OPPGAVER MED LØSNINGSFORSLAG

OPPGAVE 1: Flervalgsoppgaver (Teller 45%, 18 stk som teller 2.5% hver)

1) Hva blir akselerasjonen til en kloss som glir *nedover* et friksjonsfritt skråplan med helningsvinkel 30°?

A) $g/4$ B) $g/3$ C) $g/2$ D) g

$a = F_{\|}/m = mg \sin 30°/m = g/2$. Riktig svar: C.

2) Hva blir akselerasjonen til en kloss som glir *oppover* et skråplan med helningsvinkel 30° når kinetisk friksjonskoeffisient mellom kloss og skråplan er $1/\sqrt{3}$?

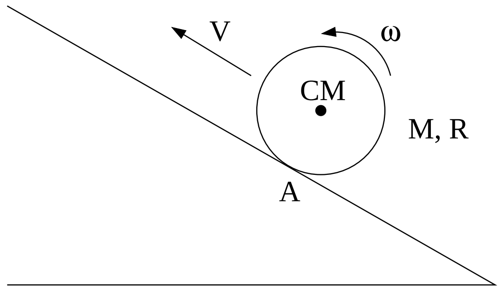
A) $g/4$ B) $g/3$ C) $g/2$ D) g

$a = F_{\|}/m = (f+mg \sin 30°)/m = (\mu_k N+mg/2)/m = (\mu_k mg \cos 30°+mg/2)/m = (1/\sqrt{3})\cdot g\cdot\sqrt{3}/2+g/2 = g$. Riktig svar: D.

3) En tynn ring, ei kompakt kule og et tynt kuleskall, alle med masse M og radius R, ruller om kapp, uten å gli (slure), nedover et skråplan. Hvordan ser seierspallen ut?

A) 1. Kompakt kule. 2. Tynn ring. 3. Tynt kuleskall.
B) 1. Tynn ring. 2. Kompakt kule. 3. Tynt kuleskall.
C) 1. Tynt kuleskall. 2. Tynn ring. 3. Kompakt kule.
D) 1. Kompakt kule. 2. Tynt kuleskall. 3. Tynn ring.

Legemet med minst treghetsmoment (mhp CM) får minst rotasjonsenergi, og dermed størst translasjonsenergi, og dermed størst hastighet og akselerasjon. Tynn ring har all masse på periferien, og dermed størst treghetsmoment. Tynt kuleskall har all masse i avstand R fra CM, og dermed større treghetsmoment enn kompakt kule. Dermed vinner den kompakte kula, foran kuleskallet, med ringen på tredjeplass. Riktig svar: D.



4) En sylinder med masse $M = 1$ kg og radius $R = 0.1$ m slurer (roterer og glir; $\omega > V/R$) oppover et skråplan med helningsvinkel 30°. Kinetisk friksjonskoeffisient mellom kloss og skråplan er $1/(2\sqrt{3})$. Hva er (omtrent) netto ytre dreiemoment på sylinderen, med sylinderens massesenter (CM) som referansepunkt?

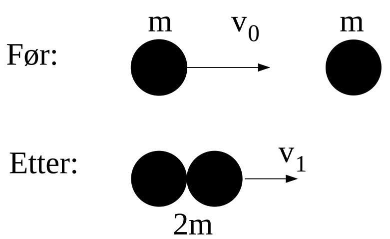
A) 1/4 Nm B) 1/2 Nm C) 3/4 Nm D) 1 Nm

$\tau_{CM} = fR = \mu_k NR = \mu_k Mg\cos 30° \cdot R = (1/2\sqrt{3}) \cdot 1 \cdot 9.81 \cdot (\sqrt{3}/2) \cdot 0.1 \simeq 1/4$ Nm. Riktig svar: A.

5) For samme situasjon som i oppgave 4, hva er (omtrent) netto ytre dreiemoment på sylinderen, med kontaktpunktet (A) som referansepunkt?

A) 1/4 Nm B) 1/2 Nm C) 3/4 Nm D) 1 Nm

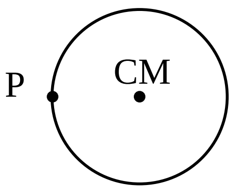
$\tau_A = Mg\sin 30° \cdot R = 1 \cdot 9.81 \cdot (1/2) \cdot 0.1 \simeq 1/2$ Nm. Riktig svar: B.



6) En masse m har hastighet v_0 ($v_0 \ll c$) og kolliderer fullstendig uelastisk med en annen masse m som ligger i ro. Etter kollisjonen henger de to massene sammen og har felles hastighet v_1. Hvor mye kinetisk energi gikk tapt i kollisjonen?

A) $mv_0^2/8$ B) $mv_0^2/6$ C) $mv_0^2/4$ D) $mv_0^2/2$

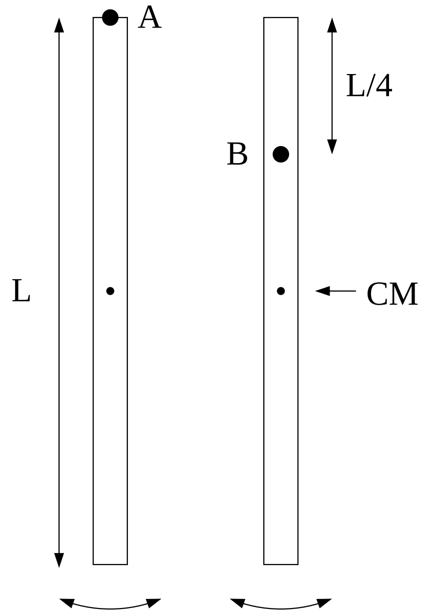
$p_1 = p_0 \Rightarrow 2mv_1 = mv_0 \Rightarrow v_1 = v_0/2 \Rightarrow K_1 = (1/2) \cdot 2m \cdot v_1^2 = mv_0^2/4 \Rightarrow |\Delta K| = mv_0^2/2 - mv_0^2/4 = mv_0^2/4$. Riktig svar: C.



7) En tynn ring har treghetsmoment 1.0 kg m^2 med hensyn på en akse gjennom ringens massesenter (CM). Hva er da ringens treghetsmoment med hensyn på en akse gjennom et punkt (P) på ringens periferi? (Begge akser står normalt på ringens plan.)

A) 1.0 kg m^2 B) 1.5 kg m^2 C) 2.0 kg m^2 D) 2.5 kg m^2

Steiners sats gir $I_P = I_0 + MR^2 = MR^2 + MR^2 = 2I_0 = 2$ kg m^2. Riktig svar: C.



8) En tynn, jevntykk stav (fysisk pendel) har masse M, lengde L og treghetsmoment $I_0 = ML^2/12$ mhp en akse gjennom stavens massesenter (CM). Når staven svinger (friksjonsfritt) med små utsving fra likevekt om en akse helt øverst på staven (A), er perioden T_A. Dersom aksen forskyves med $L/4$, til midt mellom stavens ende og dens massesenter (B), er perioden T_B. Hva er forholdet T_B/T_A? (Oppgitt: $\omega_0 = \sqrt{Mgd/I}$)

A) $\sqrt{4/5}$ B) $\sqrt{5/6}$ C) $\sqrt{6/7}$ D) $\sqrt{7/8}$

$(T_B/T_A)^2 = I_B d_A / I_A d_B$. Vi har $d_A = L/2$, $d_B = L/4$. Steiners sats gir da: $I_A = ML^2/12 + M(L/2)^2 = ML^2/3$ og $I_B = ML^2/12 + M(L/4)^2 = 7ML^2/48$. Dermed: $(T_B/T_A)^2 = (7/48) \cdot (1/2)/((1/3) \cdot (1/4)) = (7/96)/(1/12) = 7/8$. Riktig svar: D.

9) Ei tynn stang lokalisert på x-aksen mellom $x = 0$ og $x = L$ har massetetthet (masse pr lengdeenhet) $\mu(x) = \mu_0 \, x/L$. Her er μ_0 en konstant. Hvor er stavens massesenter x_{CM}? (Oppgitt: $dm = \mu \, dx$)

A) $x_{CM} = L/2$ B) $x_{CM} = 2L/3$ C) $x_{CM} = 3L/4$ D) $x_{CM} = 4L/5$

$$x_{CM} = \frac{\int_0^L x \cdot (\mu_0 x/L) dx}{\int_0^L (\mu_0 x/L) dx} = \frac{\int_0^L x^2 dx}{\int_0^L x dx} = \frac{L^3/3}{L^2/2} = 2L/3.$$

Riktig svar: B.

10) To satellitter går i hver sin sirkulære bane rundt jorda, den ene i bane med dobbelt så stor radius som den andre. Hva er da forholdet mellom omløpstida (perioden) til de to satellittene?

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $2\sqrt{2}$ D) 4

$GmM/R^2 = mv^2/R = mR\omega^2 = 4\pi^2 mR/T^2$, dvs $T \sim R^{3/2}$, slik at periodeforholdet blir $2^{3/2} = 2\sqrt{2}$. Riktig svar: C.

11) I jakten på formen på ei klessnor har du endt opp med å måtte løse ligningen $x = (7/8 - x/2)\sqrt{1 + 3x^2}$. Du satser på en enkel iterativ løsningsmetode, der en startverdi for x innsatt på høyre side av ligningen gir en oppdatert verdi av x, og dermed det iterative (repeterte) skjemaet

$$x_{i+1} = \left(\frac{7}{8} - \frac{x_i}{2}\right)\sqrt{1 + 3x_i^2}.$$

Med startverdien $x_1 = 1.0$, hva blir x_3?

A) $x_3 \simeq 0.31$ B) $x_3 \simeq 0.48$ C) $x_3 \simeq 0.65$ D) $x_3 \simeq 0.82$

$x_2 = (7/8-1/2)\cdot\sqrt{1+3} = (3/8)\cdot 2 = 3/4$, $x_3 = (7/8-3/8)\cdot\sqrt{1+3\cdot 9/16} = (4/8)\cdot\sqrt{43/16} = \sqrt{43}/8 \simeq 0.82$. Riktig svar: D.

12) E-strengen på en kontrabass skal stemmes slik at grunntonen har frekvens 41 Hz. Strengen er fastspent i begge ender, har lengde 110 cm, og masse pr lengdeenhet 33 g/m. Strammingen i strengen må da tilsvare en strekk-kraft

A) 68.5 N B) 168.5 N C) 268.5 N D) 368.5 N

Fra oppgave 18: $f_1 = \sqrt{S/\mu}/2L$, dvs $S = 4L^2 f_1^2 \mu = 4\cdot 1.1^2 \cdot 41^2 \cdot 0.033 = 268.5$ N. Riktig svar: C.

13) En streng med masse pr lengdeenhet 9 g/m er skjøtt sammen med en streng med masse pr lengdeenhet 25 g/m. En harmonisk transversal bølge kommer inn mot skjøten. Hvor stor andel av bølgens energi blir reflektert i skjøten?

A) 6% B) 26% C) 46% D) 66%

$R = (\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2})^2/(\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2})^2 = (3-5)^2/(3+5)^2 = 4/64 = 1/16 \simeq 6\%$. Riktig svar: A.

14) En kuleformet lydkilde sender ut lyd slik at lydtrykksnivået er 100 dB i avstand 1 m fra sentrum av lydkilden. I hvilken avstand fra lydkildens sentrum er lydtrykksnivået redusert til 50 dB?

A) 93 m B) 207 m C) 316 m D) 542 m

$I(r) \sim 1/r^2$ for kuleformet kilde. Dermed: $100/10 = \log(I(1)/I_0)$, $50/10 = \log(I(r)/I_0)$, dvs $10 = \log I(1) - \log I_0$, $5 = \log I(r) - \log I_0$, dvs $5 = \log(I(1)/I(r)) = \log(r^2/1^2)$, dvs $r^2 = 10^5$ m^2, dvs $r \simeq 316$ m. Riktig svar: C.

15) To lydkilder sender ut harmoniske lydbølger med frekvens henholdsvis 440 Hz og 450 Hz. Hva hører du?

A) En tone på 445 Hz med en lydintensitet som varierer mellom sterkt og svakt ti ganger pr sekund.
B) En tone på 445 Hz med konstant lydintensitet.
C) En tone på 890 Hz med konstant lydintensitet.
D) Ingenting, på grunn av destruktiv interferens.

$f = (f_1 + f_2)/2 = 445$ Hz. $T_s = |1/(f_1 - f_2)| = (1/10)$ s. Riktig svar: A.

16) Et jordskjelv på havbunnen skaper en forstyrrelse (bølgepakke) på havoverflaten med bølgelengder omkring 50 km. Vanndybden er $D = 1$ km. Omtrent hvor lang tid bruker bølgepakken på å vandre 1800 km (en avstand litt større enn Norge på langs i luftlinje)?
Oppgitt: $\omega(k) = \sqrt{gk \tanh(kD)}$, $\tanh x \simeq x$ når $x \ll 1$, $\tanh x \simeq 1$ når $x \gg 1$.

A) Fem timer B) Femten timer C) Femti timer D) Femhundre timer

Her er $kD = 2\pi D/\lambda = 2\pi \cdot 1/50 \simeq 0.13 \ll 1$, slik at $\omega^2 \simeq gk \cdot kD = gDk^2$, dvs $\omega \simeq \sqrt{gD}k$. Gruppehastighet og fasehastighet er nå like store, og $v_g = \sqrt{gD} = 99$ m/s, dvs ca 357 km/h. Da tar det ca 5 timer å tilbakelegge 1800 km. Riktig svar: A.

17) Et stort cruiseskip seiler forbi 475 m fra land og lager en bølgepakke med bølgelengder omkring 10 m. Bølgene har retning rett mot land. Dybden er overalt mer enn 50 m. Omtrent hvor lang tid går det fra bølgepakken skapes til den slår mot land?

A) 1 minutt B) 4 minutter C) 16 minutter D) 64 minutter

Her er $kD = 2\pi D/\lambda > 2\pi \cdot 50/10 \simeq 31 \gg 1$, slik at $\omega^2 \simeq gk \cdot 1$, dvs $\omega \simeq \sqrt{gk}$. Da blir gruppehastigheten $v_g = d\omega/dk = (1/2)\sqrt{g/k} = \sqrt{g/4k} = \sqrt{g\lambda/8\pi} \simeq 1.97$ m/s. Da tar det ca 240 sekunder å tilbakelegge 475 m, dvs ca 4 minutter. Riktig svar: B.

18) Frekvensene til stående bølger ("resonansfrekvensene") på en streng som er fastspent i begge ender, er

$$f_n = \frac{n\sqrt{S/\mu}}{2L} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Du anslår relative usikkerheter som følger: $\Delta S/S = 0.03$, $\Delta\mu/\mu = 0.05$ og $\Delta L/L = 0.01$. Hva blir da relativ usikkerhet i frekvensene, $\Delta f_n/f_n$?

A) 1% B) 3% C) 7% D) 9%

Her er $f_n = (n/2) \cdot S^{1/2} \cdot \mu^{-1/2} \cdot L^{-1}$, slik at

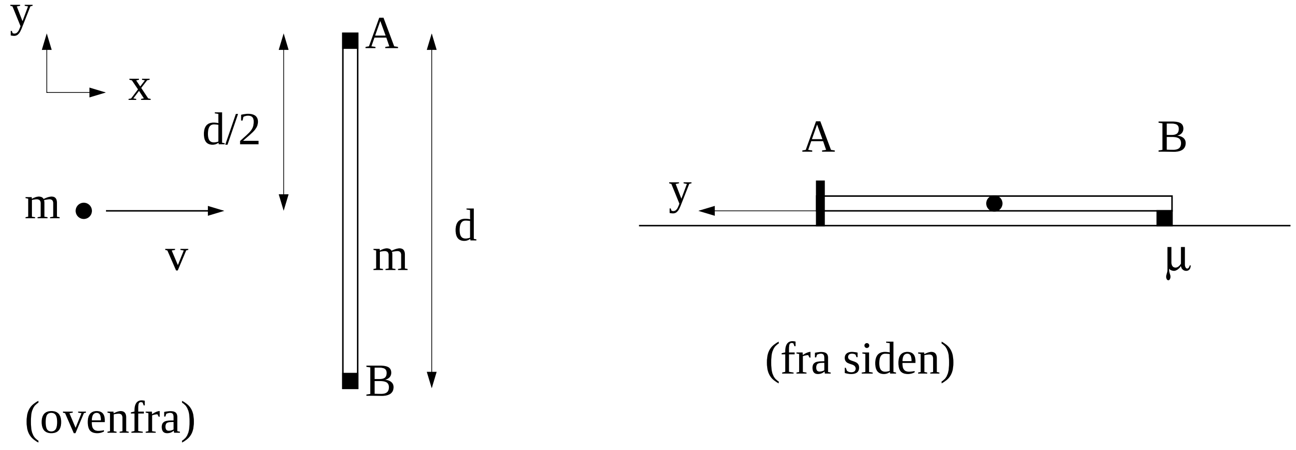
$$(\Delta f_n/f_n)^2 = (\Delta S/2S)^2 + (\Delta\mu/2\mu)^2 + (\Delta L/L)^2 = 0.015^2 + 0.025^2 + 0.01^2 = 9.5 \cdot 10^{-4}.$$

Dvs, $\Delta f_n/f_n = 0.03 = 3\%$. Riktig svar: B.

Fasit for Oppgave 1

Deloppgave	A	B	C	D
1			x	
2				x
3				x
4	x			
5		x		
6			x	
7			x	
8				x
9		x		
10			x	
11				x
12			x	
13	x			
14			x	
15	x			
16	x			
17		x		
18		x		

OPPGAVE 2: Uelastisk kollisjon mellom stav og kule (Teller 30%, 6% pr deloppgave)



En stav med lengde d og masse m ligger i ro på et horisontalt bord. Staven kan rotere om en aksling gjennom sin ene ende (A). Staven er i kontakt med bordet ved begge ender. Vi ser bort fra friksjon ved akslingen (A). I den andre enden (B) er kinetisk friksjonskoeffisient mellom stav og bord lik μ. Ei kule med masse m og hastighet $\boldsymbol{v} = v\,\hat{x}$ kolliderer fullstendig uelastisk med staven i avstand $d/2$ fra A (dvs midt på staven). Etter kollisjonen (som har neglisjerbar varighet) roterer stav og kule som ett legeme omkring akslingen gjennom A.

a) Hva er systemets kinetiske energi K_0 før kollisjonen? Hva er systemets dreieimpuls L om A før kollisjonen?

$K_0 = mv^2/2$. $L = mvd/2$.

b) Hva er treghetsmomentet I til systemet stav + kule etter kollisjonen, mhp aksen gjennom A? (Tips: Se flervalgsoppgave 8.)

Steiners sats gir for staven $md^2/12 + m(d/2)^2 = md^2/3$. For kula: $m(d/2)^2 = md^2/4$. For stav + kule: $I = (1/3 + 1/4)md^2 = 7md^2/12$.

c) Umiddelbart etter kollisjonen, før systemet (stav + kule) har begynt å rotere, er L bevart. Hva er da systemets vinkelhastighet ω umiddelbart etter kollisjonen?

$L = I\omega \;\;\Rightarrow\;\; \omega = L/I$. Innsetting av L fra a og I fra b gir $\omega = (mvd/2)/(7md^2/12) = 6v/7d$.

d) Hva er systemets kinetiske energi K_1 umiddelbart etter kollisjonen? Hva blir endringen i systemets kinetiske energi i kollisjonen, $\Delta K = K_1 - K_0$?

$K_1 = I\omega^2/2$. Innsetting av I fra b og ω fra c gir $K_1 = (7md^2/12)(6v/7d)^2/2 = (7{\cdot}36/12{\cdot}49{\cdot}2)mv^2 = 3mv^2/14$. I den uelastiske kollisjonen er dermed kinetisk energi endret med $\Delta K = K_1 - K_0 = (3/14 - 1/2)mv^2 = -2mv^2/7$.

e) På grunn av friksjon mellom staven og bordet ved enden (B) reduseres systemets kinetiske energi gradvis.

Finn et uttrykk for omløpt vinkel θ når kinetisk energi K er redusert til null. (Tips: Dersom du ikke har bestemt K_1 i punkt d, skriv K_1 på formen $\beta mv^2/2$, der β er en dimensjonsløs konstant.)
Med tallverdiene $v = 10$ m/s, $d = 15$ cm og $\mu = 0.11$, hvor mange hele omdreininger vil stav (med kule) rotere før den stopper? (Har du ikke fastlagt β ovenfor, kan du bruke en tilnærmet verdi $\beta = 0.4$.)

Vi kan innledningsvis fastslå at $\beta = 3/7$. Den kinetiske energien rett etter kollisjonen, $K_1 = 3mv^2/14$, går "tapt" i form av et friksjonsarbeid $W_f = f \cdot s = \mu N_B \cdot \theta \cdot d$. Her er $s = \theta d$ buelengden (veien) når omløpt vinkel er θ og radien er d. Normalkraften fra bordet på stav (med kule) må, siden kula sitter fast midt på, være like stor ved A og B, og til sammen lik tyngden av stav + kule. Med andre ord, $N_B = N_A = mg$. Dermed er $W_f = \mu mg\theta d$, og når vi setter dette friksjonsarbeidet lik K_1, finner vi

$$\theta = \frac{3v^2}{14\mu gd}.$$

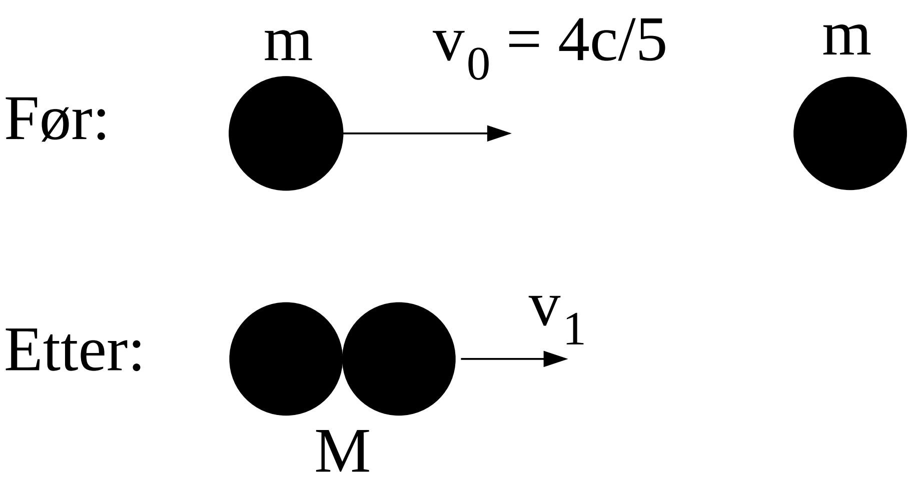
Innsetting av oppgitte tallverdier gir

$$\theta = \frac{3 \cdot 100}{14 \cdot 0.11 \cdot 9.81 \cdot 0.15} = 132.39,$$

en vinkel som tilsvarer $\theta/2\pi \simeq 21$ hele omdreininger.

(Med den omtrentlige verdien $\beta = 0.4$ i $K_1 = \beta mv^2/2$ blir $\theta = \beta v^2/2\mu gd = 0.4 \cdot 100/2 \cdot 0.11 \cdot 9.81 \cdot 0.15 = 123.56$, som tilsvarer ca 20 hele omdreininger.)

OPPGAVE 3: Uelastisk relativistisk kollisjon (Teller 15%, 6% for *a* og 9% for *b*)



En partikkel med masse m har hastighet $v_0 = 4c/5$ og kolliderer fullstendig uelastisk med en tilsvarende partikkel med masse m som ligger i ro. (c er lyshastigheten) Etter kollisjonen består systemet av kun en partikkel med masse M og hastighet v_1.

a)

- Systemets relativistiske impuls kan skrives på formen $p = \alpha mc$. Hva er α?
- Systemets relativistiske energi kan skrives på formen $E = \beta mc^2$. Hva er β?

Vi har $p = \gamma_0 m v_0$, og med $v_0 = 4c/5$ er $\gamma_0 = (1 - 16/25)^{-1/2} = 5/3$, slik at $p = (5/3)m \cdot 4c/5 = (4/3)mc$. Dvs, $\alpha = 4/3$.

For partikkelen med hastighet $4c/5$ er energien $\gamma_0 mc^2 = (5/3)mc^2$, og for partikkelen som ligger i ro er energien mc^2. I alt $E = (8/3)mc^2$. Dvs, $\beta = 8/3$.

Både α og β er dimensjonsløse tall. Dersom du ikke har fastlagt verdier for α og β, kan du bruke disse størrelsene i fortsettelsen, etter behov.

b) Bruk prinsippene om bevaring av p og E til å bestemme følgende størrelser i slutt-tilstanden (dvs etter kollisjonen):

- Hastigheten v_1 uttrykt ved c.
- Massen M uttrykt ved m.
- Den kinetiske energien K uttrykt ved mc^2.

Etter kollisjonen er impulsen $\gamma_1 M v_1$, med $\gamma_1 = (1 - v_1^2/c^2)^{-1/2}$. Energien etter kollisjonen er $\gamma_1 Mc^2$. Med andre ord, $\gamma_1 M v_1 = 4mc/3$ og $\gamma_1 Mc^2 = 8mc^2/3$. Når vi dividerer disse to ligningene med hverandre, forkortes $\gamma_1 M$ bort, og vi står igjen med $v_1/c^2 = 1/2c$, dvs $v_1 = c/2$. Dermed er $\gamma_1 = (1 - 1/4)^{-1/2} = 2/\sqrt{3}$, slik at massen i slutt-tilstanden blir $M = 8m/3\gamma_1 = 4m/\sqrt{3}$. Og til slutt, kinetisk energi i slutt-tilstanden: $K = (\gamma_1 - 1)Mc^2 = (2/\sqrt{3} - 1) \cdot 4mc^2/\sqrt{3} = (8 - 4\sqrt{3})mc^2/3$.