FY1001/TFY4145/TFY4109. Institutt for fysikk, NTNU. Høsten 2015.

Løsningsforslag til øving 10

Oppgave 1

a) Så lenge $v_O = v_S = 0$, spiller det ingen rolle om det blåser. Observatøren vil måle samme frekvens som kilden (S) sender ut. Riktig svar: B.

b) Veggen står i ro og "observerer" bølgen som sendes ut av flaggermusen. Frekvensen f_V mottatt av veggen er

$$f_V = \frac{v}{v - v_F}\, f_F = \frac{340}{340 - 10} \cdot 100\,\text{kHz} = 103.03\,\text{kHz}.$$

Veggen reflekterer, dvs sender tilbake mot flaggermusen, en bølge med denne frekvensen. Nå er veggen en bølgekilde i ro, mens flaggermusen er en observatør i bevegelse, *mot* kilden (veggen). Dermed hører flaggermusen et ekko med frekvens

$$f_E = \frac{v + v_F}{v}\, f_V = \frac{350}{340} \cdot 103.03\,\text{kHz} \simeq 106\,\text{kHz}.$$

Riktig svar: B.

c) Her er sveveperioden $T_s = 1$ s. Dermed er svevefrekvensen $f_s = 1/T_s = 1$ Hz. Dette tilsvarer frekvensforskjellen mellom de to lydbølgene fra hhv stemmegaffelen (440 Hz) og pianoets A-streng. Du kan imidlertid ikke vite om A-strengen svinger med frekvens 439 Hz eller 441 Hz. Riktig svar: D.

d) To lydkilder som svinger i fase med samme frekvens gir konstruktiv interferens (max intensitet) dersom bølgene har en veilengdeforskjell lik et helt antall bølgelengder λ. Med avstand d mellom lydkildene og vinkel θ mellom senterlinjen (med lengde 20 m; se figuren i oppgaven) og en linje fra (midtpunktet mellom) høyttalerne til observatøren, blir veilengdeforskjellen, med god tilnærmelse, lik $d \sin\theta$. Max intensitet høres derfor av dem som sitter slik til at $\theta = 0$ eller

$$\theta = \arcsin(n\lambda/d),$$

med $n = 0, 1, 2, \ldots$. Destruktiv interferens (min intensitet) oppnås med veilengdeforskjell $(n + 1/2)\lambda$, og dermed av dem som sitter slik til at

$$\theta = \arcsin((n + 1/2)\lambda/d).$$

Med $d = 1$ m og $\lambda = v/f = 340/3400 = 0.1$ m har vi max intensitet i retningene $\theta_{\text{max}} = 0, \pm 5.7^\circ, \pm 11.5^\circ, \pm 17.5^\circ$ osv. Minimal intensitet har vi i retningene $\theta_{\text{min}} = \pm 2.9^\circ, \pm 8.6^\circ, \pm 14.5^\circ$ osv. Bjarne sitter ved $\theta_B = 0$ og hører dermed max intensitet. Anne sitter ved $\theta_A = \arctan(5.2/20) = 14.6^\circ$, som er tilstrekkelig nær 14.5° til å fastslå at hun hører minimal intensitet. Camilla sitter ved $\theta_C = \arctan(-3.0/20) = -8.5^\circ$, så hun hører også minimal intensitet. Endelig har vi Dag som sitter ved $\theta_D = \arctan(-6.3/20) = -17.5^\circ$, så Dag hører max intensitet. Riktig svar: B.

Oppgave 2

a) I forelesningene har vi utledet sammenhengene mellom amplituden A til innkommende bølge og amplitudene B og C til henholdsvis reflektert og transmittert bølge:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}}\, A \\ C &= \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}}\, A \end{aligned}$$

Her er $\mu_2 = 90$ g/m masse pr lengdeenhet på den tunge delen av strengen, $\mu_1 = 10$ g/m er masse pr lengdeenhet på den lette delen av strengen og $A = 5$ mm. Innsetting av disse tallverdiene gir $B = 2A/4 = 2.5$ mm og $C = 2A/4 = 2.5$ mm.

b) Fra forelesningene har vi følgende uttrykk for midlere effekt transportert med den innkommende bølgen (også oppgitt i oppgaveteksten):

$$\begin{aligned}
\overline{P}_i &= \frac{1}{2}v\mu_1\omega^2A^2 \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{S/\mu_1}\mu_1\omega^2A^2 \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{S\mu_1}\omega^2A^2 \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{4\cdot 10\cdot 10^{-3}}\cdot(10\pi)^2\cdot(5\cdot 10^{-3})^2 \\
&= 2.5 \text{ mJ/s}
\end{aligned}$$

Andel av effekten som reflekteres er gitt ved refleksjonskoeffisienten $R = \overline{P}_r/\overline{P}_i$:

$$R = \left(\frac{\sqrt{\mu_2}-\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2}+\sqrt{\mu_1}}\right)^2 = 0.25 = 25\%$$

Resten blir transmittert:

$$T = 1 - R = 0.75 = 75\%$$

c) Utsvinget til venstre for skjøten i $x = 0$ er:

$$\begin{aligned}
y(x,t) &= y_i(x,t) + y_r(x,t) \\
&= A\left(\sin(kx-\omega t) + \frac{1}{2}\sin(kx+\omega t)\right) \\
&= A\left(\sin kx\cos\omega t - \cos kx\sin\omega t + \frac{1}{2}\sin kx\cos\omega t + \frac{1}{2}\cos kx\sin\omega t\right) \\
&= A\left(\frac{3}{2}\sin kx\cos\omega t - \frac{1}{2}\cos kx\sin\omega t\right)
\end{aligned}$$

som er en sum av to stående bølger.

d) Uansett skjøtens posisjon kan vi velge $\phi_i = 0$. Fysikken kan ikke avhenge av hvor vi legger skjøten. Med andre ord: Dersom vi hadde en bestemt sammenheng mellom fasene til y_i og y_r med skjøten i $x = 0$, må vi fortsatt ha den samme bestemte sammenhengen med skjøten i $x = a$. Det oppnår vi ved å velge $\phi_r = -2ka$. Da blir nemlig

$$y_i(a,t) = A\sin(ka-\omega t) = -A\sin(\omega t - ka)$$

og

$$y_r(a,t) = B\sin(ka+\omega t-2ka) = B\sin(\omega t - ka)$$

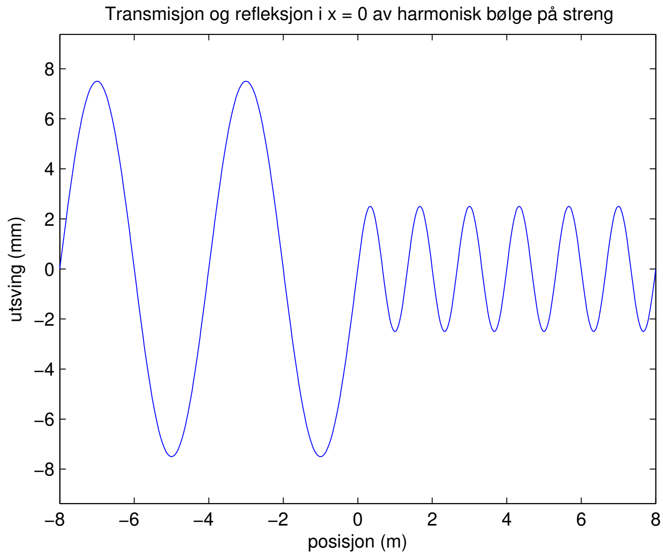
dvs

$$y_r(a,t) = -\frac{B}{A}\,y_i(a,t)$$

den samme sammenhengen mellom y_r og y_i som vi hadde i $x = 0$ med skjøten i $x = 0$, dvs enten y_r og y_i i fase (motsatt fortegn på B og A) eller y_r og y_i i motfase (samme fortegn på B og A) i skjøten. Mer generelt må vi, med skjøten i $x = a$, velge fasekonstanter slik at

$$\phi_r + \phi_i = -2ka$$

e) Her er en figur av sluttbildet av animasjonen:



Oppgave 3

a) Hvis $kD \ll 1$, er $\tanh kD \simeq kD$, og $\omega^2 \simeq gk \cdot kD = gD\,k^2$, dvs $\omega(k) = \sqrt{gD}\,k$. Da er fasehastighet og bølgehastighet like store, $v_f = v_g = \sqrt{gD}$.

b) Med $\lambda = 200$ km og $D = 4$ km er $kD = 2\pi D/\lambda = 2\pi \cdot 4/200 = 0.126$, som er en god del mindre enn 1. Vi kan erstatte $\tanh kD$ med kD ($\tanh(0.1256637) = 0.1250064$), og vi har lineær dispersjon, med $v_g = \sqrt{gD} = \sqrt{9.81 \cdot 4 \cdot 10^3} = 198\,\mathrm{m/s} = 713\,\mathrm{km/h}$. Med 200 km fra en bølgedal til den neste tar det en tid $2 \cdot 10^5\,\mathrm{m}/198\,\mathrm{m/s} = 1009\,\mathrm{s} \simeq 17\,\mathrm{minutter}$ for en hel bølgelengde å passere en gitt posisjon, f.eks et fiskefelt i nærheten. Hvis amplituden er ca 1 meter, vil en slik bølge ikke være merkbar for den som er ute på fiskefeltet.

c) Med dybden D minst 200 m og $\lambda = 100$ m, blir $kD = 2\pi D/\lambda = 2\pi \cdot 200/100 = 12.57$ eller større. Da kan vi trygt erstatte $\tanh kD$ med 1: $\tanh(4\pi) = 0.999999999975\ldots$. Dispersjonsrelasjonen blir $\omega(k) = \sqrt{gk}$, slik at gruppehastigheten er $v_g = d\omega/dk = \sqrt{g/4k} = \sqrt{g\lambda/8\pi} = \sqrt{9.81 \cdot 100/8\pi} = 6.25$ m/s $= 22.5$ km/h. Det tar da bølgepakken $200/22.5 \simeq 9$ timer å nå inn til land.

d) Gruppehastigheten avtar med kvadratroten av dybden D. Energitettheten i bølgen er proporsjonal med bølgehastigheten og (kvadratet av) amplituden. Hvis bølgehastigheten avtar mens energitettheten holder seg noenlunde konstant, vil amplituden bli stadig større. I verste fall kan resultatet bli en tsunami ("havnebølge"), med katastrofale ødeleggelser.