FY1001/TFY4145 Mekanisk Fysikk Eksamen 16. desember 2014 (Foreløpig versjon pr 5. desember 2014.)

FORMLER: Fete symboler angir vektorer. Symboler med hatt over angir enhetsvektorer. Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas forøvrig å være kjent. Symbolbruk og betegnelser som i forelesningene.

MEKANISK FYSIKK INKL SVINGNINGER

- Newtons andre lov: $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt \qquad \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = m\dot{\boldsymbol{r}}$
- Konstant akselerasjon: $v = v_0 + at \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
- Konstant vinkelakselerasjon: $\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
- Arbeid: $dW = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$
- Konservativ kraft og potensiell energi: $U(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$
- Friksjon, statisk: $f \leq \mu_s N$ kinetisk: $f = \mu_k N$
- Luftmotstand (liten v): $\boldsymbol{f} = -k\boldsymbol{v}$ Luftmotstand (stor v): $\boldsymbol{f} = -Dv^2\hat{v}$
- Tyngdepunkt: $\boldsymbol{R}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i \boldsymbol{r_i} m_i \to \frac{1}{M}\int \boldsymbol{r}\cdot dm$ Tyngdepunktbevegelsen: $M\ddot{\boldsymbol{R}}_{CM} = \boldsymbol{F}_{\mathbf{ytre}}$
- Sirkelbevegelse: $v = r\omega$ Sentripetalakselerasjon: $a = -v^2/r$ Baneakselerasjon: $a = dv/dt = r\,d\omega/dt$
- Dreiemoment: $\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\times\boldsymbol{F}$ Statisk likevekt: $\Sigma\boldsymbol{F}_i = 0 \quad \Sigma\boldsymbol{\tau}_i = 0$
- Dreieimpuls: $\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\times\boldsymbol{p}$ N2 rotasjon: $\boldsymbol{\tau} = d\boldsymbol{L}/dt$
- Stivt legeme, refleksjonssymmetri mhp rotasjonsaksen: $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_b + \boldsymbol{L}_s = (\boldsymbol{R}_{CM} - \boldsymbol{r}_0)\times M\boldsymbol{V} + I_0\boldsymbol{\omega}$
- Kinetisk energi, stivt legeme: $K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$ Treghetsmoment: $I = \sum_i m_i r_i^2 \to \int r^2 dm$
- Stivt legeme, rotasjon om fast akse: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$
- N2 rotasjon, akse med fast orientering: $\tau = I\frac{d\omega}{dt}$
- Steiners sats (parallellakseteoremet): $I = I_0 + Md^2$
- Gravitasjon: $U(r) = -\frac{GMm}{r} \quad \boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} = -\hat{r}\frac{dU(r)}{dr} \quad V(r) = \frac{U(r)}{m} \quad \boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} = -\hat{r}\frac{dV(r)}{dr}$
- Enkel harmonisk oscillator: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad T = 2\pi/\omega_0 \qquad f = 1/T = \omega_0/2\pi$

  Masse i fjær: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ Matematisk pendel: $\omega_0 = \sqrt{g/L}$ Fysisk pendel: $\omega_0 = \sqrt{mgd/I}$
- Fri, dempet svingning, langsom bevegelse i fluid: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$

  $\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \omega_0^2 = k/m \qquad \gamma = b/2m$

  Underkritisk demping $(\gamma < \omega_0)$ $x(t) = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega t + \phi)$ $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

  Overkritisk demping $(\gamma > \omega_0)$ $x(t) = Ae^{-\alpha_1 t} + Be^{-\alpha_2 t}$ $\alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

  Kritisk demping $(\gamma = \omega_0)$ $x(t) = Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t}$

- Tvungen svingning, harmonisk ytre kraft: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$

  (partikulær-)løsning: $x(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \phi(\omega))$

  amplitude: $A(\omega) = \dfrac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$

  halvverdibredde: $\Delta\omega \simeq 2\gamma$

  Q-faktor: $Q = \omega_0/\Delta\omega$

BØLGEFYSIKK

- Harmonisk plan bølge (forplantning i positiv x-retning):

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \phi) \quad , \quad k = 2\pi/\lambda \quad , \quad \omega = 2\pi/T = 2\pi f$$

- Bølgeligning:

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}$$

- Fasehastighet: $v = \lambda/T = \omega/k$
- Gruppehastighet: $v_g = d\omega/dk$
- Lineær respons i elastiske, isotrope medier (Hookes lov):

  mekanisk spenning = elastisk modul × relativ tøyning

  S = strekk-kraft, B = bulkmodul, E = elastisitetsmodul, G = skjærmodul
- For transversale bølger på streng: $v = \sqrt{S/\mu}$
- For longitudinale bølger (lydbølger) i fluider (gasser og væsker): $v = \sqrt{B/\rho}$
- For longitudinale bølger i tynn stang (fast stoff): $v = \sqrt{E/\rho}$
- For longitudinale (v_P) og transversale (v_S) bølger i faste stoffer (bulk):
  $v_P = \sqrt{(B + 4G/3)/\rho} \quad ; \quad v_S = \sqrt{G/\rho}$
- Midlere energi pr lengdeenhet for harmonisk bølge på streng:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y_0^2$$

- Midlere energi pr volumenhet for harmonisk plan longitudinal bølge (lydbølge):

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 \xi_0^2$$

- Midlere effekt transportert med harmonisk bølge på streng:

$$\overline{P} = v\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} v\mu\omega^2 y_0^2$$

- (Midlere) Intensitet i harmonisk plan longitudinal bølge (lydbølge):

$$I = v\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} v\rho\omega^2 \xi_0^2$$

- Lydtrykk:

$$\Delta p = -B \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

- Lydtrykksnivå:

$$\beta(\text{dB}) = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad \text{med } I_0 = 10^{-12}\,\text{W/m}^2$$

- Refleksjon og transmisjon av bølge på streng:

$$y_{r0} = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}}\, y_{i0} \;\; ; \;\; y_{t0} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}}\, y_{i0} \;\; ; \;\; R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i} = \left(\frac{y_{r0}}{y_{i0}}\right)^2 \;\; ; \;\; T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i} = 1 - R$$

- Dopplereffekt:

$$f_{\text{O}} = \frac{v + v_{\text{m}} - v_{\text{O}}}{v + v_{\text{m}} - v_{\text{S}}}\, f_{\text{S}}$$

- Svevning ("interferens i tid"):

$$f_S = |f_1 - f_2|$$

- Interferens (romlig):

$$I_{\text{max}} \text{ for } d \sin\theta = n\,\lambda \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

RELATIVITETSTEORI

- Lorentzfaktor:

$$\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$

- Lorentztransformasjonene ($\overline{S}$ har hastighet $\boldsymbol{v} = v\hat{x}$ i forhold til S):

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \gamma\,(x - vt) & \qquad x &= \gamma\,(\overline{x} + v\overline{t}) \\ \overline{y} &= y & y &= \overline{y} \\ \overline{z} &= z & z &= \overline{z} \\ \overline{t} &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) & t &= \gamma\left(\overline{t} + \frac{v}{c^2}\overline{x}\right) \end{aligned}$$

- Tidsdilatasjon:

$$\Delta t = \gamma \Delta \overline{t}$$

- Lengdekontraksjon:

$$\Delta \overline{x} = \gamma \Delta x$$

- Hastighet i S ($\boldsymbol{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y} + u_z\hat{z}$): $u_x = dx/dt \quad u_y = dy/dt \quad u_z = dz/dt$
  Hastighet i $\overline{S}$ ($\overline{\boldsymbol{u}} = \overline{u}_x\hat{x} + \overline{u}_y\hat{y} + \overline{u}_z\hat{z}$): $\overline{u}_x = d\overline{x}/d\overline{t} \quad \overline{u}_y = d\overline{y}/d\overline{t} \quad \overline{u}_z = d\overline{z}/d\overline{t}$
  Transformasjon av hastigheter:
  $u_x = (\overline{u}_x + v)/(1 + \overline{u}_x v/c^2) \quad u_y = (\overline{u}_y/\gamma)/(1 + \overline{u}_x v/c^2) \quad u_z = (\overline{u}_z/\gamma)/(1 + \overline{u}_x v/c^2)$

- Addisjon av hastigheter (alle hastigheter i samme retning; Einsteins addisjonsformel):

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2}$$

- Dopplereffekt for elektromagnetiske bølger:

$$\overline{f} = f\left(\frac{c-v}{c+v}\right)^{1/2}$$

- Relativistisk impuls:

$$\boldsymbol{p} = \gamma m \boldsymbol{v}$$

- Relativistisk energi:

$$E = \gamma mc^2 \quad ; \quad E_0 = mc^2 \quad ; \quad K = E - E_0 \quad ; \quad E^2 = (pc)^2 + \left(mc^2\right)^2$$

- Elastisk prosess: E, $\boldsymbol{p}$, K og m bevart.
- Uelastisk prosess: E og $\boldsymbol{p}$ bevart.

MIDDELVERDI OG FEIL I MÅLINGER

- Gauss' feilforplantningslov: $(\Delta q)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial q}{\partial a_i}\,\Delta a_i\right)^2$
- Middelverdi (gjennomsnittsverdi): $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$
- Standardavvik (feil i enkeltmåling): $\delta_x = \sqrt{\left(\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2\right)}$
- Standardfeil (feil i middelverdi): $\delta_{\overline{x}} = \delta_x/\sqrt{N}$

KONSTANTER, OMREGNINGSFAKTORER OG DEKADISKE PREFIKSER

- Fundamentale konstanter:

$$\begin{aligned} G &= 6.67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2} & h &= 6.63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js} \\ g &= 9.81\ \mathrm{m/s^2}) & \hbar &= h/2\pi = 1.05 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js} \\ m_e &= 9.11 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg} & e &= 1.60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \\ m_p = m_n &= 1.67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} & c &= 3.00 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s} \end{aligned}$$

- Omregningsfaktorer:

$$\begin{aligned} 1\ \mathrm{eV} &= 1.60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} \\ 1\ \text{Å} &= 10^{-10}\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

- Dekadiske prefikser: p = piko = 10^{-12}, n = nano = 10^{-9}, μ = mikro = 10^{-6}, m = milli = 10^{-3}, c = centi = 10^{-2}, k = kilo = 10^{3}, M = mega = 10^{6}, G = giga = 10^{9}