FY1001/TFY4145/TFY4109. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2015.

Løsningsforslag til øving 9

Oppgave 1

a) Svar C er korrekt. Fasehastigheten er gitt ved

$$v = \frac{\omega}{k}$$

og vi ser fra figuren at dette forholdet er størst for små verdier av k, dvs for lange bølgelengder.

b) Svar B er korrekt. Bølgehastigheten er gitt ved

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

slik at en endring i S til $S + \Delta S$ gir hastigheten

$$\begin{aligned} v' &= \sqrt{\frac{S+\Delta S}{\mu}} = \sqrt{\frac{S(1+\Delta S/S)}{\mu}} \\ &= \sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot \sqrt{1+\Delta S/S} \simeq \sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot (1+\Delta S/2S) = v \cdot (1+\Delta S/2S) \end{aligned}$$

Følgelig er

$$\Delta v = v' - v = v\Delta S/2S$$

c) Svar A er korrekt. Bølgehastigheten er gitt ved

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

slik at en endring i μ til $\mu + \Delta\mu$ gir hastigheten

$$\begin{aligned} v' &= \sqrt{\frac{S}{\mu+\Delta\mu}} = \sqrt{\frac{S}{\mu(1+\Delta\mu/\mu)}} \\ &= \sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\Delta\mu/\mu}} \simeq \sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot (1-\Delta\mu/2\mu) = v \cdot (1-\Delta\mu/2\mu) \end{aligned}$$

Følgelig er

$$\Delta v = v' - v = -v\Delta\mu/2\mu$$

d) B

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 10\log\frac{I_1}{I_0} \\ \Rightarrow \frac{\beta_1}{10} &= \log I_1 - \log I_0 \\ \beta_2 &= 10\log\frac{I_2}{I_0} = \beta_1 + 5 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\beta_1}{10}+\frac{1}{2} &= \log I_2 - \log I_0 \\
\Rightarrow \log I_2 - \log I_1 &= \frac{1}{2} \\
\Rightarrow \frac{I_2}{I_1} &= 10^{1/2} \simeq 3.16
\end{aligned}
$$

e) C
Intensiteten er proporsjonal med utsvingsamplituden kvadrert, mens trykkamplituden er proporsjonal med utsvingsamplituden. Dermed blir intensiteten proporsjonal med trykkamplituden kvadrert, og vi finner

$$\frac{p_2}{p_1} = \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} = 10^{1/4} \simeq 1.78$$

f) D

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{P}{A_{\text{halvkule}}} = \frac{P}{2\pi r^2} = \frac{0.2}{2\pi \cdot 4^2} \simeq 2.0 \text{ mW/m}^2 \\
\Rightarrow \beta &= 10 \log \frac{2.0 \cdot 10^{-3}}{10^{-12}} = 93 \text{ dB}
\end{aligned}
$$

Oppgave 2

a) Bølgelengden:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{330}{1000}\,\text{m} = 33\,\text{cm}$$

Riktig svar: C

b) Intensitetsnivået β målt i dB er definert ved

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0},$$

der referanseintensiteten $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2. Med $I = 10^{-9}$ W/m^2 har vi

$$\beta = 10 \log \frac{10^{-9}}{10^{-12}} = 10 \cdot 3 = 30 \text{ dB}.$$

Riktig svar: C

c) Intensiteten I tilsvarer en midlere effekt P pr flateenhet A. Vi anslår trommehinnens areal til f.eks 0.5 cm^2. Effekten som mottas på en slik flate blir dermed

$$P = I \cdot A = 10^{-9} \text{ W/m}^2 \cdot 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 5 \cdot 10^{-14} \text{ W}.$$

(Som er under forutsetning av at lydbølgen faller normalt inn mot trommehinnen.) Riktig svar: A

d) Sammenhengen mellom intensiteten I og utsvingsamplituden ξ_0 har vi utledet i forelesningene:

$$I = \overline{\varepsilon} v = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2 v.$$

Her er ρ luftas massetetthet, ω er vinkelfrekvensen, og v er bølgehastigheten. Dermed:

$$\xi_0 = \frac{1}{2\pi f}\sqrt{\frac{2I}{\rho v}} = \frac{1}{2000\pi}\sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-9}}{1.3 \cdot 330}}\,\mathrm{m} \simeq 0.34\,\mathrm{nm}.$$

Utsvinget er altså her av samme størrelsesorden som molekylenes diameter. Riktig svar: D

e) Trykkendringen Δp er relatert til utsvinget ξ (se forelesningene):

$$\Delta p = -B\frac{\partial \xi}{\partial x},$$

der B er luftas bulkmodul. Med en plan harmonisk bølge får vi

$$\Delta p(x,t) = -Bk\xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

med amplitude

$$\mathscr{P}_0 = Bk\xi_0 = 1.42 \cdot 10^5 \cdot \frac{2\pi}{0.33} \cdot 0.34 \cdot 10^{-9} \simeq 0.9 \text{ mPa}.$$

Riktig svar: B

f) Trykkvariasjonen relativt likevektstrykket $p_0 = 1$ atm $= 1.013 \cdot 10^5$ Pa blir

$$\frac{\mathscr{P}_0}{p_0} = \frac{0.9 \cdot 10^{-3}}{1.013 \cdot 10^5} = 9 \cdot 10^{-9}.$$

Ikke rare greiene! Riktig svar: A

Oppgave 3

a) Grunntonen på en svingende streng som er festet i begge ender har bølgelengde $\lambda = 2L$, der L er strengens lengde. En bestemt frekvens f oppnås da ved å sørge for at bølgehastigheten blir

$$v = \lambda f = 2fL.$$

Samtidig vet vi at v er bestemt ved strammingen S og strengens masse pr lengdeenhet μ:

$$v = \sqrt{S/\mu}.$$

Strammingen må derfor være

$$\begin{aligned} S &= \mu v^2 \\ &= \frac{m}{L} \cdot 4f^2L^2 \\ &= 4mf^2L \\ &= 4 \cdot 0.0002 \cdot 440^2 \cdot 0.370 \\ &\simeq 57.3 \text{ N}. \end{aligned}$$

Riktig svar: B

b) Stående lydbølger i et tynt luftfylt rør som er åpent i begge ender, har knutepunkt, $\Delta p = 0$, for trykkbølgen i begge ender, dvs i $x = 0$ og i $x = L$, der $L = 0.5$ m i dette tilfellet. Utsvingsbølgen ξ har dermed maksimal amplitude (buk) i begge ender. Laveste resonansfrekvens (grunntonen) må dermed ha bølgelengde $\lambda = 2L = 1.0$ m. Med lydhastighet $v = 340$ m/s blir laveste resonansfrekvens

$$f = v/\lambda = 340 \text{ Hz}.$$

Riktig svar: A

c) Rørets resonansfrekvenser er $f_n = n \cdot 340$ Hz, med $n = 1, 2, \ldots$. Resonans nr n har n knutepunkter for den stående utsvingsbølgen ξ. Altså 4 knutepunkter for moden med frekvens 1360 Hz. Riktig svar: C

d) Vi kan tenke på dette systemet som tvungne svingninger: Den vibrerende gitarstrengen virker som en ekstern harmonisk kraft på luftmolekylene omkring, som dermed tvinges til å svinge fram og tilbake med samme frekvens som den vibrerende strengen. Bølgehastigheten er bestemt ved mediets elastiske egenskaper og mediets massetetthet og er generelt forskjellig for strengen og lufta. Dermed blir også bølgelengden $\lambda = v/f$ generelt forskjellig. Når det gjelder amplituden, vil det nok være en sammenheng mellom disse, for et kraftigere anslag på strengen resulterer jo i sterkere lyd. Men som vi har sett i en tidligere øving, vil utsvingsamplituden til luftmolekylene typisk være av størrelsesorden noen få nanometer (med lydintensitet godt under smertegrensen), som åpenbart er mye mindre enn typiske amplituder på en vibrerende gitarstreng. Riktig svar: D

Oppgave 4

At vandretiden τ kun avhenger av strengens omløpsperiode T, og ikke av lengden L eller massen M, kan vi slå fast med ren dimensjonsanalyse: Problemet inneholder kun størrelsene T, M og L. Det går ikke an å lage størrelser med enhet s (sekund) ved å kombinere kg og m. Da gjenstår bare T.
Bølgehastigheten er $v = \sqrt{S/\mu} = \sqrt{SL/M}$. Snordraget $S(r)$ i avstand r fra festepunktet er den kraften som skal til for å holde strengbiten mellom r og L i sirkulær bane med vinkelfrekvens $\omega = 2\pi/T$, dvs akselerasjon $a(r') = \omega^2 r'$:

$$\begin{aligned} S(r) &= \int a\, dm = \int_r^L \omega^2 r' \frac{M}{L} dr' \\ &= \frac{\omega^2 M}{2L}\left(L^2 - r^2\right) \end{aligned}$$

Med $S(r)$ på plass skulle resten være grei skuring! Bølgehastigheten blir

$$v(r) = \sqrt{S(r)L/M} = \frac{\omega}{\sqrt{2}}\sqrt{L^2 - r^2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{T}\sqrt{L^2 - r^2}.$$

Tiden som en bølgepuls bruker fra festepunktet til strengens ende blir dermed

$$\begin{aligned} \tau &= \int \frac{dr'}{v} \\ &= \frac{T}{\sqrt{2}\pi} \int_0^L \frac{dr'}{\sqrt{L^2 - r'^2}} \\ &= \frac{T}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Her følger en noe mer utdypende forklaring:
Vi betrakter en liten bit av strengen, mellom r og $r + dr$, og med masse $dm = dr \cdot M/L$. På denne lille biten virker det en kraft *innover mot sentrum* på grenseflaten ved r (fra masseelementet rett innenfor) og

en kraft *utover* på grenseflaten ved $r + dr$ (fra masseelementet rett utenfor). Disse to kreftene må nettopp være snordraget $S(r)$ og $S(r + dr)$, slik at nettokraften, innover, på vårt lille masseelement må være:

$$dF = S(r) - S(r + dr).$$

Ifølge Newtons 2. lov har vi

$$dF = dm \cdot a = \frac{M}{L} dr \omega^2 r.$$

Den totale kraften på strengbiten som befinner seg mellom r og L blir da

$$F(r) = \int dF = \frac{M\omega^2}{L} \int_r^L r\, dr = \frac{M\omega^2}{2L} \left(L^2 - r^2 \right).$$

Men denne kraften $F(r)$ må nettopp tilsvare snordraget i avstand r, dvs $F(r) = S(r)$. Dvs, snordraget i r er lik nettokraften på strengen mellom r og L. (Del f.eks opp biten mellom r og L i små biter med lengde dr. I hver grenseflate mellom slike små biter virker biten til venstre på den til høyre med en like stor men motsatt rettet kraft som omvendt, Newtons 3. lov, slik at kraften i den venstre enden, $S(r)$, er lik total kraft på hele strengen utenfor r.)
Med $S(r)$ på plass henvises til avslutningen på den "offisielle" versjonen ovenfor.