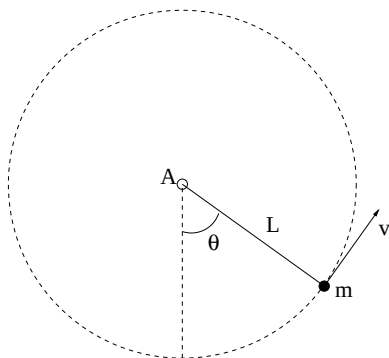


Matematisk pendel



Figuren til venstre viser en matematisk pendel, bestående av ei kule (punktmasse) med masse m i enden av ei masseløs stang med lengde L . Stanga kan svinge omkring festepunktet (A), slik at kula følger en sirkelbane med radius L . Dersom kula svinger fritt, uten å påvirkes av andre ytre krefter enn tyngdekraften og "stangdraget", er bevegelsen bestemt av ligningen

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0.$$

(N2 tangentielt til sirkelbanen. Vi har brukt sammenhengen mellom hastighet og vinkelhastighet ved sirkelbevegelse.)

For små utsving fra likevekt, $|\theta| \ll 1$, kan $\sin \theta$ erstattes med θ , og vi har en enkel harmonisk oscillator, med kjent løsning, og med vinkelfrekvens ("egenfrekvens") $\omega_0 = \sqrt{g/L}$. Men for større utsving fra likevekt må vi beholde $\sin \theta$, og da kan ligningen ovenfor ikke løses analytisk. Numerisk er det imidlertid ingen problemer! En enkel og intuitiv numerisk måte å bestemme $\theta(t)$ på er den såkalte Euler-metoden. N2 kan skrives på formen

$$dv = a dt = \frac{F}{m} dt.$$

Det betyr at hastigheten ved tidspunktet $t+dt$ kan bestemmes dersom vi kjenner hastigheten ved tidspunktet t :

$$v(t+dt) = v(t) + a dt = v(t) + dv = v(t) + \frac{F}{m} dt.$$

Med et *endelig* tidssteg Δt blir ligningen

$$v(t+\Delta t) = v(t) + \Delta v = v(t) + \frac{F(t)}{m} \Delta t$$

bare tilnærmet riktig, men formodentlig en riktig *god* tilnærmelse dersom Δt velges tilstrekkelig liten. Samme oppskrift kan vi i neste omgang bruke for å bestemme posisjonen, eller som her, vinkelen $\theta(t)$. Vi har $v = ds/dt = L d\theta/dt$, dvs

$$d\theta = \frac{v}{L} dt,$$

og med endelig tidssteg gir dette

$$\theta(t+\Delta t) = \theta(t) + \Delta\theta = \theta(t) + \frac{v(t)}{L} \Delta t.$$

Hvis vi nå, som her, kjenner $\theta(t=0)$ og $v(t=0)$, dvs $\theta(0) = \theta_0$ og $v(0) = v_0$, kan ligningene over brukes til å finne $\theta(\Delta t)$ og $v(\Delta t)$, deretter $\theta(2\Delta t)$ og $v(2\Delta t)$ osv. I vårt konkrete tilfelle er det tyngdens tangentialkomponent som bestemmer akselerasjonen, og dermed hastigheten tangentielt,

$$a = \frac{F}{m} = -g \sin \theta.$$

Oppgaver:

- Lag et program i Python eller Matlab som beregner $\theta(t)$.
- La pendelen ha lengde 1.00 m. Tyngdens akselerasjon er 9.81 m/s^2 .
- Kjør programmet med startvinkel $\theta_0 = 0$, og med tre ulike verdier for starthastigheten v_0 :
 - (A) Med tilstrekkelig liten v_0 til at pendelen med god tilnærming utfører harmoniske svingninger med vinkelfrekvens $\sqrt{g/L}$.
 - (B) Med v_0 slik at pendelen svinger *nesten* helt opp til toppen av sirkelbanen. Hvor lang periode T klarer du å lage?
 - (C) Med tilstrekkelig stor v_0 til at pendelen passerer toppen av sirkelbanen, gjerne med god margin.
- For hvert av de tre tilfellene (A), (B) og (C), lag en figur der vinkelen θ plottes, i enheten grader, som funksjon av tiden t i intervallet fra $t = 0$ til $t = 2T$. Perioden T vil være forskjellig i de tre tilfellene. Figurene skal ha tekst på aksene, ' t (s)' for horisontal akse og ' θ (grader)' for vertikal akse. Figurene lagres som PDF-filer, med navn `brukernavn_FIGA.pdf` osv, evt samlet i en PDF-fil. Verdien du har brukt for starthastigheten v_0 kan angis som tittel på den aktuelle grafen.
- For minst ett av de tre tilfellene (A), (B), (C), sjekk i hvilken grad mekanisk energi (pr masseenheter) $E/m = (K+U)/m$ er bevart, ved å regne den ut og plote den som funksjon av t i programmet. Figuren skal ha teksten ' $E/m \text{ (m}^2/\text{s}^2\text{)}$ ' på vertikal akse og ' t (s)' på horisontal akse. Figuren lagres med navn `brukernavn_FIGD.pdf`. Angi med figurtittel for hvilket av de tre tilfellene energien pr masseenheter plottes.

Frivillige ekstraoppgaver:

- Utvid programmet ditt slik at du kan studere en dempet fri svingning. Anta at friksjonskraften (luftmotstanden) er proporsjonal med hastigheten.
- Utvid programmet ditt slik at du kan studere en tvungen dempet svingning, med samme type friksjon som i forrige punkt. La den ytre kraften variere harmonisk med tiden, og studer fenomenet resonans.