

Realstart og Teknostart

ROTASJONSFYSIKK

PROSJEKTOPPGAVE for BFY, MLREAL og MTFYMA

Mål

Dere skal i denne prosjektoppgaven

- * utforske egenskaper til roterende legemer gjennom en enkel apparatur der ulike parametre kan endres,
- * introduseres til matematiske og fysiske begrep som er nødvendig for å beskrive rotasjon,
- * motiveres til videre læring av mekanisk fysikk,
- * se behovet for bruk av matematikk i beskrivelse av fysikken.

Materiell

- * Apparaturopssett med nødvendig tilbehør (karusell, 8 lodd, fjær med snor, fjærvekt, stoppeklokke, linjal (40 cm), kamera).
- * Skrivesaker og papir.
- * Kalkulator. PC/Mac (minst 1 pr gruppe).

Forberedelser

- * Delta på introduksjonsforelesningen i R2 torsdag 13/8 kl 14.15.
- * Les gjennom denne teksten.
- * Last ned og installer programmet *Tracker* på egen datamaskin.
- * Last ned og installer L^AT_EX på egen datamaskin.

Rapport

Det skal skrives rapport om prosjektet. Det leveres en rapport for hver gruppe på 5-6 studenter. Rapporten skrives i L^AT_EX og bør inneholde en kort innledning, resultatene og en diskusjon. Alle måleverdier (i tabellform og/eller grafer) og relevante utregninger skal vises.

Innleveringsfrist: Fredag 21. august kl. 11:00. Lever direkte til studassen.

Sikkerhet

- * Ikke sett større fart på karusellen enn hva fjæra kan gi, dvs ikke bruk håndkraft i tillegg.
- * Tvinn opp snora i riktig retning, slik at karusellen roterer mot klokka.
- * Vær forsiktig med den oppstrammede fjæra slik at den ikke slippes av vanvare.
- * Skru loddene godt til og fest på stoppeskruen på enden av stengene.
- * Loddene må alltid festes symmetrisk på stengene.

Oppgaver

1. Prøv ut karusellen. Finn ut hva som kan endres på, og sett karusellen i sving med ulike parametre. Hva er avgjørende for hvor fort apparaturen roterer? Ikke gjør noen målinger, bare observer, diskuter og gjør korte notater.

2. "Ordinær hastighet" angis vanligvis med symbolet v , med enhet m/s eller km/t. Hvordan kan karusellhastigheten beskrives? – Dvs, med hvilken fysisk størrelse? Her er det kanskje flere muligheter? Diskuter og skriv ned gruppens forslag. Bestem også enhet for hver størrelse som foreslås. Hvilken størrelse virker mest hensiktsmessig? Karusellhastigheten kan måles med kameraet, i kombinasjon med programmet *tracker*. Test ut dette og gjør dere kjent med kamera og programvare. Bruk gjerne også utlagte stoppeklokker eller stoppeklokka på en mobiltelefon til å måle karusellhastigheten. Vurder nøyaktigheten med de ulike målemetodene.

3. I avsnittet **Rotasjon** bakerst i dette heftet er det vist hvordan den kinetiske energien til en slik roterende karusell mest hensiktsmessig kan uttrykkes ved hjelp av vinkelhastigheten ω og *treghetsmomentet* I : $K = \frac{1}{2}I\omega^2$. Kort oppsummert kan vi ikke uten videre bruke det kjente uttrykket for kinetisk energi, $\frac{1}{2}Mv^2$, fordi karusellens ulike bestanddeler beveger seg med ulike hastigheter, siden de befinner seg i ulike avstander r fra rotasjonsaksen. Treghetsmomentet I , derimot, inneholder informasjon om hvor de ulike delmassene befinner seg, og blir dermed en nyttig størrelse for å beskrive rotasjon. I punkt 2 ble det kanskje foreslått andre fysiske størrelser som kan brukes til å beskrive rotasjon, for eksempel *perioden* (omløpstida) T , eller *frekvensen* (antall omdreininger pr tidsenhet) f ? Hvordan er sammenhengene mellom ω , T og f ?

Treghetsmomentet, I , er nok en ny størrelse for de fleste. På samme måte som massen m angir hvor stor motstand et system har mot endring av lineær bevegelse, betegner I "tregheten" mot endring av rotasjonsbevegelse. Stor I , dvs stor treghet, betyr at vi må bruke mye energi for å sette et system i rotasjon.

4. Vi tilfører energi til systemet ved å strekke fjæra. Bruk Hookes lov til å finne fjærkonstanten k for fjæra. Bruk fjærvekta og mål utstrekkingen x . Beregn hvor mye potensiell energi fjæra har som funksjon av strekket, dvs $U(x)$. Denne potensielle energien kan overføres til kinetisk energi ved å tvinne snora rundt karusellen. Anta i det videre at det ikke tapes noe energi, dvs all potensiell fjæreenergi overføres til rotasjonsenergi for karusell og lodd.

Hovedmålet med den eksperimentelle delen av prosjektet er å undersøke hvordan treghetsmomentet I avhenger av ulike parametre.

5. I det videre skal dere variere antall lodd og deres plassering på stengene, og måle hvordan omløpstida endres. Tenk gjennom og planlegg forsøk for å undersøke hvordan omløpstida (og da også treghetsmomentet) endres med massen, dvs antall lodd N , og massenes avstand r fra sentrum.

Her følger noen tips med hensyn til målinger som kan gjøres (punktene 6 – 8):

6. Først bør dere måle uten lodd på stengene, $N = 0$. Strekk ut fjæra til en passende fast lengde x_0 hver gang og beregn $U(x_0)$. Mål omløpstida T og regn ut vinkelhastigheten ω . Gjør flere målinger. (Hvorfor?) Beregn fra disse målingene treghetsmomentet I_0 for den "nakne" karusellen.

7. Sett to lodd på apparaturen i passende avstand r fra rotasjonsaksen, symmetrisk om aksene. Mål igjen T og beregn ω . Strekk fjæra til samme lengde som i forrige punkt. Gjenta dette med $N = 4, 6$ og 8 lodd med samme avstand r hver gang, og hele tiden symmetrisk om aksene. Strekk fjæra til samme lengde x_0

som i punktet over. Før resultatene inn i en tabell med verdier for ω og I som funksjon av total masse $N \cdot m$. Hva observerer dere?

8. Varier nå avstanden r fra sentrum med f.eks 2 lodd på karusellen. Gjør målinger for ulike avstander r (gjerne for 8 – 10 ulike verdier av r). Beregn ω . Før resultatene inn i en tabell med verdier for ω som funksjon av r . Før også inn i tabellen treghetsmomentet I som funksjon av r .

Grafisk framstilling av måleresultatene:

9. På grunnlag av måleresultatene, plott treghetsmomentet I som funksjon av antall lodd N , for lik avstand r for alle loddene. Estimer fra figuren en verdi for treghetsmomentet I_0 for den tomme karusellen, og sammenlign dette med det dere fant i punkt 6.

Plott også I som funksjon av avstanden r for konstant antall lodd N . Estimer også herfra en verdi for treghetsmomentet I_0 for den nakne karusellen.

Fra disse figurene, kan dere si noe om hvordan treghetsmomentet avhenger av N , dvs den totale loddmassen, og r ? Ser det ut til å være en lineær eller kvadratisk sammenheng for disse variablene?. Bruk deretter regresjon (f.eks i Excel) til å finne hvordan treghetsmomentet avhenger av N og r . For å finne ut hvordan regresjon fungerer, bruk hjelpefunksjonen i programmet, bruk google, eller snakk med veilederen.

10. Anta at dere har måleresultater (fra et eller annet eksperiment) som dere tror kan være på formen $y(x) = ax^b$ (altså at dataene følger en potenslov). Diskuter hvordan disse måleresultatene bør plottes for at man skal kunne fastslå om de faktisk følger en slik potenslov. Hvordan kan man bestemme eksponenten b ?

Prøv å gjøre dette med deres målinger av treghetsmomentet som funksjon av avstanden r .

Ekstraoppgaver

Utfør disse dersom dere får tid.

11. Sett 4 lodd i tett rekke på en arm. For å få symmetri må dere også feste 4 lodd på motstående arm. Hvordan vil dere i dette tilfellet regne ut treghetsmomentet I ? Ulike metoder kan tenkes å fungere, kom med forslag og drøft hvilken grad av nøyaktighet hver metode har. Du kan i den sammenhengen tenke på om den tidligere utregningen av $I = mr^2$ for f.eks ett lodd er helt riktig? Dvs, hvilken verdi for r er rett å bruke for ett lodd?

12. Sjekk antagelsen om at det ikke tapes energi i eksperimentene. Dette gjelder både energitap i selve overføringen fra potensiell fjæreenergi til kinetisk rotasjonsenergi og under selve rotasjonen. Diskuter hvordan antagelsen kan testes og utfør målingene.

13. Diskuter eksempler der rotasjon spiller en viktig rolle, f.eks ulike idrettsøvelser.

Oppgitte verdier

Masse til hvert lodd: $m = 0.50$ kg.

Tykkelsen til hvert lodd: $d = 17$ mm.

Fjærkonstanten: $k \simeq 400 - 500$ N/m. Men mål selv!

Tyngdens akselerasjon: $g = 9.81$ m/s².

Rotasjon

Et objekt med masse m og hastighet v har kinetisk energi $K = \frac{1}{2}mv^2$. Hvis dette objektet beveger seg i en sirkelbane, med radius r , omkring en gitt (rotasjons-)akse, blir ”omløpt vinkel” lik 2π (radianer) i løpet av *perioden* (omløpstida) T . Med andre ord, *vinkelhastigheten* er

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Siden tilbakelagt strekning i løpet av tida T er lik omkretsen $2\pi r$, er hastigheten

$$v = \frac{2\pi r}{T}.$$

Dermed har vi også sammenhengen

$$v = \omega r.$$

Den kinetiske energien kan nå omskrives ved å erstatte v med ωr :

$$K = \frac{1}{2}m(\omega r)^2 = \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2.$$

Størrelsen ”masse multiplisert med kvadratet av avstanden fra (rotasjons-)aksen” viser seg å dukke opp så ofte at vi gir den et eget navn, nemlig *treghetsmomentet*, med symbolet I :

$$I = mr^2.$$

Da ser vi umiddelbart at kinetisk energi for en roterende masse kan uttrykkes ved treghetsmomentet I og vinkelhastigheten ω :

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Med flere masser i sirkulær bane blir total kinetisk energi ganske enkelt summen av den kinetiske energien for hver enkelt masse, $\frac{1}{2}mv^2$ eller $\frac{1}{2}I\omega^2$ for hver av dem. I dette prosjektet fester vi typisk ett (eller to) lodd med masse m i samme avstand r fra rotasjonsaksen på karusellens fire stenger:

Loddenes totale kinetiske energi blir da

$$K_{4\text{lodd}} = 4 \cdot \frac{1}{2}mv^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}I\omega^2,$$

med $I = mr^2$, treghetsmomentet pr lodd, og $\omega = v/r$, vinkelhastigheten. Total kinetisk energi finner vi ved å legge til karusellens bidrag:

$$K_{\text{tot}} = K_{4\text{lodd}} + K_{\text{karusell}}.$$

La oss betegne karusellens masse med M . Da kan vi *ikke* sette karusellens kinetiske energi lik $\frac{1}{2}Mv^2$, for karusellens ulike deler har ulik hastighet – stor hastighet ytterst og mindre og mindre hastighet inn mot sentrum (rotasjonsaksen):

Men vinkelhastigheten ω er like stor for alle karusellens deler – *hele* karusellen bruker en viss tid T , *peri-*

oden, på en hel omdreining. Siden en hel omdreining tilsvarer en omløpt vinkel 2π , har vi sammenhengen

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Vi kan tenke oss at vi deler opp karusellen i små biter med masse m_i som befinner seg i avstand r_i fra rotasjonsaksen og beveger seg med hastighet v_i . Hver slik liten masse har kinetisk energi

$$K_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2,$$

slik at hele karusellens kinetiske energi blir

$$K_{\text{karusell}} = \sum_i \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2.$$

Her summerer vi slik at vi får med hele karusellen (en gang). Igjen ser vi at kombinasjonen ”masse multiplisert med kvadratet av avstanden fra (rotasjons-)aksen” dukker opp, nærmere bestemt treghetsmomentet for hver lille masse, $I_i = m_i r_i^2$. Hvis vi legger sammen treghetsmomentene til alle de små massene m_i , blir resultatet hele karusellens treghetsmoment:

$$I_0 = \sum_i I_i = \sum_i m_i r_i^2.$$

Vi ser at det er nettopp denne summen som inngår i uttrykket for karusellens kinetiske energi, slik at vi kan skrive

$$K_{\text{karusell}} = \frac{1}{2}I_0 \omega^2.$$

Total kinetisk energi for karusell med N lodd i avstand r fra rotasjonsaksen er

$$K_{\text{tot}} = \frac{N}{2}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2.$$

I eksperimentene henter vi denne energien fra ei strukket fjær. Vi antar at forlengelsen x av fjæra er proporsjonal med strekk-kraften F (Hookes lov):

$$F = kx.$$

Størrelsen k kalles *fjærkonstanten*. Denne kan måles ved å måle sammenhørende verdier av x og F . Potensiell energi i fjæra er da

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

når den er strukket en lengde x . Vi kan overføre potensiell energi i fjæra til kinetisk energi for karusell og lodd ved å feste ei snor til fjæra og tvinne snora rundt karusellen:

Når fjæra avspennes, utfører snordraget F et arbeid på karusellen. Prinsippet om energibevarelse betyr at $K_{\text{tot}} = U$, dvs

$$\frac{N}{2}mr^2\omega^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 = \frac{1}{2}kx^2.$$

Denne ligningen kan vi bruke, f.eks med karusell uten lodd ($N = 0$), til å bestemme karusellens treghetsmoment I_0 :

$$I_0 = \frac{kx^2}{\omega^2}.$$

Mer generelt kan vi på denne måten måle det totale treghetsmomentet I for karusell med N lodd i avstand r fra aksen, og undersøke om målingene er i samsvar med resultatet vi fant ovenfor, $I = I_0 + Nmr^2$.

Logaritmiske plott

Hvis vi har en funksjon y på formen $y(x) = ax^b$, får vi ved å ta logaritmen til høyre og venstre side

$$\log y = \log a + b \log x.$$

Her har vi benyttet standard regler for logaritmeregning. Med andre ord, funksjonen $\log y$ blir en rett linje med stigningstall b når den plottes som funksjon av $\log x$.

Ide til prosjektet: Ola Hunderi.
Tekst og opplegg: Arne Mikkelsen.
Revisjon august 2011: Lars Erik Walle
Revisjon august 2012: Jon Andreas Støvneng
Revisjon august 2014: Jon Andreas Støvneng