\bar{u}_z/\gamma}{1 + \frac{\bar{u}_x u}{c^2}}$$

Tilsvarende for akselerasjon:

$$du_x = \frac{d\bar{u}_x}{1 + \bar{u}_x u/c^2} - \frac{\bar{u}_x + u}{(1 + \bar{u}_x u/c^2)^2} \cdot \frac{u}{c^2} d\bar{u}_x = \dots = \frac{d\bar{u}_x}{\gamma^3 (1 + \bar{u}_x u/c^2)^2}$$

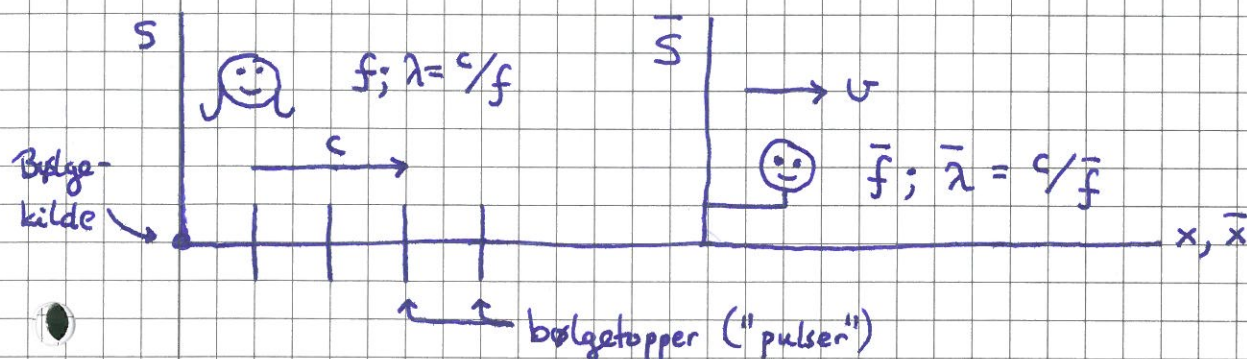
$$dt = \gamma(d\bar{t} + \frac{u}{c^2} d\bar{x}) = \gamma d\bar{t} (1 + \bar{u}_x u/c^2)$$

$$\Rightarrow a_x = \frac{du_x}{dt} = \dots = \frac{\bar{a}_x}{\gamma^3 (1 + \bar{u}_x u/c^2)^3}; \quad \bar{a}_x = \frac{d\bar{u}_x}{d\bar{t}} \quad (\text{osu osu!})$$

Dopplereffekt for elektromagnetiske bølger

[YF 37.6; LL 12.6]

Anta at S = system der lyskilden (bølgekilden) er i ro og sender ut bølge med frekvens f : (i origo)



Siv måler:

Hendelse	Tid t	Sams posisjon x
1. puls starter	0	x_0
— " — når $\bar{S}$ am	t_1	$x_1 = x_0 + vt_1 = ct_1$
2. puls starter	$T (=1/f)$	$x_0 + vT$
— " — når $\bar{S}$ am	t_2	$x_2 = x_0 + vt_2 = c(t_2 - T)$

Dermed:

$$x_2 - x_1 = \underbrace{v(t_2 - t_1) = c(t_2 - t_1) - cT}$$

$$\Rightarrow t_2 - t_1 = \frac{cT}{c - v}$$

$$\Rightarrow x_2 - x_1 = \frac{vcT}{c - v}$$

[$t_2 - t_1 > T$ når $\bar{S}$ am har fart v bort fra kilden

$x_2 - x_1 > 0$ ————— " —————]

Perioden $\bar{T} = 1/\bar{f}$ målt av Sam er tiden fra ankomst av 1. puls til ankomst av 2. puls:

$$\bar{T} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1 \stackrel{(LT)}{=} \gamma \left[\underbrace{(t_2 - t_1)}_{\frac{cT}{c-v}} - \frac{v}{c^2} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\frac{vcT}{c-v}} \right]$$

$$= \frac{\gamma cT}{c-v} \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \right]$$

$$= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{c}{c-v} \cdot T = \sqrt{\frac{c^2 - v^2}{c^2}} \cdot \frac{c^2}{(c-v)^2} \cdot T$$

$$= \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \cdot T \quad (> T \text{ når } v > 0)$$

$$\Rightarrow \text{Frekvensen målt av Sam: } \boxed{\bar{f} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} f}$$

Med lydbølger, kilde i ro (s. 107, tilfelle 1):

$$f_{\text{obs}} = \frac{v_{\text{Bølge}} - v_{\text{obs}}}{v_{\text{Bølge}}} \cdot f_{\text{utsendt}}$$

E.M. bølger med $v \ll c$:

$$\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} = \left(1 - \frac{v}{c}\right)^{1/2} \cdot \left(1 + \frac{v}{c}\right)^{-1/2} \approx \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v}{c}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v}{c}\right) \approx 1 - \frac{v}{c}$$

$$\Rightarrow \bar{f} = \frac{c-v}{c} f, \text{ som med lydbølger!}$$

Relativistisk mekanikk [YF 37.7+8 ; LL 12.7+8]

(134)

Med definisjonene $\vec{p} = m\vec{v}$ og $K = \frac{1}{2}mv^2$ for
hvor impuls og kinetisk energi utledet vi prinsippene
om impulsbevarelse og energibevarelse fra Newtons lover.

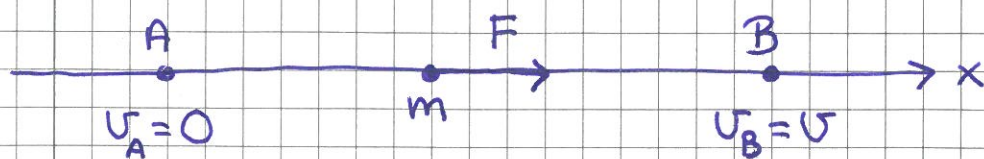
Relativistisk impuls må defineres som

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

for at total impuls fortrøtt skal være bevart i et
isolert system (upåvirket av ytre krefter) i
"Einstein-dynamikk". [Vises ikke her.]

Hva med relativistisk kin. energi?

Bruker def. av arbeid W , Newtons 2. lov $F = dp/dt$,
og $\Delta K = W$ (som på s. 21):



$$K = W = \int_A^B F dx = \int_A^B \frac{dp}{dt} dx = \int_A^B \frac{dp}{dv} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=v} \cdot dv$$

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dv} &= \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{mv \cdot \frac{1}{2} \cdot 2v/c^2}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \\ &= \frac{m(1-v^2/c^2) + mv^2/c^2}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{m}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow K &= \int_0^v \frac{mv \, dv}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = \int_0^v \frac{mc^2}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \\ &= \gamma mc^2 - mc^2\end{aligned}$$

Prinsippet om energibevarelse intakt når

γmc^2 oppfattes som total energi.

[Potensiell energi i f.eks. tyngdefelt kommer i tillegg]

Dermed:

Hvilkeenergi: $E_0 = mc^2$

Kin. energi: $K = (\gamma - 1) mc^2$

Total energi: $E = E_0 + K = \gamma mc^2$

I ikke-relativistisk grense, $v \ll c$:

$$\gamma \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2} \Rightarrow K \approx \left(\frac{v^2}{2c^2}\right) \cdot mc^2 = \frac{1}{2}mv^2, \quad \text{OK!}$$

Nyttig sammenheng:

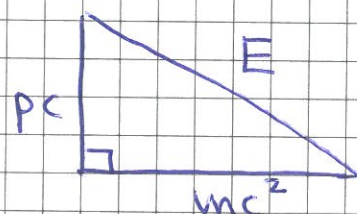
$$p = \gamma m v = \gamma m c^2 \cdot \frac{v}{c^2} = E \cdot \frac{v}{c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{pc}{E} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{p^2 c^2}{E^2}$$

$$\Rightarrow E^2 = (\gamma m c^2)^2 = (m c^2)^2 \left(1 - \frac{p^2 c^2}{E^2}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow E^2 \left(1 - p^2 c^2 / E^2\right) = (m c^2)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E^2 = (pc)^2 + (m c^2)^2}$$



Eks: Foton: $m=0$, $E=pc$

Partikkel i ro: $p=0$, $E=E_0=mc^2$

Definerer i denne sammenheng

Elastiske prosesser: E , $\vec{p}$, K og m bevart

Uelastiske — : E og $\vec{p}$ bevart (ikke K og m)

Her er E , $\vec{p}$, K og m total energi,

impuls, kin. energi og masse for hele systemet.

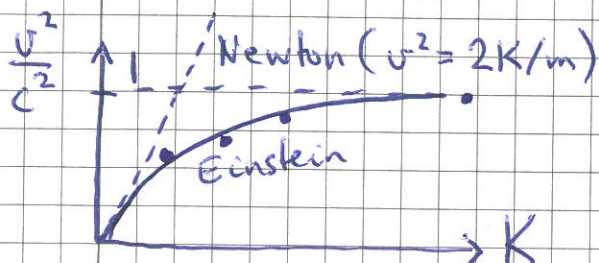
EKSEMPLER

(137)

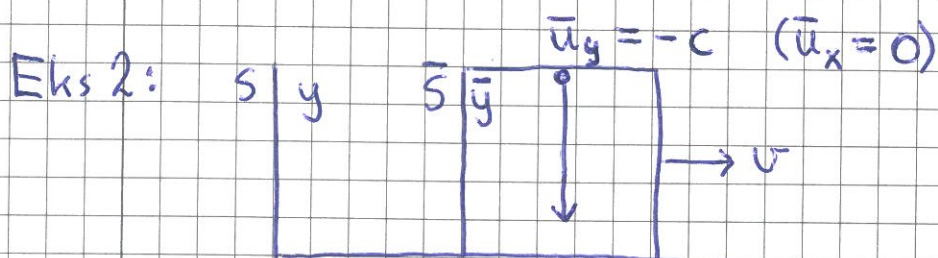
Eks 1: Bestem $v^2(K)$ for partikkel med masse m

Løsning: $E = K + mc^2 = \gamma mc^2 \Rightarrow \gamma = (K + mc^2)/mc^2$

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow \underline{\underline{v^2 = c^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) = c^2 \left(1 - \left(\frac{mc^2}{K + mc^2} \right)^2 \right)}}$$



Exp: W. Bertozzi, Am. J. Phys.
32, 551 (1964): Elektroner,
 $K = 15 \text{ MeV} \approx 30 m_e c^2$



Hva er $\vec{u}$ i S?

Løsning: Fra s. 131 ("Transf. av hastighet")

$$u_x = (\bar{u}_x + v) / (1 + \bar{u}_x v / c^2) = \underline{\underline{v}}$$

$$u_y = (\bar{u}_y / \gamma) / (1 + \bar{u}_x v / c^2) = \underline{\underline{-c \sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{v^2 + c^2 - v^2} = \underline{\underline{c}} \quad (\text{OK})$$

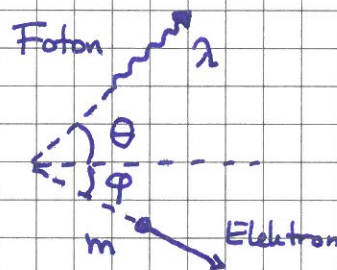
Eks 3: Compton-effekten

[YF 38.3;
LL 12.11]

(138)



Etter kollisjon:



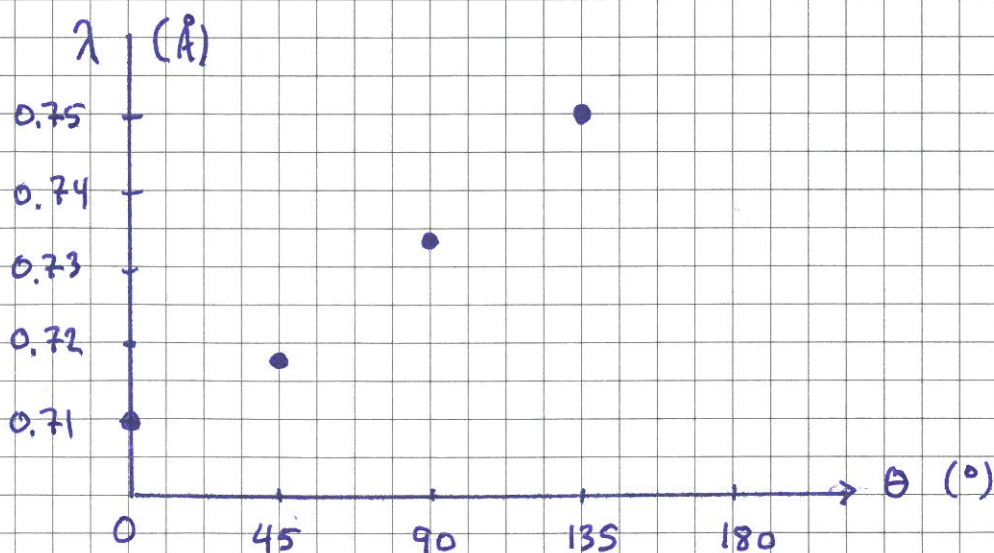
Dvs: Elastisk kollisjon mellom foton og elektron "i ro".

Exp: A. H. Compton, Physical Review, 1923

Røntgenstråling fra Mo (molybden), $\lambda_0 = 0.71 \text{ \AA}$,
kolliderer med løst bundne elektroner i grafitt (C).

Klassisk modell, med absorpsjon ~~og~~ og påfølgende emisjon
av E.M. bølgeenergi: Forventer $\lambda = \lambda_0$.

Exp. resultat:



Forklaring (Compton; basert på Einstein og Planck):

(139)

↑ Nobelpris i fysikk 1927 (med Wilson)

Før kollisjon:

Foton: energi E_0 , impuls E_0/c (null masse)

Elektron: —"— mc^2 , null impuls

Etter kollisjon:

Foton: energi E_f , impuls $\vec{p}_f$; $E_f = p_f c$

Elektron: —"— E_e , —"— $\vec{p}_e$; $E_e^2 = (mc^2)^2 + (p_e c)^2$

Fastlegger E_f , og dermed λ , ved å bruke impulsbevarelse og energibevarelse.

Impulsbev. vertikalt: $p_e \sin \varphi = p_f \sin \theta$

$$\Rightarrow \sin \varphi = \frac{p_f}{p_e} \sin \theta = \frac{E_f}{p_e c} \sin \theta$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - (E_f \sin \theta / p_e c)^2}$$

Impulsbev. horisontalt:

$$E_0/c = p_f \cos \theta + p_e \cos \varphi$$

$$\Rightarrow E_0 = E_f \cos \theta + p_e c \sqrt{1 - (E_f \sin \theta / p_e c)^2}$$

$$\Rightarrow (E_0 - E_f \cos \theta)^2 = (p_e c)^2 - E_f^2 \sin^2 \theta$$

$$\Rightarrow p_e^2 c^2 = E_0^2 - 2E_0 E_f \cos \theta + E_f^2$$

Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} E_0 + mc^2 &= E_f + E_e = E_f + \sqrt{(mc^2)^2 + (p_e c)^2} \\ &= E_f + \sqrt{m^2 c^4 + E_0^2 - 2E_0 E_f \cos \theta + E_f^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(E_0 + mc^2 - E_f)^2}_{\text{}} = m^2 c^4 + E_0^2 - 2E_0 E_f \cos \theta + E_f^2$$

$$= E_0^2 + m^2 c^4 + E_f^2 + 2E_0 mc^2 - 2E_0 E_f - 2mc^2 E_f$$

$$\Rightarrow E_f (E_0 - E_0 \cos \theta + mc^2) = E_0 mc^2$$

$$\Rightarrow E_f = \frac{E_0 mc^2}{E_0 (1 - \cos \theta) + mc^2} = \frac{1}{\frac{1 - \cos \theta}{mc^2} + \frac{1}{E_0}}$$

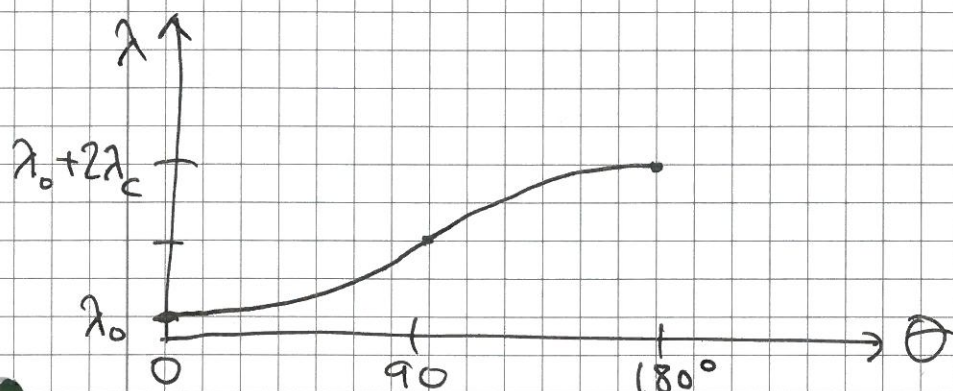
Plancks Quantenhypothese (1900):

$$E = hf; \quad h = \text{Plancks konstant} \approx 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

$$\Rightarrow E_f = hc/\lambda; \quad E_0 = hc/\lambda_0$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{hc} = \frac{1 - \cos \theta}{mc^2} + \frac{\lambda_0}{hc}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta)}$$



Compton-bølgelængden: $\lambda_c = h/mc$

For electron: $\lambda_c \approx 2.4 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 0.024 \text{ \AA} \quad (m = m_e)$

Ref:

A. H. Compton, Phys Rev 21, 483 (1923)