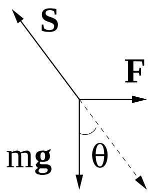
FY1001/TFY4145/TFY4109. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2015.
Løsningsforslag til øving 2.

Oppgave 1.



a) Vi har her et eksempel på statisk likevekt. Newtons 2. lov gir da at $\boldsymbol{F} + m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{S} = 0$, dvs $\boldsymbol{F}$ og $m\boldsymbol{g}$ balanseres av strekket i stanga, $\boldsymbol{S}$, som peker *langs stanga*. (Hvor opplagt er egentlig det...?) Dermed må også summen av $\boldsymbol{F}$ og $m\boldsymbol{g}$ peke langs stanga, som vist på figuren. Derav følger at

$$\tan\theta = \frac{F}{mg} \qquad \Rightarrow \qquad F = mg\tan\theta.$$

Riktig svar: C.

b) Kula roterer i horisontalplanet. Det er ingen bevegelse vertikalt, og dermed heller ingen akselerasjon vertikalt. Dermed må vertikalkomponenten av strekket i stanga, $S\cos\theta$, akkurat balansere tyngdekraften mg. Horisontalt er det kun horisontalkomponenten av strekket i stanga, $S\sin\theta$, som virker på kula. Denne kraften må derfor gi opphav til sentripetalakselerasjonen $v^2/r = \omega^2 r$. Vi har dermed de to ligningene (N1 vertikalt, N2 horisontalt)

$$\begin{aligned} S\cos\theta &= mg, \\ S\sin\theta &= m\omega^2 r = m\omega^2 L\sin\theta, \end{aligned}$$

og eliminasjon av S (f.eks ved å dele den første ligningen med den andre) gir

$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 L}.$$

Riktig svar: B.
Vi vet at $|\cos\theta| \le 1$. Med gitt verdi for L (og g) må derfor ω være større enn minimumsverdien

$$\omega_{\text{min}} = \sqrt{g/L}$$

for at stanga og kula skal rotere med vinkel $\theta > 0$. Hvis systemet roterer med $\omega \le \omega_{\text{min}}$, vil stanga og kula henge rett ned. Vi ser at $\theta = 0$, $S = mg$ og $r = 0$ er en mulig løsning av de to ligningene ovenfor. Helt til slutt kan vi jo registrere at meget rask rotasjon, $\omega \gg \sqrt{g/L}$, gir $\cos\theta \simeq 0$, dvs $\theta \simeq \pi/2$, og stanga peker praktisk talt horisontalt utover. Ikke uventet!

c) Kula og flyet har lik akselerasjon a, ellers ville vinkelen θ forandre seg. Kulas situasjon er den samme som i spm a, bortsett fra at det *ikke* virker noen kraft $\boldsymbol{F}$ rettet mot høyre. Vertikal kraftbalanse (pga ingen bevegelse og dermed heller ingen akselerasjon vertikalt) gir

$$S\cos\theta = mg.$$

Horisontalt er det horisontalkomponenten av strekket i snora, $S\sin\theta$, som virker på kula, og som gir kula en lineær akselerasjon a:

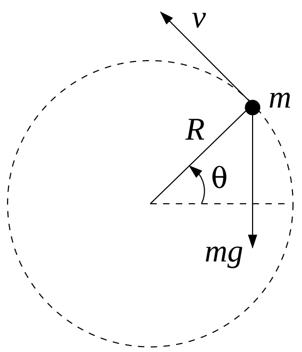
$$S\sin\theta = ma.$$

Divisjon av den siste med den første eliminerer S og gir

$$\tan\theta = a/g \qquad \Rightarrow \qquad a = g\tan\theta = g/\sqrt{3} = 5.7\,\text{m/s}^2.$$

Riktig svar: E.

Oppgave 2.



a) Snordraget S er rettet langs snora, radielt inn mot midten av sirkelen, og har ingen komponent tangentielt til sirkelbanen. Steinens vekt gir følgende kraftkomponent tangentielt, regnet positiv i positiv θ-retning (mot klokka): $-mg\cos\theta$. Akselerasjonen i tangentialretning er $a_{\parallel} = dv/dt = R d\omega/dt$. N2 langs sirkelbanen gir da

$$-mg\cos\theta = m \cdot R\,\frac{d\omega}{dt} \quad \Rightarrow \quad \underline{R\,\frac{d\omega}{dt} = -g\cos\theta,}$$

som vi skulle vise. Kjerneregelen for $\omega(\theta(t))$ gir

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\cdot\omega.$$

Derved har vi funnet følgende separable differensialligning for $\omega(\theta)$:

$$\underline{R\,\omega\,d\omega = -g\cos\theta\,d\theta.}$$

b) Vi løser ligningen ved å integrere fra starttilstand $\theta = 0$; $\omega = \omega_0$ til vilkårlig tilstand θ; ω:

$$R\int_{\omega_0}^{\omega}\omega\,d\omega = -g\int_0^{\theta}\cos\theta\,d\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}R(\omega^2 - \omega_0^2) = -g\cdot\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \underline{\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{2g}{R}\cdot\sin\theta.}$$

c) Snordraget S må, sammen med komponenten av steinens vekt radielt (dvs normalt på sirkelbanen), gi opphav til sentripetalakselerasjonen $R\omega^2$. N2 radielt gir da

$$S + mg\sin\theta = mR\omega^2 = mR\omega_0^2 - 2mg\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \underline{S(\theta) = mR\omega_0^2 - 3mg\sin\theta.}$$

Vi ser at vi har maksimalt snordrag $S_{\max}$ når $\sin\theta = -1$, dvs når massen passerer sirkelens bunnpunkt, som forventet. Vi ser videre at vi har minimalt snordrag $S_{\min}$ når $\sin\theta = 1$, dvs på toppen. Heller ikke uventet. Da er $S_{\min} = mR\omega_0^2 - 3mg$. Stram snor hele veien rundt har vi hvis $S_{\min} > 0$, som gir $\omega_0 > \sqrt{3g/R}$.

Oppgave 3.

a) Ingen bevegelse normalt skråplanet, og dermed null nettokraft i denne retningen. Tyngden mg har komponent $mg\cos\theta$ normalt skråplanet, følgelig er $N = mg\cos\theta$. Riktig svar: E.

b) Klossen ligger i ro, og dermed null nettokraft også parallelt med skråplanet. Tyngden mg har komponent $mg\sin\theta$ langs skråplanet, følgeli er $f = mg\sin\theta$. Riktig svar: B.

c) Maksimal friksjonskraft er $f_{\max} = \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta$. Ligger klossen i ro er dessuten $f = mg\sin\theta$ (se b). Dermed må statisk friksjonskoeffisient minst være $\mu_s^{\min} = (mg\sin\theta)/(mg\cos\theta) = \tan\theta$. Riktig svar: C.

d) Hvis klossen glir, er $f = \mu_k N = \mu_k mg\cos\theta$. Netto kraft nedover langs skråplanet er dermed $mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta$, hvoretter N2 gir $a_{\parallel} = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$. Riktig svar: A.

e) Konstant hastighet dersom $a_{\parallel} = 0$ dvs $\tan\alpha = \mu_k$. Riktig svar: E.

Oppgave 4.

a) Klossene glir, da er $f = \mu N = \mu mg\cos\beta$. (Der μ er kinetisk friksjonskoeffisient.) Riktig svar: B.

b) Med stram snor virker snordraget S nedover på kloss nr 1. N2 gir da:

$$m_1 g \sin\beta + S - \mu_1 m_1 g \cos\beta = m_1 a_1,$$

dvs

$$a_1 = g(\sin\beta - \mu_1 \cos\beta) + S/m_1.$$

Riktig svar: B.

c) Med stram snor virker snordraget S oppover på kloss nr 2. N2 gir da:

$$m_2 g \sin\beta - S - \mu_2 m_2 g \cos\beta = m_2 a_2,$$

dvs

$$a_2 = g(\sin\beta - \mu_2 \cos\beta) - S/m_2.$$

Riktig svar: E.

d) $a_1 = a_2 = a$ gir, ved å trekke ligningen for a_2 fra ligningen for a_1,

$$S\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = g\cos\beta\,(\mu_1 - \mu_2)\,.$$

Stram snor, $S > 0$, krever altså $\mu_1 > \mu_2$. Riktig svar: B.

e) Fra forrige punkt finner vi

$$S = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, g\cos\beta(\mu_1 - \mu_2).$$

Dette setter vi inn for S i ligningen for a_1 (eller a_2):

$$a = g(\sin\beta - \mu_1 \cos\beta) + S/m_1,$$

hvoretter litt opprydding gir

$$a = g\left(\sin\beta - \cos\beta\frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}\right).$$

Konstant hastighet hvis $a = 0$, dvs

$$\sin\beta = \cos\beta\frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2},$$

og dermed

$$\tan\beta = \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Riktig svar: B.

Oppgave 5.

a) Siden partikkelen følger en sirkulær bane, vil det alltid være en komponent av akselerasjonen rettet inn mot sirkelens sentrum (sentripetalakselerasjonen). Her øker dessuten hastigheten, så akselerasjonen må også ha en komponent tangentielt til sirkelbanen. Vektorsummen av normal- og tangentialkomponenten blir en total akselerasjon $\boldsymbol{a}$ med retning på skrå innover, som i B.

b) Legemet beveger seg med konstant positiv hastighet til å begynne med, deretter bremses det ned, før det snur og til slutt beveger seg med konstant negativ hastighet. Konstant fart betyr null akselerasjon, nedbremsing betyr negativ akselerasjon. Figur C passer bra med dette.

c) Prosjektil A er lengst tid i lufta. Vertikalbevegelsen, $z(t)$, beskrives ved

$$z(t) = v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Landingstidspunktet er gitt ved $z = 0$, dvs $t = 2v_{0z}/g$. Med andre ord, lengre tid i lufta jo større vertikalkomponent av starthastigheten v_0.