FY1001/TFY4145/TFY4109. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2015.

Løsningsforslag til øving 1

Kommentar: Til denne første øvingen er deler av LF laget spesielt grundig. Særlig er integrasjonsmetodene detaljert, med løsning både med ubestemt og bestemt integral.

Oppgave 1

a)

$$-g = \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad dv = -g\,dt\,. \tag{1}$$

Vi har fått en enkel differensialligning for $v(t)$ som har sortert de variable på høyre og venstre side. Integrasjon på begge sider gir

$$\int_{v(0)}^{v(t)} dv = \int_0^t (-g)\,dt \quad \Rightarrow \quad v(t) - v(0) = -\int_0^t g\,dt \quad \Rightarrow \quad v(t) - v_0 = -g(t-0)$$

$$v(t) = v_0 - gt \tag{2}$$

Alternativ løsning med bruk av ubestemte integral gir fra (1) følgende ligning for $v(t)$:

$$v(t) = \int -g dt = -gt + K_1\,. \tag{3}$$

Integrasjonskonstanten K_1 er bestemt av den fysiske startbetingelsen (også kalt initialbetingelsen):

$$v_0 = v(t=0) = -g \cdot 0 + K_1 \quad \Rightarrow \quad K_1 = v_0 \tag{4}$$

Initialbetingelsen (4) innsatt i (3) gir (2).
Høyden $y(t)$ er gitt ved integrasjon av (2), idet

$$v(t) = \frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow \quad dy = v(t) \cdot dt = (v_0 - gt) \cdot dt\,.$$

Differensialligningen er igjen ordnet, og integrasjon på begge sider gir

$$\int_{y(0)}^{y(t)} dy = \int_0^t (v_0 - gt)dt \quad \Rightarrow \quad y(t) - y(0) = \left[v_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \right]_0^t\,.$$

Innsetting av betingelsen $y(0) = y_0$ gir

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{5}$$

Alternativ løsning med bruk av ubestemte integral gir følgende ligning for $y(t)$:

$$y = \int v\,dt = \int (v_0 - gt)\,dt = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + K_2 \tag{6}$$

Integrasjonskonstanten K_2 er bestemt av betingelsen:

$$y_0 = y(t=0) = v_0 \cdot 0 - \frac{1}{2}g \cdot 0 + K_2 \quad \Rightarrow \quad K_2 = y_0 \tag{7}$$

Betingelsen (7) innsatt i (6) gir (5).

b) Steinen når sin maksimale høyde ved $t = t_1$ når $v(t_1) = 0$, som innsatt i (2) gir:

$$0 = v_0 - gt_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{v_0}{g} \tag{8}$$

Den maksimale høyden, y_1, finner vi ved å bruke (5) og sette inn uttrykket for t_1 fra (8):

$$y_1 = y(t_1) = y_0 + v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = y_0 + \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = y_0 + \frac{v_0^2}{2g}$$

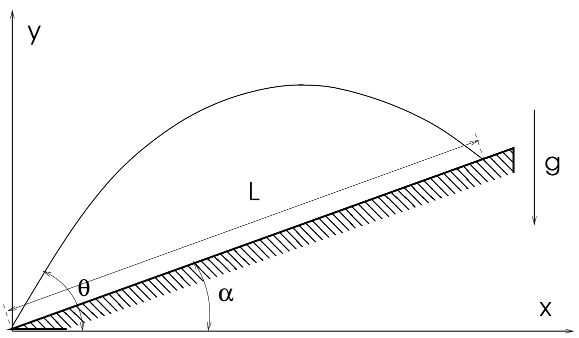
c) Steinen lander på bakken ved $t = t_2$ når $y(t_2) = 0$, som innsatt i (5) gir:

$$0 = y_0 + v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{v_0}{g} \left(1 + \sqrt{1 + 2gy_0/v_0^2} \right) \tag{9}$$

Hastigheten til steinen når den lander er gitt av (2) og (9):

$$v(t_2) = v_0 - gt_2 = v_0 - g \cdot \frac{v_0}{g} \left(1 + \sqrt{1 + 2gy_0/v_0^2} \right) = -v_0 \sqrt{1 + 2gy_0/v_0^2}$$

Oppgave 2.



Situasjonen er skissert i figuren til venstre. Vi velger utskytningsstedet som origo. Derved er begynnelsesbetingelsene

$$x(0) = 0 \qquad y(0) = 0,$$
$$v_x(0) = v_0 \cos\theta \qquad v_y(0) = v_0 \sin\theta.$$

I x-retningen er akselerasjonen lik null (når luftmotstanden neglisjeres), og derved er $x(t) = v_0 \cos\theta \cdot t$.
I y-retningen er akselerasjonen $-g$, slik at

$$y(t) = v_y(0)t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Når pila treffer bakken ved tida t_b, har den beveget seg $x(t_\mathrm{b})$ i x-retning og $y(t_\mathrm{b})$ i y-retning. Da må ifølge figuren $y(t_\mathrm{b})/x(t_\mathrm{b}) = \tan\alpha$. Derved kan t_b bestemmes:

$$\frac{v_0 \sin\theta \cdot t_\mathrm{b} - \frac{1}{2} g t_\mathrm{b}^2}{v_0 \cos\theta \cdot t_\mathrm{b}} = \tan\alpha \quad \Rightarrow \quad \underline{t_\mathrm{b} = \frac{2v_0}{g} \cdot (\sin\theta - \cos\theta \, \tan\alpha).}$$

Rekkevidden blir da (se figuren)

$$L = \frac{x(t_\mathrm{b})}{\cos\alpha} = \frac{v_0 \cos\theta \cdot t_\mathrm{b}}{\cos\alpha} = \frac{2v_0^2 \cdot (\cos\theta \, \sin\theta - \cos^2\theta \, \tan\alpha)}{g \cos\alpha} = \underline{\frac{2v_0^2 \cdot \cos^2\theta}{g \cdot \cos\alpha} \cdot (\tan\theta - \tan\alpha)}$$

Vinkelen som gir størst rekkevidde $L(\theta)$ finnes ved å derivere mhp θ og sette den deriverte lik null.

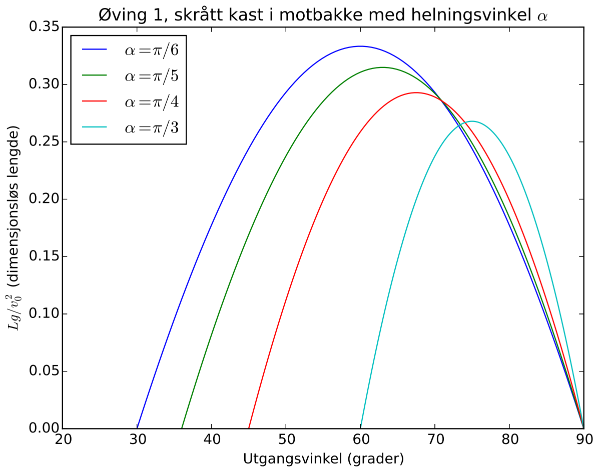
$$\begin{aligned}
\frac{dL}{d\theta} &= \frac{2v_0^2}{g\cos\alpha} \frac{d}{d\theta} \left(\cos\theta \sin\theta - \cos^2\theta \tan\alpha \right) \\
&= \frac{2v_0^2}{g\cos\alpha} \left(-\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\cos\theta \sin\theta \, \tan\alpha \right) \\
&= \frac{2v_0^2}{g\cos\alpha} \left(\cos 2\theta + \sin 2\theta \, \tan\alpha \right).
\end{aligned}$$

$\dfrac{dL}{d\theta} = 0$ og løst mhp θ gir resultatet

$$\tan 2\theta_{\max} = -\cot\alpha = \tan(\alpha + \pi/2) \qquad \Rightarrow \qquad \theta_{\max} = \underline{\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}}.$$

Dette innebærer at på flat mark ($\alpha = 0$), er $\theta_{\max} = 45°$, i tråd med erfaringer.

I programmet skraattkast.py/skraattkast.m plottes den dimensjonsløse størrelsen $L \cdot g/2v_0^2$, for fire ulike helningsvinkler α:



Vi ser at maksimal lengde L oppnås for en utskytningsvinkel

$$\theta_{\max} = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2},$$

som funnet ovenfor.

Oppgave 3.
a) La oss betegne bevegelsesretningen som x-retningen, med $x = 0$ som stedet der fallskjermhopperen treffer snøfonna. Med konstant akselerasjon $a = -50g$ i x-retningen har en for $t > 0$ konstant-akselerasjonsligningene

$$v(t) = v_0 + at; \qquad x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

Eliminer t mellom disse to ligningene for å finne $v(x)$ eller $x(v)$:

$$x = v_0\frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a\frac{(v - v_0)^2}{a^2} \qquad \Rightarrow \qquad 2ax = v^2 - v_0^2.$$

(Eller du kunne skrevet opp denne "tidløse" ligningen direkte.) Inntrengningsdybden x_i ved tida t_i er det punktet der $v(t_i) = 0$,

$$x_i = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{40^2}{2 \cdot 50 \cdot 9.8}\,\text{m} = \underline{1.6\,\text{m}}.$$

Riktig svar: C.

b) Fallet bremses ned til $v = 0$ i løpet av tida

$$t_i = -\frac{v_0 - 0}{a} = \frac{40}{50 \cdot 9.8}\,\text{s} = \underline{0.082\,\text{s}}.$$

Riktig svar: A.

c) Når akselerasjonen er en gitt funksjon av hastigheten, gir det en differensialligning for $v(t)$. I vårt tilfelle:

$$a = \frac{dv}{dt} = -kv^2 \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{dv}{v^2} = k\,dt$$

Integrerer fra start $(0, v_0)$ til vilkårlig tidspunkt (t, v):

$$-\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = k\int_0^t dt \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = k(t-0) \qquad \Rightarrow \qquad \underline{v(t) = \frac{v_0}{1+kv_0t}}.$$

Riktig svar: E.

d) Hastighetens halveringstid T er derved gitt som

$$v(T) = \frac{v_0}{1+kv_0T} = \frac{1}{2}v_0 \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{1}{kv_0} = \frac{1}{3.0\cdot 1.50}\,\mathrm{s} = 0.22\,\mathrm{s}.$$

Riktig svar: B.

e) Ved start er $x = 0$, og i løpet av halveringstida har kula beveget seg strekningen $x(T)$. Denne bestemmes fra $v = dx/dt$, eller $dx = v\,dt$, som gir

$$x(T) = \int_0^T v(t)\,dt = \int_0^T \frac{v_0}{1+kv_0t'}\,dt' = \frac{1}{k}\ln(1+kv_0T) = \frac{1}{3.0\,\mathrm{m}^{-1}}\cdot\ln 2 = \underline{0.23\,\mathrm{m}}.$$

Riktig svar: A.